Barycentres

1. Barycentre de deux points.

1.1. Définition du barycentre de deux points.

Soient A, B deux points du plan et soient a, b deux réels tels que $a+b\neq 0$, soient O et O' deux points du plan, on a la relation suivante :

$$\begin{aligned}\frac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}}{a+b} &= \frac{a\overrightarrow{OO'}+a\overrightarrow{O'A}+b\overrightarrow{OO'}+b\overrightarrow{O'B}}{a+b}\\ &= \frac{a\overrightarrow{OO'}+b\overrightarrow{OO'}}{a+b}+\frac{a\overrightarrow{O'A}+b\overrightarrow{O'B}}{a+b}\\ &= \overrightarrow{OO'}+\frac{a\overrightarrow{O'A}+b\overrightarrow{O'B}}{a+b}.\end{aligned}$$

En particulier si G est défini par

$$\overrightarrow{OG}=\frac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}}{a+b}$$

Alors

$$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OO'}+\frac{a\overrightarrow{O'A}+b\overrightarrow{O'B}}{a+b}\Leftrightarrow\overrightarrow{O'G}=\frac{a\overrightarrow{O'A}+b\overrightarrow{O'B}}{a+b}.$$

La définition de G ne dépend donc pas du choix de O.

Définition 1.1. *Soient A, B deux points du plan et soient a, b deux réels tels que $a+b\neq 0$. On appelle barycentre du système de points $\{(A,a),(B,b)\}$ le point G du plan défini par*

$$\overrightarrow{OG}=\frac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}}{a+b},$$

où O est un point quelconque du plan, G ne dépendant pas du choix de O.

Remarque 1.1. Si G est le barycentre du système de points $\{(A,a),(B,b)\}$, on a en posant $O=A$ ou $O=B$ dans la Définition 1.1 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG}&=\frac{a\overrightarrow{AA}+b\overrightarrow{AB}}{a+b}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB},\\ \overrightarrow{BG}&=\frac{a\overrightarrow{BA}+b\overrightarrow{BB}}{a+b}=\frac{a}{a+b}\overrightarrow{BA},\end{aligned}$$

Ces formules seront utilisées en pratique pour calculer le barycentre de deux points (*cf.* Exemple 1.1). On remarque que si $A=B$ alors $G=A=B$.

Exemple 1.1. Représenter le barycentre G du système de points

$a)$ $\{(A,2),(B,1)\}$, $b)$ $\{(A,1),(B,2)\}$, $c)$ $\{(A,5),(B,-2)\}$, $d)$ $\{(A,2),(B,-5)\}$.

On a successivement, avec a et b les poids affectés respectivement à A et B :

$$a)\overrightarrow{AG} = \frac{a\overrightarrow{AA} + b\overrightarrow{AB}}{a+b} = \frac{b\overrightarrow{AB}}{a+b} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},$$
$$b)\overrightarrow{AG} = \frac{b\overrightarrow{AB}}{a+b} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB},$$
$$c)\overrightarrow{AG} = \frac{b\overrightarrow{AB}}{a+b} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB},$$
$$d)\overrightarrow{AG} = \frac{b\overrightarrow{AB}}{a+b} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}.$$

Le point G est représenté à la Figure 1.1, pour chacun de ces cas.

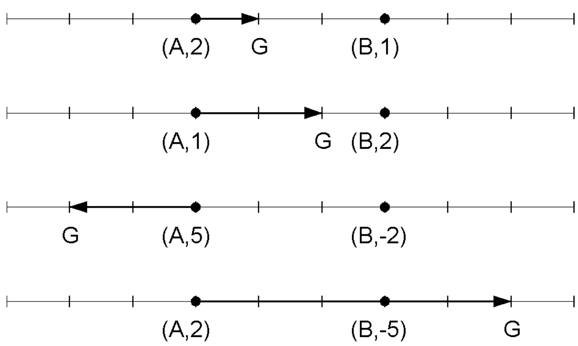

Figure 1.1. Représentation géométrique du barycentre du système de points $\{(A,2),(B,1)\}$, $\{(A,1),(B,2)\}$, $\{(A,5),(B,-2)\}$, $\{(A,2),(B,-5)\}$.

1.2. Définition équivalente du barycentre de deux points.

Soient A, B deux points du plan, et soient a et b deux réels a et b tels que $a+b \neq 0$. On a la relation suivante :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}}{a+b} \Rightarrow \overrightarrow{GG} = \frac{a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB}}{a+b} \Rightarrow a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = 0.$$

Réciproquement, pour tout point O, on a :

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = 0 \Rightarrow a\overrightarrow{GO} + a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{GO} + b\overrightarrow{OB} = 0 \Rightarrow (a+b)\overrightarrow{OG} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}}{a+b}.$$

On a donc la cararactérisation suivante du barycentre, qui ne dépend que de A et B (sans faire intervenir un point O).

Proposition 1.1. *Soient A, B deux points du plan, et soient a, b deux réels tels que $a+b \neq 0$. Le point G est le barycentre du système de points $\{(A,a),(B,b)\}$ si, et seulement si, il vérifie*

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}.$$

Par la suite on notera aussi par 0 le vecteur nul.

1.3. Coordonnées dans un repère du plan du barycentre de deux points.

On se donne un repère du plan. La Propriété suivante est une conséquence immédiate de la Définition 1.1 et des règles de calcul des coordonnées d'une combinaison linéaire de vecteurs.

Proposition 1.2. *Soit $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan et soient a et b deux réels tels que $a+b \neq 0$. Soit G le barycentre des points (A,a) et (B,b), alors les coordonnées (x_G, y_G) du point G vérifient*

$$x_G = \frac{ax_A + bx_B}{a+b}, \; y_G = \frac{ay_A + by_B}{a+b}.$$

1.4. Autres propriétés du barycentre de deux points.

La Définition 1.1 a comme Corollaire immédiat.

Corollaire 1.1 (Propriété fondamentale du barycentre). *Soient A, B deux points du plan, et soient a, b deux réels a et b tels que $a+b \neq 0$ et soit G le barycentre du système de points $\{(A,a),(B,b)\}$ alors*

$$\overrightarrow{MG} = \frac{a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}}{a+b},$$

pour tout point M du plan.

Exemple 1.2. Soient A, B deux points du plan, donner l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M du plan vérifiant

$$\|\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}\| = 1.$$

Soit G le barycentre du système de points $\{(A,1),(B,4)\}$. On a pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}}{5}.$$

On a donc

$$\|\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}\| = 1 \Leftrightarrow \|5\overrightarrow{MG}\| = 1$$

et $\mathcal{C}$ est alors le cercle de centre G et de rayon $\frac{1}{5}$ avec

$$\overrightarrow{AG} = \frac{4\overrightarrow{AB}}{4+1} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB}.$$

1.5. Homogénéïté du barycentre.

Soit k un réel non nul, si G est le barycentre du système de points $\{(A,a),(B,b)\}$, alors

$$\overrightarrow{OG} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}}{a+b} = \frac{ka\overrightarrow{OA} + kb\overrightarrow{OB}}{ka+kb}.$$

Donc G est le barycentre du système de points $\{(A,ka),(B,kb)\}$. Cette propriété s'appelle la propriété d'homogénéïté du barycentre. On a donc la Proposition suivante.

Proposition 1.3 (Homogénéïté du barycentre) *Soit k un réel non nul, si G est le barycentre du système de points $\{(A,a),(B,b)\}$ (on a donc $a+b \neq 0$), alors G est le barycentre du système de points $\{(A,ka),(B,kb)\}$.*

1.6. Position du barycentre de deux points.

Proposition 1.4 (Position du barycentre de deux points). *Soient A, B deux points du plan et soient a, b deux réels tels que $a+b \neq 0$ et soit G le barycentre du système $\{(A,a),(B,a)\}$, alors :*

- Les points A, B et G sont alignés

- Le point G appartient segment $[AB]$ si, et seulement si, a et b sont de même signe (soit $a \geq 0$ et $b \geq 0$, soit $a \leq 0$ et $b \leq 0$).

- Le point G est plus proche du point A si A si $|a| > |b|$ et G est plus proche de b si $|b| > |a|$.

Preuve de la Proposition 1.4. Soit G le barycentre du système de points $\{(A,a),(B,b)\}$, on étudie la position de G par rapport à A et B en fonction des coefficients a et b.

Supposons a et b de même signe. On a

$$\begin{aligned}
\frac{b}{a+b} &= \frac{|b|}{|a|+|b|} \text{ si } a \geq 0 \text{ et } b \geq 0,\\
\frac{b}{a+b} &= \frac{-b}{-a-b} = \frac{|b|}{|a|+|b|} \text{ si } a \leq 0 \text{ et } b \leq 0,
\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\,\overrightarrow{AB} = \frac{|b|}{|a|+|b|}\,\overrightarrow{AB} \text{ avec } \frac{|b|}{|a|+|b|} \leq 1.$$

Donc G est un point du segment $[AB]$ et G est plus proche de A si $|a| > |b|$ et plus proche de b si $|b| > |a|$. Si $|a| = |b|$, G est le milieu du segment $[AB]$.

Supposons a et b de signes opposés. On a

$$\begin{aligned}
\frac{b}{a+b} &= \frac{-(-b)}{|a|-(-b)} = \frac{-|b|}{|a|-|b|} = \frac{|b|}{|b|-|a|} \text{ si } a > 0 \text{ et } b < 0,\\
\frac{b}{a+b} &= \frac{|b|}{-(-a)+|b|} = \frac{|b|}{-|a|+|b|} = \frac{|b|}{|b|-|a|} \text{ si } a < 0 \text{ et } b > 0,
\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{|b|}{|b|-|a|}\overrightarrow{AB}, \text{ avec } \frac{|b|}{|b|-|a|} > 1 \text{ si } |b| > |a| \text{ et } \frac{|b|}{|b|-|a|} < -1 \text{ si } |b| < |a|.$$

Donc G est un point à l'extérieur du segment $[AB]$ et G est plus proche de A si $|a| > |b|$ et plus proche de b si $|b| > |a|$ (par hypothèse on a $|a| \neq |b|$).

Donnons quelques cas particuliers. Soient A et B deux points du plan, alors :

- Si $a = 1$, $b = 0$ alors $G = A$, si $a = 0$ et $b = 1$ alors $G = B$.
- Si $a = b = 1$ alors G est le milieu du segment $[AB]$.
- Si $a = -1$, $b = 2$ alors $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB}$ et G est le symétrique de A par rapport à B.
- Si $a = 2$, $b = -1$ alors $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB}$ et G est le symétrique de B par rapport à A.

La définition suivante correspond au cas $a = b = 1$.

Définition 1.2. *Soient A, B deux points du plan, le barycentre des points $\{(A,1),(B,1)\}$ est appellé isobarycentre des points A et B. C'est aussi le milieu de $[AB]$.*

2. Barycentre de trois points.

2.1. Définition et propriétés du barycentre de trois points.

Les résultats suivant s'obtiennent directement à partir de l'étude du barycentre de deux points vue au Paragraphe précédent.

Définition 2.1. *Soient A, B, C trois points du plan et soient a, b, c trois réels tels que $a+b+c \neq 0$. On appelle barycentre du système de points $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$ le point G du plan défini par*

$$\overrightarrow{OG} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a+b+c},$$

où O est un point quelconque du plan, G ne dépendant pas du choix de O.

Corollaire 2.1 (Propriété fondamentale du barycentre). *Soient A, B, C trois points du plan et soient a, b, c trois réels tels que $a+b+c \neq 0$ et soit G le barycentre du système de points $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$ alors*

$$\overrightarrow{MG} = \frac{a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}}{a+b+c},$$

pour tout point M du plan.

Proposition 2.1. *Soient A, B, C trois points du plan et soient a, b, c trois réels tels que $a+b+c \neq 0$. Le point G est le barycentre du système de points $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$ si, et seulement, si*

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = 0.$$

Définition 2.2. *Soient A, B, C trois points du plan, le barycentre des points $\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$ est appellé isobarycentre des points A, B, C. C'est aussi le centre de gravité du triangle ABC.*

On se donne un repère du plan. La Proposition suivante est une conséquence immédiate de la Définition 2.1

Proposition 2.2. *Soit $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$ trois points du plan et soient a, b, c trois réels tels que $a+b+c \neq 0$. Soit G le barycentre des points (A,a), (B,b), (C,c), alors les coordonnées (x_G, y_G) du point G vérifient*

$$x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}, \ y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}.$$

Proposition 2.3 (Homogénéïté du barycentre). *Soit k un réel non nul, si G est le barycentre du système de points $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$* (on a donc $a+b+c \neq 0$)*, alors G est le barycentre du système de points $\{(A,ka),(B,kb),(C,ka)\}$.*

Remarque 2.1. Si G est le barycentre du système de points $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$, on a en posant $O = A$ ou $O = B$ ou $O = C$ dans la Définition 2.1 :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AG} &= \frac{a\overrightarrow{AA} + b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{a+b+c} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{a+b+c},\\
\overrightarrow{BG} &= \frac{a\overrightarrow{BA} + b\overrightarrow{BB} + c\overrightarrow{BC}}{a+b+c} = \frac{a\overrightarrow{BA} + c\overrightarrow{BC}}{a+b+c},\\
\overrightarrow{CG} &= \frac{a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB} + c\overrightarrow{CC}}{a+b+c} = \frac{a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB}}{a+b+c}.
\end{aligned}$$

Ces formules seront utilisées en pratique pour calculer le barycentre de trois points dans l'Exemple 2.1 suivant.

Exemple 2.1. Représenter avec une des formules ci-dessus le barycentre G du système de points $\{(A,1),(B,3),(C,4)\}$. On a, avec $a=1$, $b=3$, $c=4$:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{a\overrightarrow{AA}+b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{a+b+c} = \frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{a+b+c} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{8}\overrightarrow{AC}.$$

Le point G est représenté à la Figure 2.1 ci-dessous.

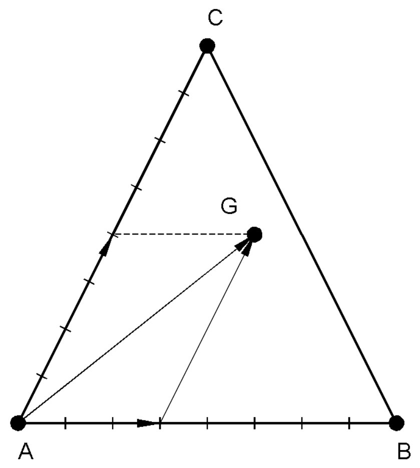

Figure 2.1a. Représentation géométrique du barycentre du système de points $\{(A,1),(B,3),(C,4)\}$. On a $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Exemple 2.1 (suite) : associativité du barycentre. Pour représenter G, nous pouvons utiliser les propriétés d'associativité suivantes du barycentre. Soit I le barycentre du système de points $\{(A,1),(B,3)\}$. On a alors pour tout point O du plan :

$$\overrightarrow{OI} = \frac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}}{a+b},$$

ce qui donne $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB} = (a+b)\overrightarrow{OI}$, puis :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{a+b+c} = \frac{(a+b)\overrightarrow{OI}+c\overrightarrow{OC}}{(a+b)+c}.$$

Donc G est le barycentre du système de points $\{(I,a+b),(C,c)\} = \{(I,4),(C,4)\}$. Le point G, barycentre de 3 points s'obtient donc en calculant le barycentre I du systèmes de deux points $\{(A,1),(B,3)\}$ puis le barycentre G du système de deux points $\{(I,a+b),(C,c)\}$. On obtient alors I puis G par :

$$\overrightarrow{OI} = \frac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}}{a+b} \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{a\overrightarrow{AA}+b\overrightarrow{AB}}{a+b} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB},$$

puis

$$\overrightarrow{OG} = \frac{(a+b)\overrightarrow{OI} + c\overrightarrow{OC}}{(a+b)+c} \Rightarrow \overrightarrow{IG} = \frac{(a+b)\overrightarrow{II} + c\overrightarrow{IC}}{(a+b)+c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC}.$$

On remarque que G est donc le milieu de $[IC]$. La construction de I et de G est représenté à la Figure 2.1b ci-dessous.

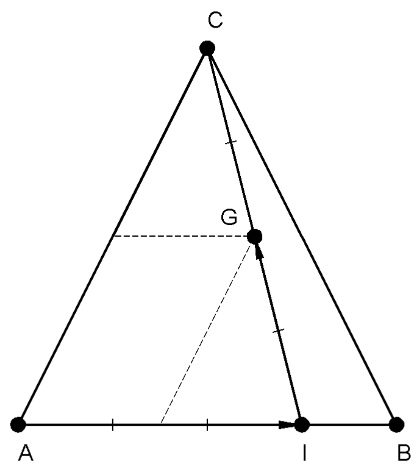

Figure 2.1b. Représentation géométrique du barycentre du système de points $\{(A,1),(B,3),(C,4)\}$: I est le barycentre de $\{(A,1),(B,3)\}$ et G celui de $\{(I,4),(C,4)\}$.

Cette propriété d'associativité s'énonce alors sous la forme suivante.

Théorème 2.1 (Théorème d'associativité ou du barycentre partiel). *Soient trois points A, B, C et soient trois réels a, b, c tels que $a+b+c \neq 0$. Soit G le barycentre des points (A,a), (B,b) et (C,c). Si $a+b \neq 0$ alors G est aussi le barycentre des points $(H, a+b)$ et (C,c) avec H barycentre des points (A,a) et (B,b). Si $a+b=0$ (et donc $c \neq 0$), et si $A=B$, alors $G=C$.*

Preuve du Théorème 2.1. La preuve est analogue à celle de l'Exemple 2.1. précédent.

Dans le cas où $a+b=0$ et $A=B$ on conviendra d'écrire que le barycentre de $\{(A,a),(A,-a),(C,c)\}$ est le barycentre de $\{(A,0),(C,c)\}$, donc de $\{(C,c)\}$ et donc de C. On pourra étendre ce raisonnement à d'autres systèmes de points : le barycentre de $\{(A,a),(A,-a),(C,c),(D,d)\}$ est le barycentre de $(C,c),(D,d)\}$ si $c+d \neq 0$, *etc.*

Proposition 2.4 (Position du barycentre de trois points). *Soient A, B, C trois points du plan et soient a, b, c trois réels tels que $a+b+c \neq 0$, soit G le barycentre du système $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$, alors G appartient au triangle ABC si, et seulement si a, b et c sont de même signe (a, b et c sont tous supérieurs ou égal à 0 ou bien tous inférieurs ou égal à 0).*

Preuve de la Propriété 2.4. Supposons que a, b et c soient de même signe. Si $a+b=0$ alors $a=b=0$ (somme de deux nombres positifs nulle) et $G=C$. Sinon, soit H le barycentre des points (A,a) et (B,b), d'après le Théorème d'associativité, G est le barycentre des points $(H,a+b)$ et (C,c). Comme a et b sont de même signe, H est donc sur le segment $[AB]$. Ensuite, comme $a+b$ et c sont de même signe, G est donc sur le segment $[HC]$. On en conclut que G appartient au triangle ABC.

Supposons que a, b et c ne soient pas de même signe. Par exemple $a \geq 0$, $b \geq 0$ et $c \leq 0$. Si $a+b=0$ alors $a=b=0$ et a, b, c sont donc de même signe. On a donc nécessairement $a+b \neq 0$. Soit H le barycentre des points (A,a) et (B,b), d'après le Théorème d'associativité, G est le barycentre des points $(H,a+b)$ et (C,c). Comme a et b sont de même signe, H est donc sur le segment $[AB]$. Ensuite, comme $a+b$ et c sont de signes opposés, G est sur la droite (HC), à l'extérieur du segment $[HC]$. Le cas général se démontre de la même manière en écrivant que parmi a, b, c, une des trois variables est nécessairement non nulle et de signe opposé au signe des deux autres.

3. Barycentre de n points.

3.1. Définition et propriétés du barycentre de n points, $n \geq 2$.

Les résultats suivants s'obtiennent directement à partir de l'étude du Barycentre de deux ou trois points vue au Paragraphe précédent.

Définition 3.1. *Soient A_1, $A_2, \cdots, A_n$, n points du plan et soient a_1, $a_2, \cdots, a_n$, n réels tels que $a_1+a_2+\cdots+a_n \neq 0$. On appelle barycentre du système de points $\{(A_1,a_1),(A_2,a_2),\cdots,(A_n,a_n)\}$ le point G du plan défini par*

$$\overrightarrow{OG} = \frac{a_1\overrightarrow{OA_1} + a_2\overrightarrow{OA_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{OA_n}}{a_1+a_2+\cdots+a_n},$$

où O est un point quelconque du plan, G ne dépendant pas du choix de O.

Corollaire 3.1 (Propriété fondamentale du barycentre).
Soient A_1, $A_2, \cdots, A_n$, n points du plan et soient a_1, $a_2, \cdots, a_n$, n réels tels que $a_1+a_2+\cdots+a_n \neq 0$ et soit G le barycentre du système de points $\{(A_1,a_1),(A_2,a_2),\cdots,(A_n,a_n)\}$ alors

$$\overrightarrow{MG} = \frac{a_1\overrightarrow{MA_1} + a_2\overrightarrow{MA_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{MA_n}}{a_1+a_2+\cdots+a_n},$$

pour tout point M du plan.

Proposition 3.1. *Soient A_1, $A_2, \cdots, A_n$, n points du plan et soient a_1, $a_2, \cdots, a_n$, n réels tels que $a_1+a_2+\cdots+a_n \neq 0$. Le point G est le barycentre du système de points $\{(A_1,a_1),(A_2,a_1),\cdots,(A_n,a_n)\}$ si, et seulement, si*

$$a_1\overrightarrow{GA_1} + a_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{GA_n} = 0.$$

Définition 2.2. *Soient A_1, $A_2, \cdots, A_n$, n points du plan, le barycentre des points $\{(A_1, 1), (A_2, 1), \cdots, (A_n, 1)\}$ est appellé isobarycentre des points A_1, $A_2, \cdots, A_n$.*

On se donne un repère du plan. La Proposition suivante est une conséquence immédiate de la Définition 3.1.

Proposition 3.2. *Soit $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2), \cdots, A_n(x_n, y_n)$, n points du plan et soient a_1, $a_2, \cdots, a_n$, n réels tels que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \neq 0$. Soit G le barycentre du système de points $\{(A_1, a_1), (A_2, a_1), \cdots, (A_n, a_n)\}$, alors les coordonnées (x_G, y_G) du point G vérifient*

$$x_G = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n},\ y_G = \frac{a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ny_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}.$$

Proposition 3.3 (Homogénéïté du barycentre). *Soit k un réel non nul, si G est le barycentre du système de points $\{(A_1, a_1), (A_2, a_2), \cdots, (A_n, a_n)\}$ (on a donc $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \neq 0$), alors G est le barycentre du système de points $\{(A_1, ka_1), (A_2, ka_2), \cdots, (A_n, ka_n)\}$.*

On énonce ci-dessous un Théorème d'associativité valable pour le regroupement de $p = 2$ deux systèmes de points, il se généralise au cas du regroupement de p systèmes de points.

Théorème 3.1 (Théorème d'associativité ou du barycentre partiel). *Soient*

$$A_1, A_2, \cdots, A_m, B_1, B_2, \cdots, B_n,$$

$m + n$ points du plan et soient

$$a_1, a_2, \cdots, a_m, b_1, b_2, \cdots, b_n,$$

$m + n$ réels tels que $a_1 + a_2 + \cdots + a_m + b_1 + b_2 + \cdots + b_n \neq 0$.
Soit G le barycentre du système de points

$$\{(A_1, a_1), (A_2, a_2), \cdots, (A_n, a_m), (B_1, b_1), (B_2, b_2), \cdots, (B_n, b_n)\}.$$

Si $a_1 + \cdots + a_m \neq 0$ et $b_1 + \cdots + b_n \neq 0$ alors G est aussi le barycentre des points

$$(I, a_1 + \cdots + a_m) \text{ et } (J, b_1 + \cdots + b_n)$$

avec I barycentre du système de points $\{(A_1, a_1), (A_2, a_2), \cdots, (A_m, a_m)\}$ et J barycentre du système de points $\{(B_1, b_1), (B_2, b_2), \cdots, (B_n, b_n)\}$.

Preuve du Théorème 2.1. La preuve est analogue à celle de l'Exemple 2.1.

Exemple 3.1. Soit G le barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,1)$, $(D,1)$, alors, par exemple, G est le barycentre de $(H,3)$, $(D,1)$ avec H barycentre des points $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,1)$.

Ensuite, par exemple, G aussi le barycentre de $(I,2)$, $(J,2)$ avec I barycentre des points $(A,1)$, $(B,1)$ et J barycentre des points $(C,1)$, $(D,1)$

On peux aussi regrouper en trois familles, ainsi G est le barycentre de $(A,1)$, $(K,2)$, $(D,1)$ avec K barycentre des points $(B,1)$, $(C,1)$.

Exemple 3.2. Soit G le barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,1)$, $(D,-2)$ avec D milieu de $[AB]$. Donc G est le barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,1)$, $(A,-1)$, $(B,-1)$. Dans ce cas particulier on peut regrouper $(A,1)$ et $(A,-1)$ ainsi que $(B,1)$ et $(B,-1)$ qui s'éliminent et G est en fait égal à C.

On retrouve ce résultat de la manière suivante, G est aussi barycentre de $(H,3)$, $(D,-2)$ avec H centre de gravité du triangle ABC, donc $\overrightarrow{DG} = \frac{3}{3-2}\overrightarrow{DH} = 3\overrightarrow{DH}$. Comme (DC) est la médiane de ABC issue C et que H est centre de gravité du triangle ABC, on a $\overrightarrow{DH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ et donc $\overrightarrow{DG} = 3\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow D = C$.

Exemple 3.3. Soit G le barycentre de $(A,-3/5)$, $(B,-7/5)$, $(C,1)$, $(D,4)$ avec D barycentre des points $(A,2),(B,3)$. On peut écrire que D est barycentre de $(A,\frac{4\times 2}{5}),(B,\frac{4\times 3}{5})$ (la somme des poids de A et B vaut maintenant 4, le poids de D) *i.e.* de $(A,\frac{8}{5}),(B,\frac{12}{5})$. Donc G est le barycentre de $(A,-3/5)$, $(B,-7/5)$, $(C,1)$, $(A,8/5),(B,12/5)$ et donc de $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,1)$.

4. Exemples.

Nous donnons ci-dessous quelques exemples d'utilisation du barycentre sous forme d'exercices corrigés.

Exemple 4.1. Transformation d'égalités vectorielles.

On donne la relation : $\overrightarrow{AF} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BF}$. Prouver que F est barycentre de A et B.

a) Pour montrer que F est barycentre de A et B, on peux appliquer la Proposition 1.1. Pour cela on fait apparaître $\overrightarrow{FA}$ et $\overrightarrow{FB}$ dans la relation

$$\overrightarrow{AF} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BF}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AF} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BF} &\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AF} = -2\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{BF} \\
&\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AF} = -2(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FB}) + 6\overrightarrow{BF} \\
&\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AF} = -2\overrightarrow{AF} + 2\overrightarrow{BF} + 6\overrightarrow{BF} \\
&\Leftrightarrow 5\overrightarrow{AF} - 8\overrightarrow{BF} = 0 \\
&\Leftrightarrow -5\overrightarrow{FA} + 8\overrightarrow{FB} = 0,
\end{aligned}$$

le point F est donc le barycentre des points $(A, -5)$, $(B, 8)$.

b) On peut aussi utiliser la Définition 1.1, pour cela, on fait apparaître un point O quelconque dans la relation

$$\overrightarrow{AF} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BF}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AF} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BF} &\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AF} = -2\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{BF} \\
&\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AO} + 3\overrightarrow{OF} = -2\overrightarrow{AO} - 2\overrightarrow{OB} + 6\overrightarrow{BO} + 6\overrightarrow{OF} \\
&\Leftrightarrow -3\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OF} = 2\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} - 6\overrightarrow{OB} + 6\overrightarrow{OF} \\
&\Leftrightarrow -3\overrightarrow{OF} = 5\overrightarrow{OA} - 8\overrightarrow{OB} \\
&\Leftrightarrow 3\overrightarrow{OF} = -5\overrightarrow{OA} + 8\overrightarrow{OB} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{OF} = \frac{-5\overrightarrow{OA} + 8\overrightarrow{OB}}{8-5},
\end{aligned}$$

F est donc le barycentre des points $(A, -5)$, $(B, 8)$.

Exemple 4.2. Montrer que trois points sont alignés.

Soit ABC un triangle, soit I le point du plan tel que $3\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$, J le point tel que $3\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{BC}$ et K le point du plan défini par $3\overrightarrow{AK} = 4\overrightarrow{AC}$.

Démontrer que I, J et K sont alignés. Donner une figure.

Réponse. On résout de la manière suivante. On écrit les hypothèses en terme de barycentre de points, notamment en fonction de A, B et C ici (donnée du triangle). Puis on montre qu'un point parmi les points I, J et K est barycentre des deux autres points, ce qui montrera que I, J et K sont alignés.

Des relations vectorielles ci-dessus on déduit que :

I est le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 2)$,

J est le barycentre de $(B, 1)$, $(C, 2)$,

K est le barycentre de $(A, 1)$, $(C, -4)$.

On combine les deux premières lignes pour éliminer B et faire apparaître K :

I est le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 2)$: $\times 1$

J est le barycentre de $(B, 1)$, $(C, 2)$: $\times(-2)$

Donc le barycentre de $(I, 1)$ $(J, -2)$ est le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(B, -2)$, $(C, -4)$ donc de $(A, 1)$, $(C, -4)$. Ce barycentre est donc K. Les points I, J et K sont alignés (*cf.* Figure 4.1).

On peut aussi raisonner de la manière suivante. Cherchons a, b deux réels tels que $a + b \neq 0$ et tels que K soit le barycentre de (I, a) (J, b). Par associativité, le barycentre de (I, a), (J, b) est le barycentre de (A, a), $(B, 2a)$, (B, b), $(C, 2b)$. Comme B ne figure pas dans la définition de K, on a nécessairement $2a + b = 0$, par exemple $a = 1$ et $b = -2$.

Ainsi, le barycentre de $(I, 1)$ $(J, -2)$ est le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(B, -2)$, $(C, -4)$ donc de $(A, 1)$, $(C, -4)$. C'est donc K. Donc I, J et K sont alignés.

On pourra éventuellement s'aider d'une figure pour trouver les coefficients de I et J.

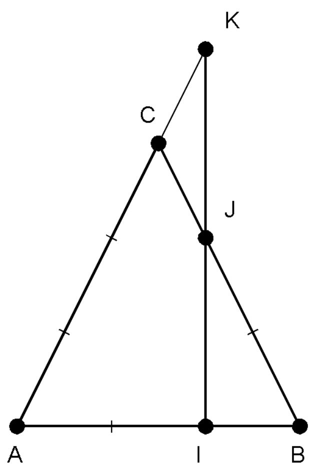

Figure 4.1. Les points I, J et K sont alignés.

4.3. Equilibre d'une balance et d'une brouette

4.3.1. Equilibre d'une balance. On considère la balance de la Figure 4.2a suivante, $F_A > 0$ et $F_B > 0$ étant l'intensité des forces exercées respectivement en A et en B et G le pivot de la balance.

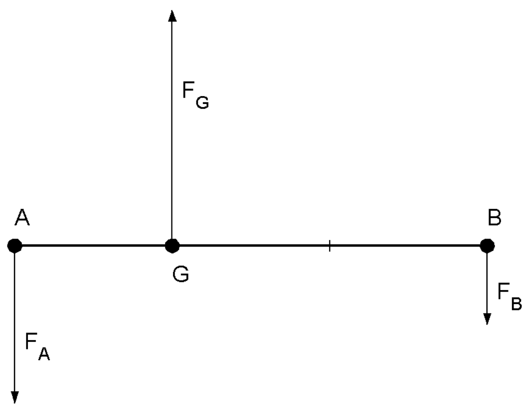

Figure 4.2a. Schéma d'une balance. A l'équilibre G est tel que $F_A\overrightarrow{GA} + F_B\overrightarrow{GB} = 0$ et on a $F_A + F_B = F_G$. Sur cet exemple $F_B/F_A = \frac{1}{3}$.

Une condition nécessaire pour que cette balance soit à l'équilibre est qu'il existe un point G tel que :

$$F_A\overrightarrow{GA} + F_B\overrightarrow{GB} = 0.$$

On obtient alors l'équilibre si de plus on a $F_A + F_B = F_G$, F_G est l'intensité de la force exercée sur le pivot, cette force s'appelle aussi force de réaction.

A l'équilibre le point G est donc le barycentre de (A, F_A), (B, F_B). Comme F_A et F_B sont de même signe G est donc bien placé entre A et B.

Avec la propriété d'homogénéïté du barycentre, on remarque que la position de G ne dépend que du rapport $r = F_B/F_A$ et on a :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{F_A\overrightarrow{AA} + F_B\overrightarrow{AB}}{F_A + F_B} = \frac{F_B\overrightarrow{AB}}{F_A + F_B} = \frac{\frac{F_B}{F_A}\overrightarrow{AB}}{1 + \frac{F_B}{F_A}} = \frac{r}{1+r}.$$

Sur l'exemple de la Figure 4.3a on a choisi $F_A = 40$ et $F_B = 20$ soit

$$\overrightarrow{AG} = \frac{F_A\overrightarrow{AA} + F_B\overrightarrow{AB}}{F_A + F_B} = \frac{20}{60}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

Application. 1) Calculer G si $F_A = 40$ et $F_B = 10$.

On a :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{F_A\overrightarrow{AA} + F_B\overrightarrow{AB}}{F_A + F_B} = \frac{F_B\overrightarrow{AB}}{F_A + F_B} = \frac{10}{50}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}.$$

La position d'équilibre est donc obtenue lorsque G est au premier cinquième de $[AB]$ (cf Figure 4.2b).

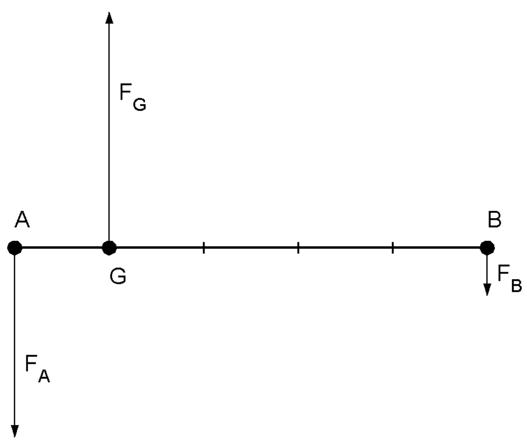

Figure 4.2b. Schéma d'une balance. On a $F_B/F_A = \frac{1}{4}$. Le point G est le barycentre de $(A, 40)$, $(B, 10)$, ou encore, de $(A, 4)$, $(B, 1)$.

2) Calculer F_B si $F_A = 30$ et si G est au premier quart de $[AB]$.

On a

$$\overrightarrow{AG} = \frac{F_B\overrightarrow{AB}}{F_A + F_B} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}.$$

Donc :

$$\frac{F_B}{F_A + F_B}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 4F_B = F_A + F_B \Leftrightarrow F_B = \frac{F_A}{3} = 10.$$

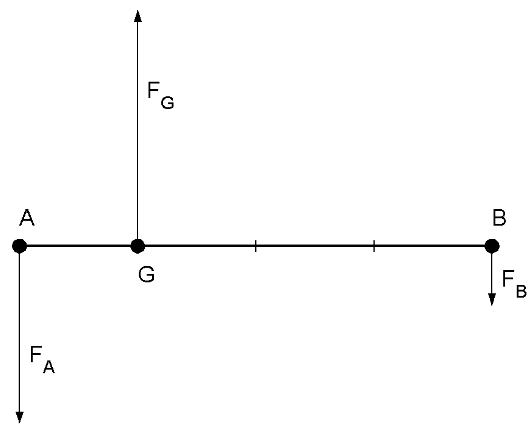

Figure 4.2c. Schéma d'une balance. Schéma d'une balance. On a $F_A = 30$, $F_B = 10$, $F_B/F_A = \frac{1}{3}$. Le point G est le barycentre de $(A, 30)$, $(B, 10)$, ou encore, de $(A, 3)$, $(B, 1)$.

4.3.2. Equilibre d'une brouette. On considère maintenant la «brouette» de la figure 4.3a suivante, $F_A > 0$ et $F_B > 0$ étant l'intensité de forces exercés respectivement en A et en B et G le centre de la roue de la brouette.

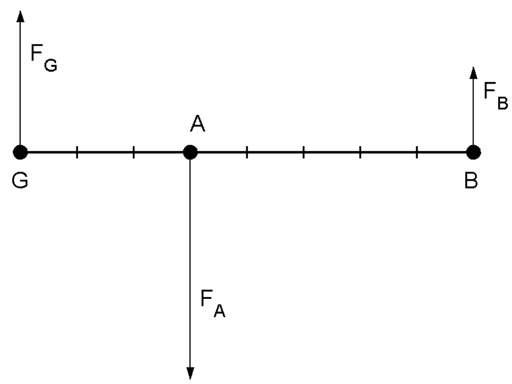

Figure 4.3a. Schéma d'une brouette. A l'équilibre G est tel que $F_A\overrightarrow{GA} - F_B\overrightarrow{GB} = 0$ et on a $F_A = F_B + F_G$. Sur cet exemple $F_B/F_A = \frac{3}{8}$.

Une condition nécessaire pour que cette brouette soit à l'équilibre est que G soit tel que :

$$F_A\overrightarrow{GA} - F_B\overrightarrow{GB} = 0.$$

On obtient ensuite l'équilibre si l'intensité F_G de la force de réaction vérifie : $F_A = F_B + F_G$.

Lorsque la brouette est à l'équilibre G est donc le barycentre de (A, F_A), $(B, -F_B)$. Comme F_A et F_B sont de signe opposés G est donc bien placé à l'extérieur de A et B comme G est plus proche de A que de B on aura $F_B < F_A$.

Sur l'exemple de la Figure 4.3a on a choisi $F_A = 40$ et $F_B = 15$ soit

$$\overrightarrow{AG} = \frac{F_A\overrightarrow{AA} - F_B\overrightarrow{AB}}{F_A - F_B} = -\frac{F_B\overrightarrow{AB}}{F_A - F_B} = -\frac{15}{25}\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}.$$

On remarque que la force exercée pour soulever la brouette vaut $F_B = \frac{3}{8}FA$ et que $GB = \frac{8}{3}GA$ car $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GA} + \frac{5}{3}\overrightarrow{GA} = \frac{8}{3}\overrightarrow{GA}$. Ainsi, si la brouette est soulevée en B et fait une angle α avec le sol, le point A est alors soulevé de $H_1 = GA\sin\alpha$ et le point B de $H_2 = GB\sin\alpha$ Le travail effectué par la force exercée en A est ainsi bien égal au travail effectué par la force en exercée en B car $F_BH_2 = \frac{3}{8}FA \times GB\sin\alpha = \frac{3}{8}FA \times \frac{8}{3}GA\sin\alpha = F_AH_1$.

Application. 1) Calculer G si $F_A = 96$, $F_B = 16$.

On a :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{F_A\overrightarrow{AA} - F_B\overrightarrow{AB}}{F_A - F_B} = \frac{-F_B\overrightarrow{AB}}{F_A - F_B} = -\frac{16}{80}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}.$$

La position d'équilibre est donc obtenue lorsque A est au premier sixième de $[GB]$ (cf Figure 4.2c).

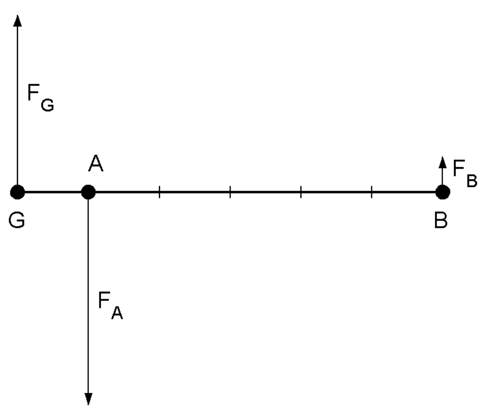

Figure 4.3b. Schéma d'une brouette. On a $F_B/F_A = \frac{1}{6}$. Le point G est le barycentre de $(A, 96)$, $(B, -16)$ ou encore, de $(A, 6)$, $(B, -1)$.

2) Calculer F_B si $F_A = 100$ et si A est au premier cinquième de $[GB]$.

On a donc $GA = \dfrac{GB}{5}$ et comme $GA + AB = GB = 5GA$, on obtient que $AB = 4AG$. On a alors :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{-F_B\overrightarrow{AB}}{F_A - F_B} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}.$$

Donc :

$$\frac{-F_B\overrightarrow{AB}}{F_B - F_A} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow -4F_B = F_B - F_A \Leftrightarrow F_B = \frac{F_A}{5} = 20.$$

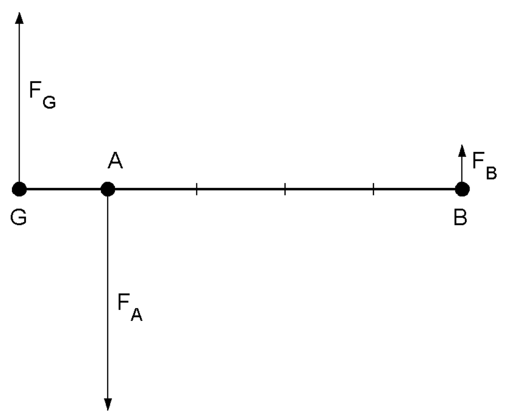

Figure 4.3*c*. Schéma d'une brouette. On a $F_A = 100$, $F_B = 20$, soit $F_B/F_A = \frac{1}{5}$. Le point G est le barycentre de G barycentre de $(A, 100)$, $(B, -20)$ ou encore, de $(A, 5)$, $(B, -1)$.

4.4. Réduction d'un problème à un problème de barycentre.

Voir l'Exemple 1.2 : soient A, B deux points du plan, donner l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M du plan vérifiant

$$\|\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}\| = 1$$

et, sur le même principe, voir l'Exercice 2.4.

4.5. Réécriture des hypothèses, emploi du Théorème d'associativité.

Voir l'écriture des hypothèses sous forme de barycentre et l'utilisation du Théorème d'associativité dans l'Exemple 4.1 et, sur le même principe, dans les exercices Exercice 3.3, 3.4, *etc.*.

Exercices

1. Barycentre de deux points.

Exercice 1.1. Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 6cm$. Dans chaque cas, construire le barycentre indiqué (on exprimera le barycentre en fonction de A et B et on donnera une représentation graphique) :

a) G_1 barycentre des points $(A, 2)$ et $(B, 1)$.

b) G_2 barycentre des points $(A, -3)$ et $(B, -1)$.

c) G_3 barycentre des points $(A, 7)$ et $(B, -1)$.

d) G_4 barycentre des points $(A, -2)$ et $(B, 2)$.

Dans le cas d) on étudiera l'ensemble des points G du plan qui vérifient la relation de la Proposition 1.1, $-2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = 0$.

Exercice 1.2. Transformer l'égalité vectorielle $3\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}$ de telle sorte que l'on prouve que B est barycentre de A et de E. Prouver ensuite que A est barycentre des points E et B.

Exercice 1.3. On donne la relation : $\overrightarrow{AF} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BF}$. Prouver que F est barycentre de A et B.

Exercice 1.4. Dans un repère du plan, on donne les points $A(3, 1)$ et $B(1, 3)$. Déterminer les coordonnées du barycentre G des points $(A, 1)$ et $(B, 3)$. Représenter A, B et G.

2. Barycentre de trois points.

Exercice 2.1. Soit ABC un triangle quelconque. Dans chaque cas, construire :

a) le barycentre G des points $(A, 1)$, $(B, 3)$ et $(C, 1)$.

b) le barycentre G des points $(A, -1)$, $(B, 3)$ et $(C, -2)$.

Dans le cas b) on étudiera l'ensemble des points G du plan qui vérifient la relation de la Proposition 1.2, $-\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{CB} = 0$.

Exercice 2.2. Soit ABC un triangle. Soit S le barycentre de $(A, 2)$, $(B, -1)$ et $(C, 3)$. Prouver que B est le barycentre des points $(A, 2)$, $(C, 3)$ et $(S, -4)$.

Exercice 2.3. Soit ABC un triangle de centre de gravité G et soit I le milieu de $[AB]$.

a) Démontrer que le barycentre K des points $(A, 1)$, $(B, 1)$ et $(C, 2)$ est le milieu de $[CI]$.

b) Exprimer $\overrightarrow{KG}$ en fonction de $\overrightarrow{CI}$.

Exercice 2.4. Soit ABC un triangle, déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|4\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$. Faire une figure.

3. Exercices sur les barycentres.

Exercice 3.1. *a*) Dans un repère du plan, on donne les points $A(3,1)$, $B(1,3)$ et $C(-2,5)$. Déterminer les coordonnées du barycentre G des points $(A,1)$, $(B,-3)$ et $(C,3)$.

b) Dans un repère du plan, on donne les points $A(1,2)$, $B(-1,3)$, $C(2,-1)$ et $D(-1,5)$. Déterminer les coordonnées du barycentre G des points $(A,2)$, $(B,-1)$, $(C,3)$ et $(D,2)$.

Exercice 3.2. *a*) Construire le barycentre des points $(A,2)$, $(B,3)$ et $(C,2)$.

b) Construire le barycentre des points $(A,-1)$, $(B,2)$, $(C,-1)$ et $(D,2)$.

c) Construire le barycentre des points $(A,-1)$, $(B,-3)$, $(C,-1)$ et $(D,-1)$.

Exercice 3.3. Soit $ABCD$ un quadrilatère, soient I, J, K et L les milieux respectifs de chacun des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Soient M et N les milieux des diagonales $[AC]$ et $[BD]$. Montrer que les droites (MN), (JL) et (IK) sont concourantes, en utilisant le point O isobarycentre des points A, B, C et D.

Exercice 3.4. Soit ABC un triangle, I est le point tel que $3\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$, K le symétrique de A par rapport à C et J le milieu de $[BC]$. Montrer que I, J et K sont alignés et représenter les points sur une figure.

Exercice 3.5. Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque, soit I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[CD]$, K le milieu de $[IC]$ et G le barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,2)$ et $(D,2)$.

a) Faire une figure.

b) Démontrer que G est sur les droites (DK) et (IJ).

Exercice 3.6. Soit ABC un triangle, A' le milieu de $[BC]$, I le milieu de $[AA']$ et P le point tel que $\overrightarrow{AP} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

a) Prouver que I est le barycentre des points $(A,2)$, $(B,1)$ et $(C,1)$.

b) Exprimer P comme barycentre de A et B, puis démontrer que P, I et C sont alignés.

Exercice 3.7. Soit $ABCD$ un quadrilatère, soit I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[CD]$ et soit K le point tel que $\overrightarrow{IK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IJ}$. Soit L le milieu de $[IC]$. Faire une figure et démontrer que D, K et L sont alignés.

Exercice 3.8. Soit ABC un triangle, soit I le symétrique de B par rapport à C et K le point tel que

$$\overrightarrow{KA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KB}.$$

Soit G le barycentre des points $(A, 3)$, $(B, -1)$ et $(C, 2)$. Faire une figure puis démontrer que G est le milieu de $[KC]$.

Exercice 3.9. Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que $AB = 4cm$ et $CD = 6cm$, soit I le point tel que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BI}$, E le milieu de $[DC]$. Soit G le barycentre des points $(A, -1)$, $(B, 3)$, $(C, 1)$ et $(D, 1)$. Faire une figure puis démontrer que G est le milieu de $[IE]$.

Exercice 3.10. Soit ABC un triangle, E et F deux points définis par

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \ \overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{AF}$$

et soit H le barycentre des points $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$.

a) Démontrer que les droites (BF) et (CE) sont sécantes en H.

b) Soit A' le milieu de $[BC]$. Démontrer que H est le milieu de $[AA']$.

6. Barycentres. Correction des exercices.

Exercice 1.1. Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 6cm$. Construction et représentation de

$a)$ G_1 barycentre des points $(A, 2)$ et $(B, 1)$.

$b)$ G_2 barycentre des points $(A, -3)$ et $(B, -1)$.

$c)$ G_3 barycentre des points $(A, 7)$ et $(B, -1)$.

$d)$ G_4 barycentre des points $(A, -2)$ et $(B, 2)$.

Dans le cas $d)$ on étudiera l'ensemble des points G du plan qui vérifient la relation de la Proposition 1.1, $-2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = 0$.

Réponse. On a, avec a et b les poids affectés respectivement à A et B : :

$$a)\ \overrightarrow{AG_1} = \frac{a\overrightarrow{AA} + b\overrightarrow{AB}}{a+b} = \frac{b\overrightarrow{AB}}{a+b} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},$$
$$b)\ \overrightarrow{AG_2} = \frac{b\overrightarrow{AB}}{a+b} = \frac{-1}{-4}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB},$$
$$c)\ \overrightarrow{AG_3} = \frac{b\overrightarrow{AB}}{a+b} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}.$$

Dans le cas $d)$ la somme des coefficients est nulle et le barycentre n'est pas défini. Etudions les points G du plan qui vérifient, comme à la Proposition 1.1, $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = 0$. On a donc $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GB}$. Si $A = B$, tous les points G du plan sont solution et sinon, aucun point est solution.

Les points G_i, $i = 1, \cdots, 3$ sont représentés à la Figure 1.

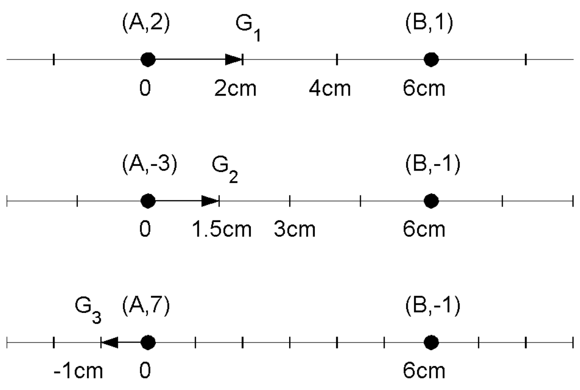

Figure 1. Représentation géométrique du barycentre du système de points $\{(A, 2), (B, 1)\}$, $\{(A, -3), (B, -1)\}$, $\{(A, 7), (B, -1)\}$.

Exercice 1.2. Transformer l'égalité vectorielle $3\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BE}$ de telle sorte que l'on prouve que B est barycentre de A et de E. Prouver ensuite que A est barycentre des points E et B.

Réponse. a) Pour montrer que B est barycentre de A et E, on peux appliquer la Proposition 1.1. Pour cela on fait apparaître $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BE}$ dans l'égalité $3\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BE}$. On a :

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BE} &\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BE}+2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BE}\\ &\Leftrightarrow 5\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BE}=0\\ &\Leftrightarrow -5\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BE}=0\end{aligned}$$

et B est le barycentre des points $(A,-5)$, $(E,2)$.

b) Pour montrer que A est barycentre de B et E on fait apparaître $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ dans l'égalité $3\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BE}$ et on applique la Proposition 1.1. On a :

$$3\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BE}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AE}+3\overrightarrow{AB}=0$$

et A est le barycentre des points $(B,3)$, $(E,2)$.

Seconde manière. On peut retrouver le résultat ci-dessus de la manière suivante. Le point B étant barycentre des points $(A,-5)$, $(E,2)$, on a tout point O du plan :

$$\overrightarrow{OB}=\frac{-5\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OE}}{-3}\Rightarrow\overrightarrow{OA}=\frac{-3\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OE}}{-5}=\frac{3\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OE}}{5},$$

ce qui, avec la Définition 1.1, redonne le résultat.

Troisième manière. On procède comme à l'Exercice 1.3b), soit O, point du plan :

$$3\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BE}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AO}+3\overrightarrow{OE}+2\overrightarrow{AO}+2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OE}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}=\frac{3\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OE}}{5}.$$

Exercice 1.3. On donne la relation : $\overrightarrow{AF}=-\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BF}$. Prouver que F est barycentre de A et B.

Réponse. a) Pour montrer que F est barycentre de A et B on fait apparaître $\overrightarrow{FA}$ et $\overrightarrow{FB}$ dans la relation

$$\overrightarrow{AF}=-\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BF}$$

et on applique la Proposition 1.1. On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF}=-\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BF} &\Leftrightarrow 5\overrightarrow{AF}=-2\overrightarrow{AB}+10\overrightarrow{BF}\\ &\Leftrightarrow 5\overrightarrow{AF}=-2(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB})+10\overrightarrow{BF}\\ &\Leftrightarrow 5\overrightarrow{AF}=-2\overrightarrow{AF}+2\overrightarrow{BF}+10\overrightarrow{BF}\\ &\Leftrightarrow 7\overrightarrow{AF}-12\overrightarrow{BF}=0\\ &\Leftrightarrow 7\overrightarrow{FA}-12\overrightarrow{FB}=0,\end{aligned}$$

le point F est donc le barycentre des points $(A,7)$, $(B,-12)$.

$b)$ On peut aussi utiliser la Définition 1.1, pour cela, on fait apparaître un point O quelconque dans la relation

$$\overrightarrow{AF} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BF}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AF} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BF} &\Leftrightarrow 5\overrightarrow{AF} = -2\overrightarrow{AB} + 10\overrightarrow{BF} \\
&\Leftrightarrow 5\overrightarrow{AO} + 5\overrightarrow{OF} = -2\overrightarrow{AO} - 2\overrightarrow{OB} + 10\overrightarrow{BO} + 10\overrightarrow{OF} \\
&\Leftrightarrow -5\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OF} = 2\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} - 10\overrightarrow{OB} + 10\overrightarrow{OF} \\
&\Leftrightarrow -5\overrightarrow{OF} = 7\overrightarrow{OA} - 12\overrightarrow{OB} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{OF} = \frac{7\overrightarrow{OA} - 12\overrightarrow{OB}}{7-12},
\end{aligned}$$

le point F est donc le barycentre des points $(A,7)$, $(B,-12)$.

Exercice 1.4. Dans un repère du plan, on donne les points $A(3,1)$ et $B(1,3)$. Déterminer les coordonnées du barycentre G des points $(A,1)$ et $(B,3)$. Représenter A, B et G.

Réponse. On a, avec la Proposition 1.2 sur le calcul des coordonnées du barycentre de deux points :

$$x_G = \frac{ax_A + bx_B}{a+b} = \frac{x_A + 3x_B}{4} = \frac{3+3}{4} = \frac{3}{2},\ y_G = \frac{y_A + 3y_B}{4} = \frac{1 + 3\times 3}{4} = \frac{5}{2}.$$

Donc G a pour coordonnées $G(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$.

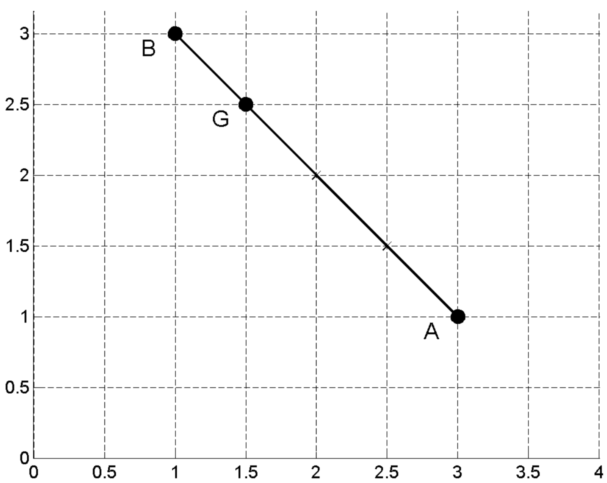

Figure 2. Représentation des points A, B et G dans un repère orthonormé.

Exercice 2.1. Soit ABC un triangle quelconque. Dans chaque cas, construire :

a) le barycentre G des points $(A,1)$, $(B,3)$ et $(C,1)$.

b) le barycentre G des points $(A,-1)$, $(B,3)$ et $(C,-2)$.

Dans le cas b) on étudiera l'ensemble des points G du plan qui vérifient la relation de la Proposition 1.2, $-\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}-2\overrightarrow{CB}=0$.

Réponse. a) On a, avec a, b et c les poids affectés respectivement à A, B et C :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{a\overrightarrow{AA}+b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{a+b+c}=\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{a+b+c}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}.$$

Le point G est représenté à la Figure 2.1 ci-dessous.

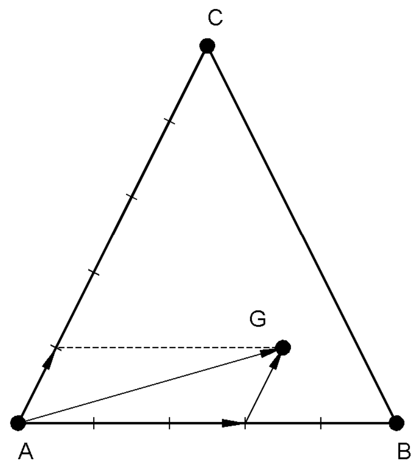

Figure 3. Représentation géométrique du barycentre du système de points $\{(A,1),(B,3),(C,1)\}$. On a $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$.

b) Cas du barycentre G des points $(A,-1)$, $(B,3)$ et $(C,-2)$.

La somme des coefficients est nulle et le barycentre n'est pas défini. Etudions les points G du plan qui vérifient, comme à la Proposition 2.1 :

$$a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}-2\overrightarrow{GC}=0.$$

On a donc, en faisant apparaître le vecteur $\overrightarrow{GA}$ dans chacun des termes ci-dessus :

$$-\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=0,$$

ce qui est équivalent à A barycentre de $(B,3)$, $(C,-2)$. Donc, si est A barycentre de $(B,3)$, $(C,-2)$, tous les points du plan sont solution (*cf.* Figure 4), sinon il n'existe pas de solutions.

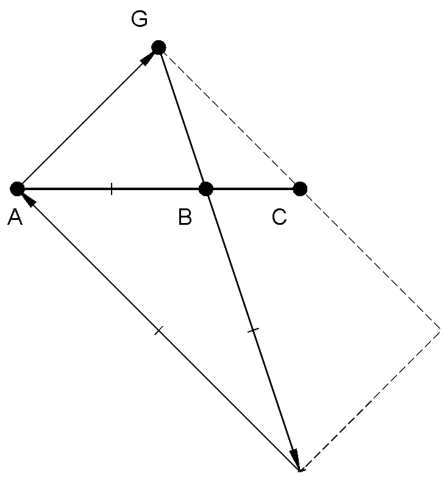

Figure 4. Si A est barycentre de $\{(B,3),(C,-2)\}$ alors, pour tout point G du plan, on a : $-\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}-2\overrightarrow{GC}=0$. On $\overrightarrow{BA}=-2\overrightarrow{BC}$.

Exercice 2.2. Soit ABC un triangle. Soit S le barycentre de $(A,2)$, $(B,-1)$ et $(C,3)$. Prouver que B est le barycentre des points $(A,2)$, $(C,3)$ et $(S,-4)$.

On a, avec la Proposition 2.1 (définition équivalente du barycentre de 3 points) :

$$S \text{ barycentre de } (A,2),(B,-1),(C,3) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}+3\overrightarrow{SC}=0.$$

Pour montrer que B est baycentre de A, C, S, on fait apparaître $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BS}$ dans la relation ci-dessus et on applique la Proposition 2.1. On a

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}+3\overrightarrow{SC}=0 &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{SB}+2\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{SB}+3\overrightarrow{SB}+3\overrightarrow{BC}=0\\ &\Leftrightarrow 4\overrightarrow{SB}+2\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}=0\\ &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}-4\overrightarrow{BS}=0\end{aligned}$$

et B est le barycentre des points $(A,2)$, $(C,3)$, $(S,-4)$.

Exercice 2.3. Soit ABC un triangle de centre de gravité G et soit I le milieu de $[AB]$.

a) Démontrer que le barycentre K des points $(A,1)$, $(B,1)$ et $(C,2)$ est le milieu de $[CI]$.

b) Exprimer $\overrightarrow{KG}$ en fonction de $\overrightarrow{CI}$.

Réponse. A - On résout d'abord en utilisant le Théorème d'associativité.

a) Le point K est barycentre des points $(A,1)$, $(B,1)$ et $(C,2)$ donc, avec le Théorème d'associativité, K est le barycentre des points $(I,2)$ et $(C,2)$ avec I

milieu de $[AB]$ et donc K est le milieu de $[CI]$. On remarque que G étant sur la médiane $[IC]$ du triangle ABC, alors les points I, G, K, C sont alignés (*cf.* Figure 5).

b) Le point G est barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,1)$, donc, avec le Théorème d'associativité, G est le barycentre des points $(I,2)$ et $(C,1)$, G est donc placé au tiers de $[IC]$, médiane de ABC. On a donc

$$\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC},\ \overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IC} \Rightarrow \overrightarrow{KG} = \overrightarrow{KI} + \overrightarrow{IG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{IC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{IC} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CI}.$$

B - On résout en utilisant la Définition 2.1 du barycentre de trois points. Le point I est barycentre des points $(A,1)$, $(B,1)$, on a donc :

$$\overrightarrow{OI} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2},$$

le point G est barycentre des points $(A,1)$, $(B,1)$ et $(C,1)$, on a donc :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} = \frac{2\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OC}}{3}.$$

On remarque que G, barycentre de $(I,2)$, $(C,1)$, est donc situé au tiers de $[IC]$ la médiane de ABC issue de C.

On montre de la même manière que G est sur chacune des médianes du triangle ABC, on en déduit que les médianes d'un triangle sont concourantes en son centre de gravité.

a) Le point K est barycentre des points $(A,1)$, $(B,1)$ et $(C,2)$ On a donc

$$\overrightarrow{OK} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}}{4} = \frac{2\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OC}}{4} = \frac{\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OC}}{2},$$

donc K est le milieu de $[IC]$.

b) on a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{KG} = \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OG} &= -\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}}{4} + \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} \\
&= \frac{-3\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} - 6\overrightarrow{OC} + 4\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC}}{12} \\
&= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}}{12} = \frac{2\overrightarrow{OI} - 2\overrightarrow{OC}}{12} \\
&= \frac{2\overrightarrow{CO} + 2\overrightarrow{OI}}{12} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CI},
\end{aligned}$$

ce qui montre le résultat.

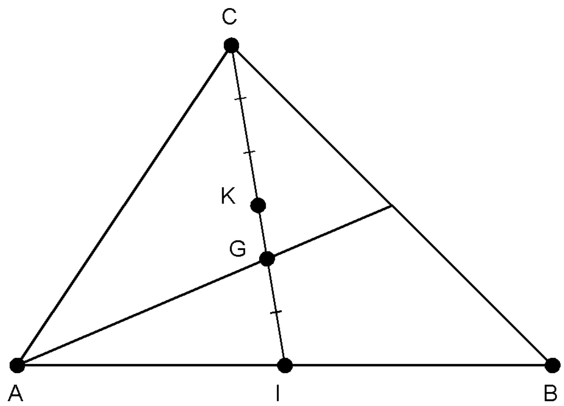

Figure 5. Soit I le milieu de $[AB]$ et K le barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$ et $(C,2)$, alors K est le milieu de $[CI]$ et le centre de gravité G de ABC vérifie $\overrightarrow{KG} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CI}$.

Exercice 2.4. Soit ABC un triangle, déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|4\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$. Faire une figure.

Réponse. On utilise la Propriété fondamentale du barycentre (Corollaire 2.1). Soit G le barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,1)$ (donc l'isobarycentre) et G' le barycentre de $(B,4)$, $(C,-1)$, on a :

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|4\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| &\Leftrightarrow \|3\overrightarrow{MG}\| = \|3\overrightarrow{MG'}\| \\ &\Leftrightarrow 3\|\overrightarrow{MG}\| = 3\|\overrightarrow{MG'}\| \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{MG'}\|.\end{aligned}$$

L'ensemble des points M est donc la médiatrice du segment $[GG']$.

Pour la construction de la Figure 6, on place G à l'intersection des médianes du triangle ABC (propriété du centre de gravité du triangle, *cf.* Exercice 2.3, en remarque), pour G' on a

$$\overrightarrow{CG'} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{CG'} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}.$$

On remarque sur la figure que le milieu I de $[G'G]$ est sur $[AB]$. Vérifions le en utilisant la Propriété d'associativité. Le point I est barycentre de $(G,3), (G',3)$, il est donc barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,1)$ $(B,4)$, $(C,-1)$, soit de $(A,1)$, $(B,5)$.

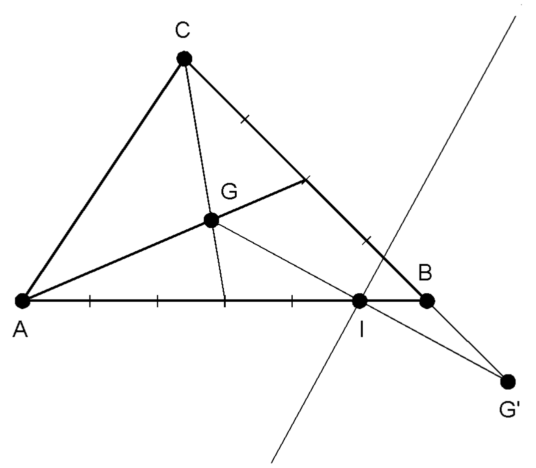

Figure 6. L'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = \|4\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|$ est la médiatrice de $[GG']$, avec G isobarycentre de ABC et G' barycentre de $(B,4)$, $(C,-1)$. Le milieu de $[GG']$ est au 5 sixièmes de $[AB]$.

Exercice 3.1. *a*) Dans un repère du plan, on donne les points $A(3,1)$, $B(1,3)$ et $C(-2,5)$. Déterminer les coordonnées du barycentre G des points $(A,1)$, $(B,-3)$ et $(C,3)$.

b) Dans un repère du plan, on donne les points $A(1,2)$, $B(-1,3)$, $C(2,-1)$ et $D(-1,5)$. Déterminer les coordonnées du barycentre G des points $(A,2)$, $(B,-1)$, $(C,3)$ et $(D,2)$.

Réponse. *a*) On a, avec la Proposition 2.2 pour le calcul des coordonnées du barycentre de trois points :

$$x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c} = \frac{x_A - 3x_B + 3x_C}{1} = 3 - 3 - 6 = -6,$$
$$y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b} = \frac{y_A - 3y_B + 3y_C}{1} = 1 - 3 \times 3 + 3 \times 5 = 7.$$

Donc G a pour coordonnées $G(-6,7)$. Les points A, B, C et G sont représentés à la Figure 7.

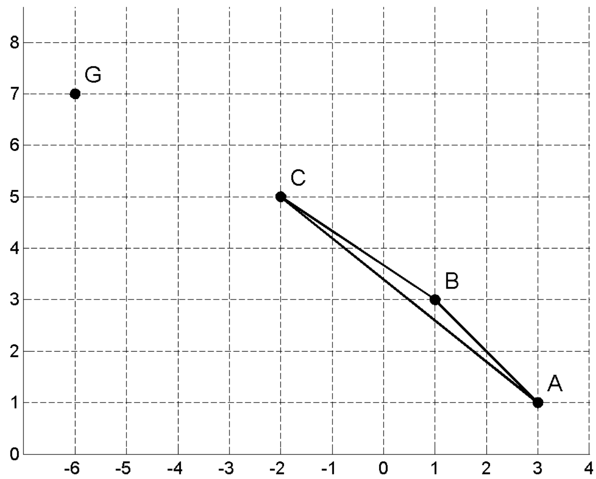

Figure 7. Représentation des points A, B, C et G dans un repère orthonormé.

b) Barycentre G des points $(A,2)$, $(B,-1)$, $(C,3)$ et $(D,2)$ avec $A(1,2)$, $B(-1,3)$, $C(2,-1)$ et $D(-1,5)$. On a, avec la Proposition 3.2 pour le calcul des coordonnées du barycentre de n points :

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{ax_A + bx_B + cx_C + dx_D}{a+b+c+d} = \frac{2x_A - x_B + 3x_C + 2x_D}{6} \\ &= \frac{2 + 1 + 3 \times 2 - 2}{6} = \frac{7}{6}, \\ y_G &= \frac{ay_A + by_B + cy_C + dy_D}{a+b+c+d} = \frac{2y_A - y_B + 3y_C + 2y_D}{6} \\ &= \frac{2 \times 2 - 3 - 3 + 2 \times 5}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Les points A, B, C, D et G sont représentés à la Figure 8.

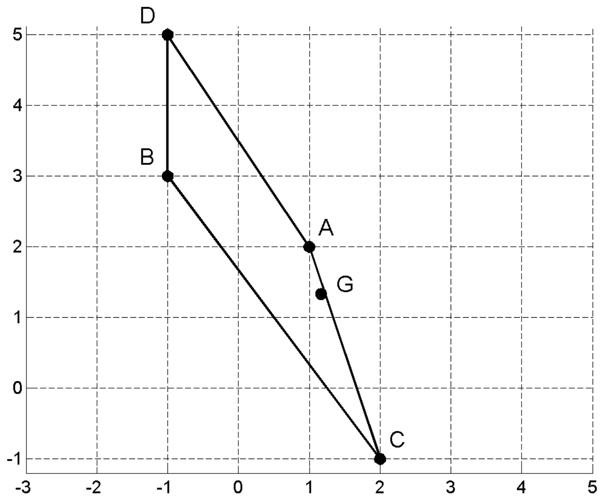

Figure 8. Représentation des points A, B, C, D et G dans un repère orthonormé.

Exercice 3.2. *a*) Construire le barycentre des points $(A, 2)$, $(B, 3)$ et $(C, 2)$.
b) Construire le barycentre des points $(A, -1)$, $(B, 2)$, $(C, -1)$ et $(D, 2)$.
c) Construire le barycentre des points $(A, -1)$, $(B, -3)$, $(C, -1)$ et $(D, -1)$.

Réponse. *a*) Barycentre des points des points $(A, 2)$, $(B, 3)$ et $(C, 2)$. On a

$$\overrightarrow{AG} = \frac{a\overrightarrow{AA} + b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{a+b+c} = \frac{3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{7}.$$

Cette construction est représentée à la Figure 9. On peut aussi utiliser le Théorème d'associativité, en regroupant A et B :

Si G est le barycentre des points des points $(A, 2)$, $(B, 3)$ et $(C, 2)$, alors G est le barycentre de $(I, 4)$, $(B, 3)$ avec I milieu de $[AC]$, on a alors $\overrightarrow{IG} = \frac{3}{7}\overrightarrow{IB}$(*cf.* Figure 9).

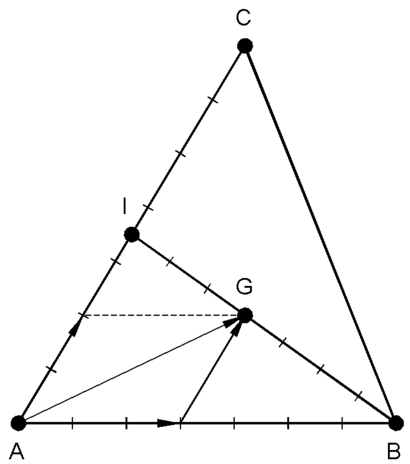

Figure 9. On a $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{7}\overrightarrow{AC}$. On a aussi, avec le Théorème d'associativité, G barycentre de $(I, 4)$, $(B, 3)$ avec I milieu de $[AC]$, on a alors $\overrightarrow{IG} = \frac{3}{7}\overrightarrow{IB}$.

b) Barycentre des points $(A, -1)$, $(B, 2)$, $(C, -1)$ et $(D, 2)$.

On a

$$\overrightarrow{AG} = \frac{a\overrightarrow{AA} + b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} + d\overrightarrow{AD}}{a+b+c+d} = \frac{2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AD}}{2}.$$

Cette construction est représentée aux Figures 10 et 11. On peut aussi utiliser le Théorème d'associativité, en regroupant A avec C et B avec D :

$$G \textit{ barycentre de } (A, -1), (B, 2), (C, -1), (D, 2) \Leftrightarrow G \textit{ barycentre de } (I, -2), (J, 4),$$

avec I barycentre de $(A, -1)$, $(C, -1)$ (donc milieu de $[AC]$) et J barycentre de $(B, 2)$, $(D, 2)$ (donc milieu de $[BD]$). On obtient alors $\overrightarrow{IG} = \frac{4}{2}\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{IJ}$ (*cf.*

Figures 10 et 11).

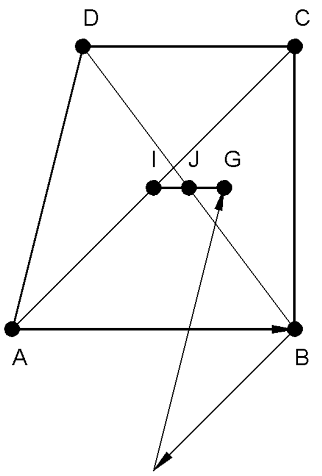

Figure 10. On a $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. Avec le Théorème d'associativité, G est le barycentre de $(I, -2)$, $(J, 4)$ avec I milieu de $[AC]$ et J milieu de $[BD]$ et donc $\overrightarrow{IG} = 2\overrightarrow{IJ}$.

La Figure 11 ci-dessous reprend la Figure 10 précédente dans laquelle on permute C avec D.

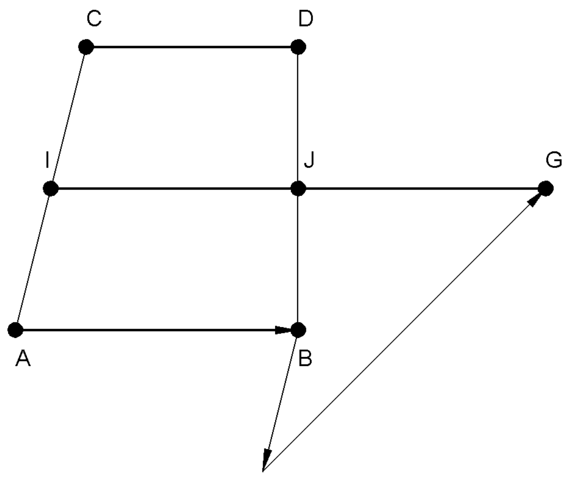

Figure 11. Par rapport à la Figure 10 précédente, on a permuté C et D. On a $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. Avec le Théorème d'associativité, G est le barycentre de $(I, -2)$, $(J, 4)$ avec I milieu de $[AC]$ et J milieu de $[BD]$

c) Construire le barycentre des points $(A, -1)$, $(B, -3)$, $(C, -1)$ et $(D, -1)$.

On a

$$\overrightarrow{AG} = \frac{a\overrightarrow{AA} + b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} + d\overrightarrow{AD}}{a+b+c+d} = \frac{-3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}}{-6} = \frac{3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}}{6}.$$

Cette construction est représentée aux Figures 11 et 12. On peut aussi utiliser le Théorème d'associativité, en regroupant A avec C et B avec D :

$$
\begin{aligned}
& G \textit{ barycentre de } (A,-1),(B,-3),(C,-1),(D,-1) \\
\Leftrightarrow\ & G \textit{ barycentre de } (I,-2),(J,-4) \\
\Leftrightarrow\ & G \textit{ barycentre de } (I,1),(J,2),
\end{aligned}
$$

avec I barycentre de $(A,-1)$, $(C,-1)$ (donc milieu de $[AC]$) et J barycentre de $(B,-3)$, $(D,-1)$ donc de $(B,3)$, $(D,1)$. On obtient alors $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{IG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IJ}$ (*cf.* Figure 12).

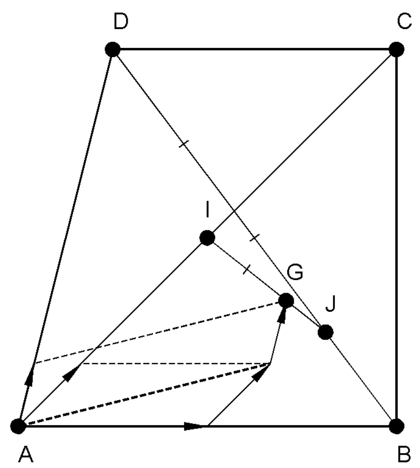

Figure 12. On a $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$. Avec le Théorème d'associativité, G est le barycentre de $(I,1)$, $(J,2)$ avec I milieu de $[AC]$ et J placé aux trois quarts de $[DB]$. On a $\overrightarrow{IG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IJ}$.

On peut aussi utiliser le Théorème d'associativité, en regroupant A, C et D ainsi :

$$
\begin{aligned}
& G \textit{ barycentre de } (A,-1),(B,-3),(C,-1),(D,-1), \\
\Leftrightarrow\ & G \textit{ barycentre de } (I,-3),(B,-3) \\
\Leftrightarrow\ & G \textit{ barycentre de } (I,1),(B,1),
\end{aligned}
$$

avec I barycentre de $(A,1)$, $(C,1)$, $(D,1)$ (donc centre de gravité de ABC). Le point G est donc le milieu de $[IG]$ (*cf.* Figure 13). On place I à l'intersection des médianes de ACD (les médianes d'un triangle sont concourantes en son centre de gravité).

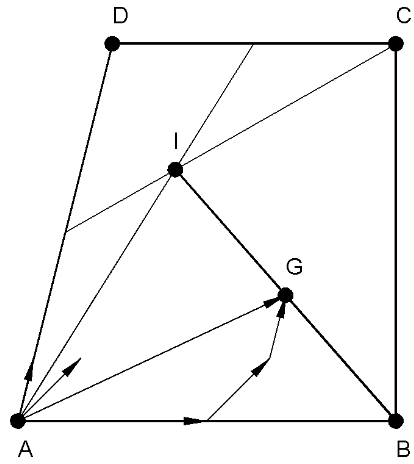

Figure 13. On a $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$. Avec le Théorème d'associativité, G est le milieu de $[IB]$ avec I centre de gravité du triangle ACD.

Exercice 3.3. Soit $ABCD$ un quadrilatère, soient I, J, K et L les milieux respectifs de chacun des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Soient M et N les milieux des diagonales $[AC]$ et $[BD]$. Montrer que les droites (MN), (JL) et (IK) sont concourantes, en utilisant le point O isobarycentre des points A, B, C et D.

Réponse. On a O isobarycentre des points A, B, C et D, on utilise le Théorème d'associativité, en regroupant de diverses manières A, B et C et D : A avec B et C avec D, puis A avec D et B avec C, puis A avec C et B avec D, on obtient :

$$\begin{aligned}
&O \text{ barycentre de } (A,1),(B,1),(C,1),(D,1)\\
\Leftrightarrow\ &O \text{ barycentre de } (I,2),(K,2) \Rightarrow\ O \text{ milieu de } [IJ]\\
\Leftrightarrow\ &O \text{ barycentre de } (J,2),(L,2) \Rightarrow\ O \text{ milieu de } [JL]\\
\Leftrightarrow\ &O \text{ barycentre de } (M,2),(N,2) \Rightarrow\ O \text{ milieu de } [MN].
\end{aligned}$$

Donc O appartient aux trois droites (MN), (JL) et (IK) qui sont donc concourantes en ce point (*cf.* Figure 14).

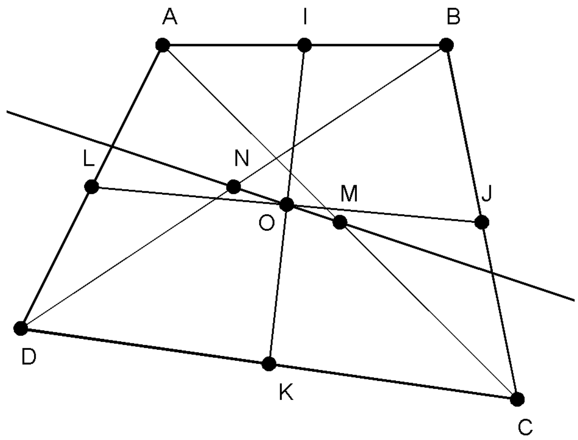

Figure 14. Soient I, J, K et L milieux respectifs de chacun des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ et M et N les milieux respectifs des diagonales $[AC]$ et $[BD]$, alors les droites (MN), (JL), (IK) sont concourantes en O, le centre de gravité du quadrilatère $ABCD$.

Exercice 3.4. Soit ABC un triangle, I est le point tel que $3\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$, K le symétrique de A par rapport à C et J le milieu de $[BC]$. Montrer que I, J et K sont alignés et représenter les points sur une figure.

Réponse. On résout de la manière suivante. On écrit les hypothèses en terme de barycentre. Puis on montre qu'un des points de I, J et K est barycentre des deux autres points, ce qui montrera que I, J et K sont alignés.

Les hypothèses s'écrivent en terme de barycentre de la manière suivante :

- I barycentre de $(A, 1)$, $(B, 2)$ car $3\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = 0$,
- K barycentre de $(A, -1)$, $(C, 2)$ car $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KC} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} - 2\overrightarrow{KC} = 0$,
- J barycentre de $(B, 1)$, $(C, 1)$.

Montrons que J est barycentre de I et K en combinant les lignes 1 et 2 ci-dessus de manière à éliminer le point A qui n'apparaît pas dans la définition de J.

Le barycentre de $(I, 3)$ $(K, 1)$ est le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(A, -1)$, $(C, 2)$ donc de $(B, 2)$, $(C, 2)$, c'est donc J.

Le point J est donc barycentre de $(I, 3)$ $(K, 1)$, en particulier I, J et K sont alignés.

Seconde méthode. On peut aussi partir directement de J et faire apparaître I et K. On a :

$$\begin{aligned}
& J \text{ barycentre de } (B,1),(C,1) \\
\Leftrightarrow\ & J \text{ barycentre de } (B,1),(C,1),(K,-\tfrac{1}{2}),(K,\tfrac{1}{2}) \\
\Leftrightarrow\ & J \text{ barycentre de } (B,1),(C,1),(A,\tfrac{1}{2}),(C,-1),(K,\tfrac{1}{2}) \\
\Leftrightarrow\ & J \text{ barycentre de } (B,1),(A,\tfrac{1}{2}),(K,\tfrac{1}{2}) \\
\Leftrightarrow\ & J \text{ barycentre de } (I,\tfrac{3}{2}),(K,\tfrac{1}{2}) \Leftrightarrow J \text{ barycentre de } (I,3)(K,1).
\end{aligned}$$

Troisième méthode. On peut aussi réécrire les hypothèses : on exprime B et C, qui interviennent dans la définition de J, comme barycentres de A, I et K. Comme I est barycentre de $(A, 1)$, $(B, 2)$, alors

$$\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{IB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{BI} = 0,$$

ainsi B est le barycentre de $(A, 1)$, $(I, -3)$.

De même, K est barycentre de $(A, -1)$, $(C, 2)$, on a donc la relation

$$-\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KC} = 0 \Leftrightarrow -\overrightarrow{KC} - \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{KC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CK} = 0,$$

et ainsi C est le barycentre de $(A, 1)$, $(K, 1)$.

On a alors

- B barycentre de $(A, 1)$, $(I, -3)$,
- C barycentre de $(A, 1)$, $(K, 1)$,
- J barycentre de $(B, 1)$, $(C, 1)$.

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} & J \textit{ barycentre de } (B,2),(C,2) \\ \Leftrightarrow\ & J \textit{ barycentre de } (A,-1),(I,3),(A,1),(K,1) \\ \Leftrightarrow\ & J \textit{ barycentre de } (I,3),(K,1). \end{aligned}$$

Suivant le type de problème, on pourra choisir une de ces méthodes, la première méthode utilisée étant ici bien adpatée. Les points A, B, C, I, J, K sont représentés à la Figure 15 suivante.

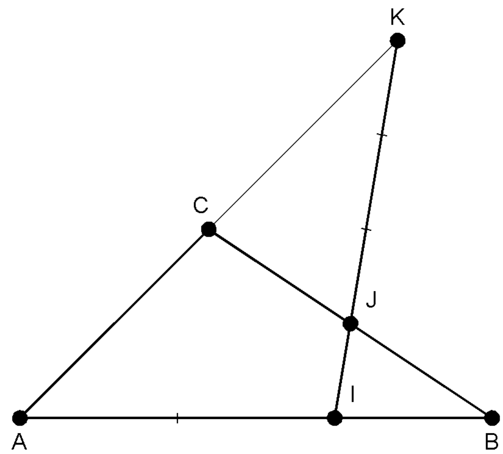

Figure 15. Soit I le point tel que $3\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$, K le symétrique de A par rapport à C et J le milieu de $[BC]$, alors les points I, J et K sont alignés.

Exercice 3.5. Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque, soit I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[CD]$, K le milieu de $[IC]$ et G le barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,2)$ et $(D,2)$.

a) Faire une figure.

b) Démontrer que G est sur les droites (DK) et (IJ).

Réponse.

a) On place le point G en utilisant le Théorème d'associativité (*cf.* Figure 16), le point G est barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,2)$ et $(D,2)$ et donc de $(I,2)$, $(J,4)$. On a alors $\overrightarrow{IG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IJ}$.

b) On écrit les hypothèses en terme de barycentre. Puis, on montre que G est barycentre de I et J (en fait, ceci a déjà été montré en a), puis de D et K ce qui montrera que G est sur les droites (DK) et (IJ).

On a :

• I barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$,

• J barycentre de $(C, 1)$, $(D, 1)$,

• K barycentre de $(I, 1)$, $(C, 1)$,

• G barycentre de $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 2)$ et $(D, 2)$.

On a alors, avec le Théorème d'associativité, en regroupant A avec B et C avec D :

$$\begin{aligned} & G \textit{ barycentre de } (A,1),(B,1),(C,2),(D,2) \\ \Leftrightarrow\ & G \textit{ barycentre de } (I,2),(J,4) \end{aligned}$$

puis en regroupant A et B puis I et C

$$\begin{aligned} & G \textit{ barycentre de } (A,1),(B,1),(C,2),(D,2) \\ \Leftrightarrow\ & G \textit{ barycentre de } (I,2),(C,2),(D,2), \\ \Leftrightarrow\ & G \textit{ barycentre de } (K,4),(D,2), \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat : D, K et G sont alignés ainsi que I, J et G.

On peut aussi remarquer, avec le Théorème d'associativité, que K est aussi barycentre de $(A, \frac{1}{2})$, $(B, \frac{1}{2})$, $(C, 1)$ et donc de $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 2)$. Donc en regroupant A, C et B ci-dessous, le Théorème d'associativité donne :

$$\begin{aligned} & G \textit{ barycentre de } (A,1),(B,1),(C,2),(D,2) \\ \Leftrightarrow\ & G \textit{ barycentre de } (K,4),(D,2). \end{aligned}$$

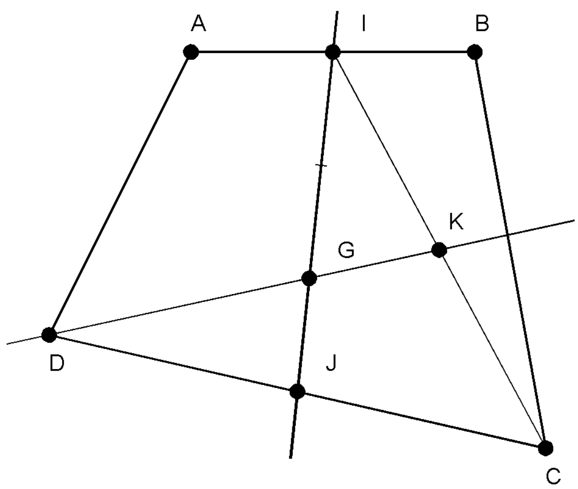

Figure 16. Soit I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[CD]$ et K est le milieu de $[IC]$ alors les droites (DK) et (IJ) sont concourantes en G barycentre de $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 2)$ et $(D, 2)$. On a $\overrightarrow{IG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DK}$.

Exercice 3.6. Soit ABC un triangle, A' le milieu de $[BC]$, I le milieu de $[AA']$ et P le point tel que $\overrightarrow{AP} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

a) Prouver que I est le barycentre des points $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$.

b) Exprimer P comme barycentre de A et B, puis démontrer que P, I et C sont alignés.

Réponse. On écrit les hypothèses en terme de barycentre.

• Le point A' est barycentre de $(B, 1)$, $(C, 1)$,

• le point I est barycentre de $(A, 1)$, $(A', 1)$,

• le point P est barycentre de points $(A, 2)$, $(B, 1)$ car $3\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 0$.

a) Donc, avec le Théorème d'associativité, I est le barycentre des points $(A, 1)$, $(A', 1)$ donc des points $(A, 1)$, $(B, 1/2)$, $(C, 1/2)$. On en conclut, avec la propriété d'homogénéïté du barycentre, que I est le barycentre des points $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$.

b) On a montré ci dessus que le point P est barycentre de points $(A, 2)$, $(B, 1)$. Montrons que P est barycentre de I et C et donc que P, I et C sont alignés.

Le point P est barycentre des points $(A, 2)$, $(B, 1)$ donc de $(A, 2)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$, $(C, -1)$ et donc de $(I, 4)$, $(C, -1)$. Les points P, I et C sont donc alignés.

Seconde manière. Montrons que I est barycentre de P et C et donc que P, I et C sont alignés.

On peut aussi écrire que I est barycentre des points $(A, 2)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$ donc de $(P, 3)$, $(C, 1)$ et les points P, I et C sont donc alignés.

Troisième manière. Montrons que C est barycentre de I et P et donc que P, I et C sont alignés.

Enfin, on peut ausi écrire que C est barycentre des points $(C, 1)$ donc de $(A, 2)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$, $(A, -2)$, $(B, -1)$ donc de $(I, 4)$, $(P, -3)$ et les points P, I et C donc donc alignés.

On présente ci-dessous trois façons de montrer que le point P est barycentre des points $(A, 2)$, $(B, 1)$, dont, pour mémoire, celle vue ci-dessus. *b*).

Première façon. (*cf.* ci-dessus) On a

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 0.$$

Seconde façon. Le point P est barycentre des points $(A, 2)$, $(B, 1)$ car

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AO} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{3}.$$

Troisième façon. On peut aussi écrire que si P barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$ alors pour tout point O du plan on a

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}}{3} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AB}}{3}.$$

On présente ci-dessous trois façons de montrer que P, I et C sont alignés. Pour montrer, par exemple, que P est barycentre de I et C, on partira de I et C au lieu de de P comme précédemment.

Première manière. Montrons que P est barycentre de I et C.

On a, I barycentre des points $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$ et C barycentre de $(C, -1)$ (le barycentre d'un point affecté d'un poids non nul est lui même) donc, avec le Théorème d'associativité, le barycentre des points $(I, 4)$, $(C, -1)$ est le barycentre des points $(A, 2)$, $(B, 1)$, c'est donc le point P. Les points P, I et C sont donc alignés.

Seconde manière. Montrons que I est barycentre de P et C.

On a P barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$ et C barycentre de $(C, 1)$ donc, avec le Théorème d'associativité, le barycentre de $(P, 3)$, $(C, 1)$ est le barycentre des points $(A, 2)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$ c'est donc le point I. Les points P, I et C sont donc alignés.

Troisième manière. Montrons que C est barycentre de I et P.

On a P barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$ et I est barycentre des points $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$ donc, avec le Théorème d'associativité, le barycentre de $(P, 3)$, $(I, -4)$ est le barycentre de $(C, -1)$ c'est donc le point C. Les points P, I et C sont donc alignés.

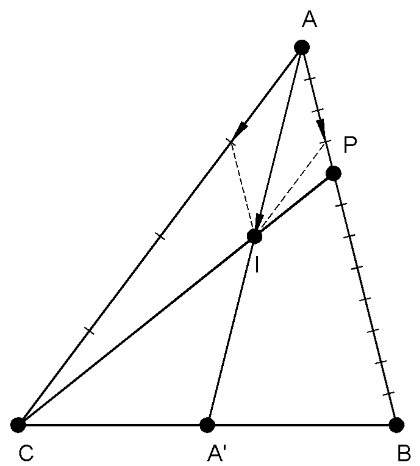

Figure 17. Soit P le point situé au tiers de $[AB]$, I le milieu de $[AA']$, alors P, I et C sont alignés. On a aussi I barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$ et donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Exercice 3.7. Soit $ABCD$ un quadrilatère, soit I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[CD]$ et soit K le point tel que $\overrightarrow{IK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IJ}$. Soit L le milieu de $[IC]$. Faire une figure et démontrer que D, K et L sont alignés.

Réponse. On écrit les hypothèses en terme de barycentre. Puis on montre que, par exemple, K est barycentre de D et L, ce qui montrera que D, K et L sont alignés.

On a :

- I barycentre de $(A, 1)$, $(B, 1)$,
- J barycentre de $(C, 1)$, $(D, 1)$,
- K barycentre de $(I, 1)$, $(J, 2)$ car $3\overrightarrow{IK} = 2\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{IK} + 2\overrightarrow{KJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{KI} + 2\overrightarrow{KJ} = 0$,
- L barycentre de $(I, 1)$, $(C, 1)$.

On a alors, avec le Théorème d'associativité, en regroupant I avec C :

$$\begin{aligned} & K \textit{ barycentre de } (I,1),(J,2) \\ \Leftrightarrow\ & K \textit{ barycentre de } (I,1),(C,1),(D,1) \\ \Leftrightarrow\ & K \textit{ barycentre de } (L,2),(D,1). \end{aligned}$$

Donc K est barycentre de $(L, 2)$, $(D, 1)$ et D, K, L sont alignés.

On peut aussi partir de L : on a, avec le Théorème d'associativité, en regroupant I avec C :

$$\begin{aligned} & L \textit{ barycentre de } (I,1),(C,1) \\ \Leftrightarrow\ & L \textit{ barycentre de } (I,1),(C,1),(D,1),(D,-1) \\ \Leftrightarrow\ & L \textit{ barycentre de } (I,1),(J,2),(D,-1) \\ \Leftrightarrow\ & L \textit{ barycentre de } (K,3),(D,-1). \end{aligned}$$

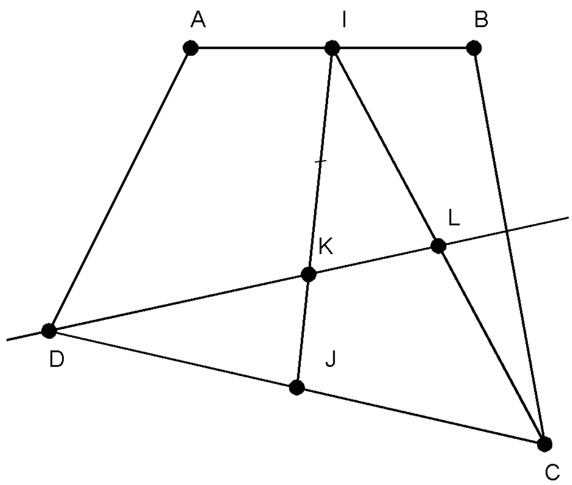

Figure 18. Soit I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[CD]$ et K tel que $\overrightarrow{IK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IJ}$, alors les points D, K et L sont alignés.

Exercice 3.8. Soit ABC un triangle, soit I le symétrique de B par rapport à C et K le point tel que

$$\overrightarrow{KA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KB}.$$

Soit G le barycentre des points $(A, 3)$, $(B, -1)$ et $(C, 2)$. Faire une figure puis démontrer que G est le milieu de $[KC]$.

Réponse. On écrit les hypothèses en terme de barycentre. On notera L le milieu de $[KC]$ (facultatif). On a :

I barycentre de $(B, 1)$, $(C, -2)$ car $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC} \Leftrightarrow \overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = 0$,

K barycentre de $(A, 3)$, $(B, -1)$ car $\overrightarrow{KA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{KA} - 2\overrightarrow{KB} = 0$,

G barycentre de $(A, 3)$, $(B, -1)$ et $(C, 2)$,

L barycentre de $(K, 1)$, $(C, 1)$.

Pour la construction de la Figure 19, on place I avec la relation

$$\overrightarrow{BI} = \frac{\overrightarrow{BB} - 2\overrightarrow{BC}}{-1} = 2\overrightarrow{BC}.$$

Ensuite on a K barycentre de $(A, 3)$, $(B, -1)$ donc

$$\overrightarrow{AK} = \frac{3\overrightarrow{AA} - \overrightarrow{AB}}{2} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

et on place G avec la relation

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3\overrightarrow{AA} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{3 - 1 + 2} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Ensuite, avec le Théorème d'associativité, en regroupant A avec B on a G barycentre de $(A, 3)$, $(B, -1)$ et $(C, 2)$, donc, G barycentre de $(K, 2)$, $(C, 2)$, ce qui montre que G est le milieu de $[KC]$.

On peut aussi partir de L le milieu de $[KC]$. Le point L est donc le barycentre de $(K, 1)$, $(C, 1)$. Avec le Théorème d'associativité, L est le barycentre de $(A, \frac{3}{2})$, $(B, -\frac{1}{2})$,$(C, 1)$ donc de $(A, 3)$, $(B, -1)$ et $(C, 2)$, on a donc $L = G$ (*cf.* Figure 19).

On observe sur la Figure 19 que G est placé sur la droite (AI), aux trois quarts de $[AI]$, vérifions le. On a G barycentre de $(A, 3)$, $(B, -1)$ et $(C, 2)$, donc, en regroupant B et C, G est le barycentre de $(A, 3)$, $(I, 1)$, ce qui montre le résulat.

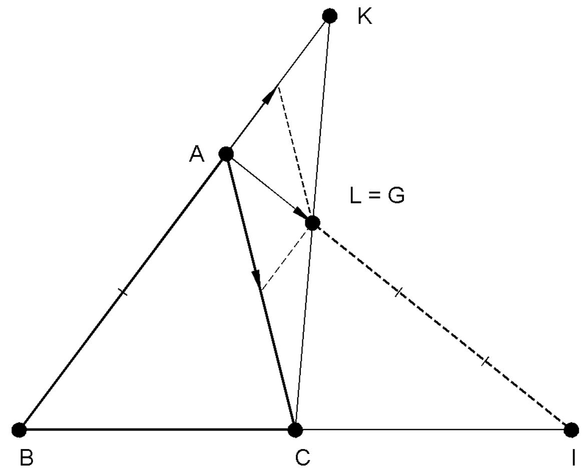

Figure 19. On a $\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Soit I le symétrique de B par rapport à C, K le point tel que $\overrightarrow{KA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KB}$, alors G, le barycentre des points $(A, 3)$, $(B, -1)$ et $(C, 2)$, est le milieu L de $[KC]$, G est aussi placé aux trois-quarts de $[AI]$.

Exercice 3.9. Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que $AB = 4cm$ et $CD = 6cm$, soit I le point tel que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BI}$, E le milieu de $[DC]$. Soit G le barycentre des points $(A, -1)$, $(B, 3)$, $(C, 1)$ et $(D, 1)$. Faire une figure puis démontrer que G est le milieu de $[IE]$.

Réponse. Pour la construction de la Figure, on place I avec la relation $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et on place G avec la relation :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{-\overrightarrow{AA} + 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}}{-1 + 3 + 1 + 1} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.$$

Ensuite, on écrit les hypothèses en terme de barycentre. On notera L le milieu de $[IE]$ (facultatif).

- I barycentre de $(A, 1)$, $(B, -3)$ car $2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = 0$,
- E barycentre de $(C, 1)$, $(D, 1)$,
- G barycentre de $(A, -1)$, $(B, 3)$, $(C, 1)$, $(D, 1)$,
- L barycentre de $(E, 1)$, $(I, 1)$.

On a G barycentre de $(A, -1)$, $(B, 3)$, $(C, 1)$, $(D, 1)$, donc avec le Théorème d'associativité, en regroupant A avec B et C avec D, on obtient que G est le barycentre de $(I, 2)$, $(E, 2)$ et donc le milieu de $[IE]$.

Seconde manière. On peut aussi partir de L le milieu de $[IE]$. Le point L est donc le barycentre de $(E, 1)$, $(I, 1)$. Avec le Théorème d'associativité, L est le barycentre de $(C, \frac{1}{2})$, $(D, \frac{1}{2})$ $(A, -\frac{1}{2})$, $(B, \frac{3}{2})$ donc de $(A, -1)$, $(B, 3)$, $(C, 1)$, $(D, 1)$, on a donc $L = G$ (*cf.* Figure 20).

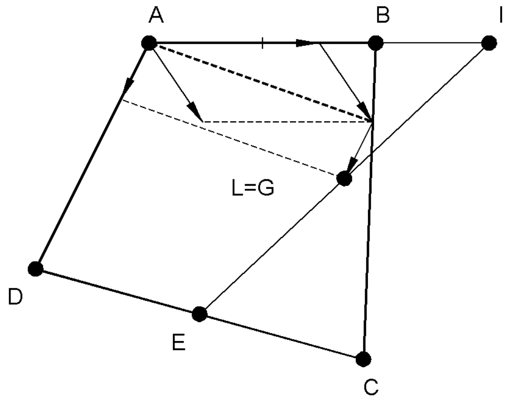

Figure 20. On a $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$. Soit E le milieu de $[DC]$, I le point tel que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BI}$, alors G, barycentre des points $(A, -1)$, $(B, 3)$, $(C, 1)$ et $(D, 1)$, est le milieu L de $[IE]$.

Exercice 3.10. Soit ABC un triangle, E et F deux points définis par

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{AF}$$

et soit H le barycentre des points $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$.

a) Démontrer que les droites (BF) et (CE) sont sécantes en H.

b) Soit A' le milieu de $[BC]$. Démontrer que H est le milieu de $[AA']$.

Réponse. On écrit les hypothèses en terme de barycentre.

On a :

E barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$ car $3\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} = 0$,

F barycentre de $(A, 2)$, $(C, 1)$ car $\overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{AF} \Leftrightarrow \overrightarrow{FC} + 2\overrightarrow{FA} = 0$,

H barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$,

A' barycentre de $(B, 1)$, $(C, 1)$.

a) On montre que H est barycentre de C, E et donc que E, C, H sont alignés puis que H est barycentre de B, F et donc que B, F, K sont alignés, ce qui montrera le résultat.

On a alors, avec le Théorème d'associativité, en regroupant A avec B ou A avec C :

$$\begin{aligned} & H \textit{ barycentre de } (A,2),(B,1),(C,1) \\ \Leftrightarrow\ & H \textit{ barycentre de } (E,3),(C,1) \\ \Leftrightarrow\ & H \textit{ barycentre de } (F,3),(B,1). \end{aligned}$$

Donc, le point H est barycentre de $(E,3)$, $(C,1)$, il est donc sur la droite (CE). Le point H est aussi barycentre de $(F,3)$, $(B,1)$, ce point est donc aussi sur la droite (BF). On en conclut que les droites (BF) et (CE) sont sécantes en H (*cf.* Figure 21).

b) On a, avec le Théorème d'associativité, en regroupant B avec C :

$$\begin{aligned} & H \textit{ barycentre de } (A,2),(B,1),(C,1) \\ \Leftrightarrow\ & H \textit{ barycentre de } (A,2),(A',2), \end{aligned}$$

donc H est le milieu de $[AA']$ (*cf.* Figure 21).

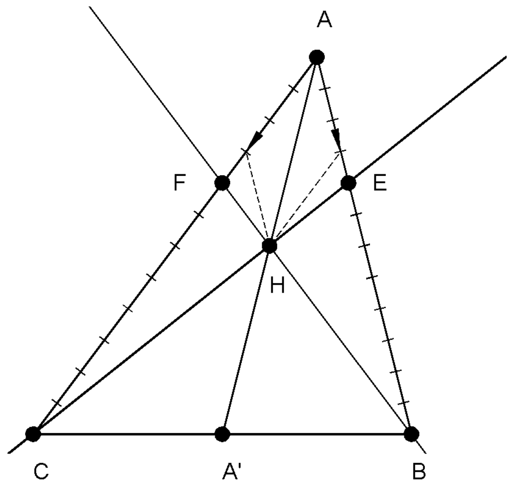

Figure 21. Soit E le point placé au premier tiers de $[AB]$, F le point placé au premier tiers de $[AC]$, alors les droites (BF) et (CE) sont sécantes en H, le milieu de $[AA']$, avec A' le milieu de $[BC]$. On a aussi $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.