

Nombres complexes

1. Définition des nombres complexes, opérations.

1.1. Introduction.

Dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'admet pas de solutions. Posons, formellement, i «un nombre» solution formelle de cette équation, c'est à dire tel que $i^2 = -1$ et effectuons les opérations usuelles avec ce nombre comme si celui-ci était un nombre réel. On a alors $i^2 = -1$ et $(-i)^2 = (-1)^2 i^2 = -1$ et l'équation $x^2 + 1 = 0$ admet alors 2 solutions i et $-i$.

Utilisons ce nombre pour résoudre, formellement, l'équation $x^2 + 2x + 5 = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = 2^2 - 4 \times 5 = -16$. Cette équation n'admet donc pas de solution réelle. On a, formellement :

$$(x + 1)^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = -4 = (\pm 2i)^2 \Leftrightarrow x = -1 \pm 2i.$$

Réciproquement $(-1 + 2i)$ et $(-1 - 2i)$ sont bien solutions de l'équation :

$$\begin{aligned} (-1 + 2i)^2 + 2(-1 + 2i) + 5 &= (-1)^2 - 4i + (2i)^2 - 2 + 4i + 5 \\ &= 1 - 4i - 4 - 2 + 4i + 5 = 0 \\ (-1 - 2i)^2 + 2(-1 - 2i) + 5 &= (-1)^2 + 4i + (-2i)^2 - 2 - 4i + 5 \\ &= 1 + 4i - 4 - 2 - 4i + 5 = 0. \end{aligned}$$

1.2. Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Il existe plusieurs manières de construire $\mathbb{C}$. Nous partirons de la construction suivante. Posons $\mathbb{C}$ l'ensemble des couples de $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition $+$ et de la multiplication $\times$ suivantes :

$$\begin{aligned} (a, b) + (a', b') &= (a + a', b + b') \\ (a, b) \times (a', b') &= (aa' - bb', ab' + ba') \end{aligned}$$

Notons, $\mathbf{a}$ l'élément $(a, 0)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et i l'élément $(0, 1)$. Tout couple (a, b) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} (a, b) &= (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \times (0, 1) = (a, 0) + (0, 1) \times (b, 0) \\ &= \mathbf{a} + \mathbf{b} \times i = \mathbf{a} + i \times \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Désormais, on écrira a pour $(a, 0)$, b pour $(b, 0)$ et on omettra le symbole $\times$ pour la multiplication. Les nombres de $\mathbb{C}$ sont donc de la forme

$$z = a + ib, (a, b) \in \mathbb{R}^2. \quad (1)$$

1. DEFINITION DES NOMBRES COMPLEXES, OPERATIONS

Avec cette notation, la définition de $\mathbb{C}$ devient la suivante.

Définition 1.1. On définit $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres complexes de la forme $z = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}$, ce qui s'écrit encore :

$$\mathbb{C} = \{z, z = a + ib, (a, b) \in \mathbb{R}\}$$

On munit $\mathbb{C}$ de l'addition

$$z + z' = a + a' + i(b + b'), \forall z = a + ib, (a, b) \in \mathbb{R}, \forall z' = a' + ib', (a', b') \in \mathbb{R} \quad (2)$$

et de la multiplication :

$$zz' = aa' - bb' + i(ab' + a'b), \forall z = a + ib, (a, b) \in \mathbb{R}, \forall z' = a' + ib', (a', b') \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Remarque 1.1. Dans la Définition 1.1, lorsque z et z' sont réels (donc $b = b' = 0$) on retrouve l'addition et la multiplication usuelle des nombres réels.

Soit $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et soit $z' = a' + ib' \in \mathbb{C}$ avec $(a', b') \in \mathbb{R}^2$. Si $z = z'$, on a donc $(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$. Ainsi l'écriture, $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est unique. On a alors la définition suivante.

Définition 1.2. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. L'écriture

$$z = a + ib, (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

est appelée la forme algébrique (ou cartésienne) du nombre z . Cette écriture est unique.

Définition 1.3. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Le nombre a s'appelle la partie réelle de z et b sa partie imaginaire. On note $\mathcal{R}e(z)$ la partie réelle de z et $\mathcal{I}m(z)$ la partie réelle de z . On a donc

$$a = \mathcal{R}e(z), b = \mathcal{I}m(z) \text{ et } z = \mathcal{R}e(z) + i\mathcal{I}m(z).$$

De l'unicité de l'écriture algébrique d'un nombre complexe, on déduit la Propriété suivante, utile en pratique.

Propriété 1.1. Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :

$$z = z' \Leftrightarrow \mathcal{R}e(z) = \mathcal{R}e(z') \text{ et } \mathcal{I}m(z) = \mathcal{I}m(z').$$

Propriété 1.2. L'ensemble $\mathbb{C}$ muni des opérations $+$ et $\times$, on note $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif, c'est à dire qu'il vérifie les propriétés suivantes.

1. DEFINITION DES NOMBRES COMPLEXES, OPERATIONS

L'addition est associative, on pourra donc enlever les parenthèses dans les sommes :

$$z + (z' + z'') = (z + z') + z'' = z + z' + z'', \forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3. \quad (4)$$

Le nombre 0 est élément neutre pour l'addition :

$$z + 0 = 0 + z = z, \forall z \in \mathbb{C}. \quad (5)$$

Tout nombre complexe $z = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}$ admet un opposé z' tel que $z + z' = z' + z = 0$. On le note $-z$ et il est donné par

$$-z = -a - ib. \quad (6)$$

L'addition est commutative :

$$z + z' = z' + z, \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2. \quad (7)$$

La multiplication est associative, on pourra donc enlever les parenthèses dans les produits :

$$z(z'z'') = (zz')z'' = zz'z'', \forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3. \quad (8)$$

Le nombre 1 est élément neutre pour l'addition :

$$z \times 1 = 1 \times z = z, \forall z \in \mathbb{C}. \quad (9)$$

Tout nombre complexe non nul $z = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}$ admet un inverse z' tel que $zz' = z'z = 1$, on le note z^{-1} ou $\frac{1}{z}$ et il est donné par

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}. \quad (10)$$

La multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$$z(z' + z'') = zz' + zz'', (z' + z'')z = z'z + z''z, \forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3. \quad (11)$$

La multiplication est commutative :

$$zz' = z'z, \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2. \quad (12)$$

Preuve de la Propriété 1.2. Admis. On obtient la preuve en utilisant la définition de $\mathbb{C}$.

1.3. Calculs sur $\mathbb{C}$.

- D'après la définition de $(\mathbb{C}, +, \times)$, on a la relation

$$i^2 = (0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0) = -1. \quad (13)$$

- D'après la Propriété 1.2, $(\mathbb{C}, +, \times)$ étant un corps commutatif, l'opposé d'un nombre complexe est unique, l'inverse d'un nombre complexe non nul est unique. On pourra vérifier ces propriétés à titre d'exercice.

- Pour des calculs faisant intervenir l'opposé d'un nombre complexe, on écrira pour deux nombres complexes z et z'

$$z' + (-z) = z' - z.$$

et pour un inverse :

$$z' z^{-1} = z' \frac{1}{z} = \frac{z'}{z}.$$

- On a la relation (cela provient de l'existence d'un inverse, avec la Propriété 1.2) :

$$z z' = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z' = 0. \quad (14)$$

- D'après la Propriété 1.2, on pourra effectuer sur $\mathbb{C}$ les opérations arithmétiques usuelles (addition, division, multiplication, soustraction) de la même manière que sur $\mathbb{R}$, en utilisant la relation $i^2 = -1$, le cas échéant. Nous donnons quelques exemples ci-dessous.

- On retrouve ainsi, en particulier les formules d'addition et de multiplication :

$$\begin{aligned} (a + ib) + (a' + ib') &= a + ib + a' + ib' = a + a' + i(b + b') \\ \text{et } (a + ib)(a' + ib') &= (a + ib)a' + (a + ib)ib' = aa' + iba' + aib' + ibib' \\ &= aa' - bb' + i(ab' + a'b). \end{aligned}$$

- Les égalités remarquables suivantes restent valables :

$$(z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2, \quad (z - z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2, \quad (z + z')(z - z') = z^2 - z'^2.$$

- On a aussi l'égalité remarquable suivante :

$$(z + iz')(z - iz') = z^2 + z'^2.$$

- Pour des calculs faisant intervenir un inverse, on pourra écrire :

$$\begin{aligned} \frac{a + ib}{a' + ib'} &= \frac{(a + ib)(a' - ib')}{(a' + ib')(a' - ib')} = \frac{aa' + bb' + i(-ab' + a'b)}{a'^2 + b'^2} \\ &= \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + i \frac{-ab' + a'b}{a'^2 + b'^2}. \end{aligned}$$

1. DEFINITION DES NOMBRES COMPLEXES, OPERATIONS

- Les règles usuelles s'applique, comme la règle du dénominateur commun :

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_3}{z_4} = \frac{z_1 z_4 + z_2 z_3}{z_2 z_4}.$$

- Les puissances entières ont les mêmes propriétés, on pose par convention $z^0 = 1$:

$$z^m z^n = z^{m+n}, \frac{z^m}{z^n} = z^{m-n}, z \neq 0, (z^m)^n = z^{mn}, \forall z \in \mathbb{C}, \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2,$$

$$(zz')^n = z^n z'^n, \left(\frac{z}{z'}\right)^n = \frac{z^n}{z'^n} \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.4. Conjugué et module d'un nombre complexe.

On définit ci-dessous le conjugué et le module d'un nombre complexe.

Définition 1.4. Soit $z = a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on note $\bar{z}$ le nombre conjugué de z défini par

$$\bar{z} = a - ib$$

et $|z|$ le module de z défini par

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Propriété 1.3. Soit $z \in \mathbb{C}$ on a :

$$\bar{\bar{z}} = z, z + \bar{z} = 2\text{Re}(z), z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z), z\bar{z} = |z|^2, \overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1} \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ on a :

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}, \overline{zz'} = \bar{z} \bar{z'}, \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}},$$

et

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|, |zz'| = |z||z'|, \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}.$$

Preuve de la Propriété 1.3. On admet l'inégalité triangulaire $|z + z'| \leq |z| + |z'|$. Les autres propriétés sont une conséquence de la Définition 1.4 et des propriétés calculatoires des nombres complexes.

Remarque 1.2. Lorsque qu'un nombre complexe non nul a sa partie réelle nulle, on dit qu'il est imaginaire pur. Un nombre complexe imaginaire pur est de la forme $z = bi$ avec $b \in \mathbb{R}$. Par exemple $z = 0$, $z = i$, $z = 2i$ sont imaginaires purs. On a l'équivalence $\bar{z} = -z \Leftrightarrow z$ est imaginaire pur car

$$\bar{z} = -z \Leftrightarrow z + \bar{z} = z - z = 0 \Leftrightarrow 2\text{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0.$$

1. DEFINITION DES NOMBRES COMPLEXES, OPERATIONS

Un nombre complexe z est réel lorsque sa partie imaginaire est nulle. Il est donc de la forme $z = a$, $a \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ car

$$\bar{z} = z \Leftrightarrow z + \bar{z} = 2z \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(z) = 2z \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

Remarque 1.3. Pour $z \in \mathbb{R}$, le module de z est la valeur absolue de $|z|$. Pour $z = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}$, $|z|$ est la norme euclidienne du vecteur de coordonnées (a, b) .

Exemple 1.1. Mise sous forme algébrique du quotient de deux complexes. On multiplie en haut et en bas par le conjugué du dénominateur (sauf si c'est un nombre un réel).

a) Inverse de $z = 1 - 2i$:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{1 - 2i} = \frac{1 + 2i}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{1 + 2i}{1^2 - (2i)^2} = \frac{1 + 2i}{1^2 + 2^2} = \frac{1 + 2i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i.$$

b) Quotient :

$$z = \frac{1 - 5i}{1 - i},$$

on a

$$z = \frac{1 - 5i}{1 - i} = \frac{(1 - 5i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{1 + i - 5i - 5i^2}{1^2 + 1^2} = \frac{6 - 4i}{2} = \frac{6}{2} - \frac{4i}{2} = 3 - 2i.$$

Exemple 1.2. Résolution d'équation du premier degré. Résolution de

$$(1 + i)z + 1 - 5i = -iz + 4 - 4i.$$

On a :

$$\begin{aligned} (1 + i)z + 1 - 5i &= -iz + 4 - 4i \Leftrightarrow (1 + 2i)z = 3 + i \\ \Leftrightarrow z &= \frac{3 + i}{1 + 2i} = \frac{(3 + i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{3 - 6i + i - 2i^2}{1^2 + 2^2} = \frac{5 - 5i}{5} = 1 - i. \end{aligned}$$

1.5. Résolution de l'équation du second degré à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Propriété 1.4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < 0$, alors l'équation $z^2 = \alpha$, $z \in \mathbb{C}$, admet uniquement deux solutions qui sont

$$z = \pm i\sqrt{-\alpha}.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, alors l'équation $z^2 = \alpha$, $z \in \mathbb{C}$, admet uniquement deux solutions qui sont

$$z = \pm\sqrt{\alpha}.$$

1. DEFINITION DES NOMBRES COMPLEXES, OPERATIONS

L'équation $z^2 = 0$, $z \in \mathbb{C}$, admet 0 comme unique solution.

Preuve de la Propriété 1.4. Montrons le premier point, les autres points se montrant de manière similaire. Posons $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a donc $a^2 + 2iab - b^2 = \alpha$. Donc $2iab = 0$ et $a^2 - b^2 = \alpha$. On a donc $a = 0$ ou $b = 0$. Si $b = 0$, alors $a^2 = \alpha < 0$ et l'on n'a pas de solution. Si $a = 0$, on a alors $-b^2 = \alpha$ et donc $b^2 = -\alpha > 0$. On obtient finalement les deux solutions

$$a = 0, b = \pm\sqrt{-\alpha} \Leftrightarrow z = \pm i\sqrt{-\alpha}.$$

Propriété 1.5. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$, $z \in \mathbb{C}$, admet les solutions suivantes. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$, alors

si $\Delta > 0$ l'équation a deux solutions réelles :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},$$

- si $\Delta = 0$, l'équation admet une racine $z_1 = -\frac{b}{2a}$,

- si $\Delta < 0$, l'équation admet deux racines complexes :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}, z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Preuve de la Propriété 1.5. C'est une conséquence de la Propriété 1.4 et de la relation suivante (les identités remarquables sont conservées sur $\mathbb{C}$) :

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Exemple 1.3. Résolution d'équation du second degré. Résolution de

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

On a $\Delta = 1^2 - 4 = -3$. Donc

$$z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

2. Représentation géométrique d'un nombre complexe.

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

2.1. Affixe d'un point du plan et affixe d'un vecteur.

- Au nombre complexe $z = a + ib$, avec a, b réels, on associe le point M de coordonnées (a, b) (cf. Figure 1.1). Le point M est appelé image du nombre complexe z et z l'affixe du point M . On a donc $\overrightarrow{OM} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$. On remarque que

$$|z| = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

- Au nombre complexe $z = a + ib$, avec a, b réels, on associe le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (a, b) . Le vecteur $\vec{u}$ est appelé image vectorielle du nombre complexe z et z l'affixe du vecteur $\vec{u}$. On a donc $\vec{u} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$. On remarque que

$$|z| = \|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Exemple 2.1. L'origine O de coordonnées $(0, 0)$ a pour affixe $z_O = 0$, le point I de coordonnées $(1, 0)$ a pour affixe $z_I = 1$, le point J point de coordonnées $(0, 1)$ a pour affixe $z_J = i$. L'image de $\mathbb{R}$ est l'axe $(O, \vec{e}_1)$ et l'image de $i \times \mathbb{R}$ est l'axe $(O, \vec{e}_2)$.

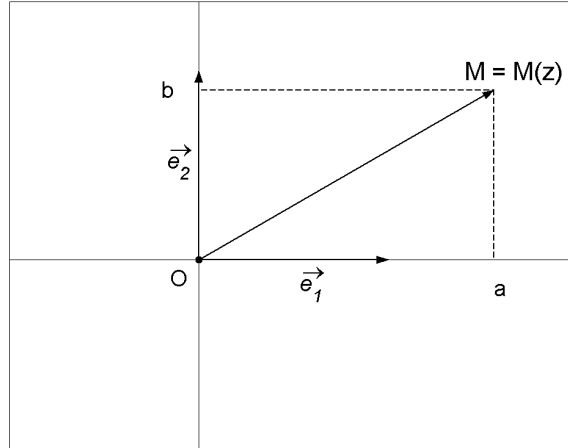


Figure 1.1. Le point $M = M(z)$ image de $z_M = a + ib$. On a $z_{\overrightarrow{OM}} = z_M$.

Définition 2.1. On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Soit $z \in \mathbb{C}$, le point M de coordonnées $(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$ s'appelle l'image de z , on le notera aussi $M(z)$. Réciproquement, soit M un point de coordonnées (a, b) , le nombre $z = a + ib$ s'appelle l'affixe de M . On le notera aussi z_M .

2. REPRESENTATION GEOMETRIQUE D'UN NOMBRES COMPLEXE

Soit $z \in \mathbb{C}$, le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$ s'appelle l'image vectorielle z . Réciproquement, soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées (a, b) , le nombre $z = a + ib$ s'appelle l'afixe de $\vec{u}$. On le notera aussi $z_{\vec{u}}$.

On a en particulier

$$z_{\overrightarrow{OM}} = z_M.$$

L'axe $(O, \vec{e}_1)$ s'appelle axe des réels et l'axe $(O, \vec{e}_2)$ l'axe des imaginaires purs.

Le plan muni de cette représentation par les nombres complexes est aussi appelé plan complexe. On dit que le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Le point M et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ d'afixe $a + ib$ sont représentés à la Figure 1.1 ci-dessus. Avec la Définition 2.1, les propriétés de normes vues ci-dessus dans l'introduction du Paragraphe 2.1 s'écrivent comme suit.

Propriété 2.1. Soit M un point du plan de coordonnées (a, b) alors :

$$|z_M| = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (a)$$

Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées (a, b) alors

$$|z_{\vec{u}}| = \|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (b)$$

Ainsi, pour un point M quelconque la longueur OM est donnée par $|z_M|$.

Exemple 2.2. Soit M un point du plan tel que $z_M = 2 - i$ alors

$$OM = |z| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}.$$

Propriété 2.2. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, α et β deux réels, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$z_{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}} = \alpha z_{\vec{u}} + \beta z_{\vec{v}}. \quad (a)$$

Soient A et B deux points du plan, alors

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A, \quad (b)$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = |z_{\overrightarrow{AB}}| = |z_B - z_A|. \quad (c)$$

Preuve de la Propriété 2.2. Commençons par montrer la relation (a) de la Propriété 2.2. Soient (u_1, u_2) et (v_1, v_2) les coordonnées respectives des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Le vecteur

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

2. REPRESENTATION GEOMETRIQUE D'UN NOMBRES COMPLEXE

a donc pour coordonnées

$$\alpha(u_1, u_2) + \beta(v_1, v_2) = (\alpha u_1 + \beta v_1, \alpha u_2 + \beta v_2),$$

il a donc pour affixe

$$z = (\alpha u_1 + \beta v_1) + i(\alpha u_2 + \beta v_2) = \alpha(u_1 + iu_2) + \beta(v_1 + iv_2) = \alpha z_{\vec{u}} + \beta z_{\vec{v}},$$

ce qui donne le résultat :

$$z_{\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}} = \alpha z_{\vec{u}} + \beta z_{\vec{v}}.$$

On obtient la relation (b) de la Propriété 2.2 en utilisant la relation (a) et la relation $z_{\overrightarrow{OM}} = z_M$ pour tout point du plan :

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}} = z_{-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}} = -z_{\overrightarrow{OA}} + z_{\overrightarrow{OB}} = z_B - z_A.$$

On pourra aussi remarquer que $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A)$, on a donc $z_{\overrightarrow{AB}} = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A) = x_B + iy_B - (x_A + iy_A) = z_B - z_A$.

Enfin, avec la relation (b) donne la relation (c) de la Propriété 2.2 :

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A \Rightarrow |z_{\overrightarrow{AB}}| = |z_B - z_A| \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|. \quad \square$$

On a montré que :

- Si z et z' sont associés respectivement à deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$, alors pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha z + \beta z'$ est associé au vecteur $\alpha \vec{u} + \beta \vec{u}'$.
- Si A et B sont deux points du plan, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$ qui est donc la différence entre l'affixe z_B de son extrémité B et l'affixe z_A de son origine. La longueur AB est donnée par $|z_B - z_A|$.

Exemple 2.3. Soient A et B deux points du plan tels que $z_A = 3 - 5i$ et $z_B = 1 + i$, alors

$$AB = |z_B - z_A| = |-2 + 6i| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

On a la relation suivante entre l'affixe du barycentre d'un système (A, a) , (B, b) , (C, c) et les affixes respectifs des points A , B et C .

Propriété 2.3. Soient A, B, C , trois points du plan et soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $a + b + c \neq 0$, alors le barycentre pondéré G du système (A, a) , (B, b) , (C, c) a pour affixe

$$z_G = \frac{az_A + bz_B + cz_C}{a + b + c}. \quad (a)$$

En particulier le milieu I de A et B a pour affixe

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} \quad (b)$$

2. REPRESENTATION GEOMETRIQUE D'UN NOMBRES COMPLEXE

et le barycentre G du triangle A, B, C a pour affixe

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}. \quad (c)$$

Preuve de la Propriété 2.3. (a) On a par définition

$$\overrightarrow{OG} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a + b + c} = \frac{a\overrightarrow{OA}}{a + b + c} + \frac{b\overrightarrow{OB}}{a + b + c} + \frac{c\overrightarrow{OC}}{a + b + c}.$$

d'où avec la relation (a) de la Propriété 2.2 :

$$z_G = z_{\overrightarrow{OG}} = \frac{az_{\overrightarrow{OA}}}{a + b + c} + \frac{bz_{\overrightarrow{OB}}}{a + b + c} + \frac{cz_{\overrightarrow{OC}}}{a + b + c} = \frac{az_A + bz_B + cz_C}{a + b + c}.$$

Les points (b) et (c) s'obtiennent à partir de (a) et utilisant les pondérations $(a, b, c) = (1, 1, 0)$ pour (b) et $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ pour (c). $\square$

La relation (c) de la Propriété 2.3 exprime que l'affixe du milieu d'un segment est la demi-somme des affixes de ses extrémités.

On a les conditions de colinéarité et d'orthogonalité de 2 vecteurs non nuls suivantes.

Propriété 2.4. Soient $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z et z' , alors

$$\vec{u} \text{ et } \vec{u}' \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, z' = \lambda z \Leftrightarrow \frac{z'}{z} \in \mathbb{R}^*.$$

et

$$\vec{u} \text{ et } \vec{u}' \text{ orthogonaux} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, z' = i\lambda z \Leftrightarrow \frac{z'}{z} \in i \times \mathbb{R}^*.$$

Preuve de la propriété 2.4. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel λ non nul tel que $\vec{u}' = \lambda\vec{u}$, ce qui équivaut à $z' = \lambda z$.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ deux vecteurs orthogonaux, de coordonnées respectives (a, b) et (a', b') et d'affixes respectives z et z' . On a alors

$$\vec{u}' \cdot \vec{u} = aa' + bb' = \operatorname{Re}(\bar{z}z').$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont orthogonaux, si et seulement si $\operatorname{Re}(\bar{z}z') = 0$, donc si, et seulement si, $\bar{z}z'$ est imaginaire pur. Comme

$$\bar{z}z' = \frac{\bar{z}z'z}{z} = |z|^2 \frac{z'}{z},$$

on en déduit que $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\frac{z'}{z}$ est imaginaire pur, donc seulement s'il existe un réel λ non nul tel que $z' = i\lambda z$.

Exemple 2.4. Soient $\vec{u}$ d'affixe $z = 1 + i$ et $\vec{u}'$ d'affixe $z' = -2 - 2i$. On calcule $\frac{z'}{z} = \frac{-2 - 2i}{1 + i} = -2$. Donc $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires.

Exemple 2.5. Soient $\vec{u}$ d'affixe $z = 2 - i$ et $\vec{u}'$ d'affixe $z' = -3 - 6i$. On calcule $\frac{z'}{z} = \frac{-3 - 6i}{2 - i} = i \frac{-6 + 3i}{2 - i} = -3i$. Donc $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont orthogonaux.

3. Argument et forme trigonométrique d'un nombre complexe.**3.1 Argument d'un nombre complexe non nul.**

Définition 3.1. Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ et soit M le point d'affixe z , on appelle argument de z et on note $\arg z$ une mesure de l'angle $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$. On a donc

$$\arg z = (\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}) \bmod 2\pi.$$

Soit $z = a + ib$, avec a, b réels et M le point d'affixe z . On pose

$$r = \|\overrightarrow{OM}\|$$

la norme euclidienne de $\overrightarrow{OM}$ (on a donc $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r$), soit

$$\theta = (\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}),$$

une mesure de l'angle $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$. De la relation :

$$\overrightarrow{OM} = r(\cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2)$$

on déduit que

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = |z|(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)).$$

Ainsi z est déterminé par la connaissance de son module $|z|$ et d'un de ses arguments θ , défini à 2π près.

3.2. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul.

Définition 3.2. Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, il existe un unique réel strictement positif r et un réel θ , défini à 2π près, tel que

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ avec } r = |z| \text{ et } \theta = \arg(z).$$

L'écriture

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ avec } r > 0, \theta \in \mathbb{R}$$

est appelée forme trigonométrique de z . Pour $z = a + ib$ on a

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

et θ est une solution de

$$r \cos \theta = a, \quad r \sin \theta = b,$$

qui admet une infinité de solutions définies à 2π près.

3. ARGUMENT ET FORME TRIGONOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Remarque 3.1. On appelle aussi argument principal, et on note $\text{Arg}z$, l'unique argument de z appartenant à $] -\pi, \pi]$.

Propriété 3.1. Soit $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, et $z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$ avec $r' > 0$ et $\theta' \in \mathbb{R}$, alors

$$z = z' \Leftrightarrow r' = r \text{ et } \theta = \theta' \text{ mod } 2\pi.$$

Ainsi l'écriture trigonométrique d'un nombre complexe z est unique, avec θ défini à 2π près.

Preuve de la Propriété 3.1. Si $z = z'$, on a donc

$$|z|^2 = r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = |z'|^2 = r'^2(\cos^2 \theta' + \sin^2 \theta') \Leftrightarrow r^2 = r'^2$$

on en déduit que $r' = r$ et, en identifiant partie réelle et partie imaginaire dans l'égalité $z = z'$, que

$$\cos \theta' = \cos \theta \Leftrightarrow \theta' = \theta \text{ ou } \theta' = -\theta \text{ mod } 2\pi \quad (3.1)$$

et

$$\sin \theta' = \sin \theta \Leftrightarrow \theta' = \theta \text{ ou } \theta' = \pi - \theta \text{ mod } 2\pi. \quad (3.2)$$

Donc $\theta' = \theta \text{ mod } 2\pi$ est solution de (3.1) et (3.2). Vérifions qu'il n'y a pas d'autres solutions. Si θ' est une solution (3.1) et (3.2) telle que $\theta' \neq \theta \text{ mod } 2\pi$, alors avec (3.1), on a $\theta' = -\theta \text{ mod } 2\pi$, ce qui donne avec (3.2) :

$$\begin{aligned} \theta' = \theta \text{ ou } \theta' = \pi - \theta &\Leftrightarrow -\theta = \theta \text{ ou } -\theta = \pi - \theta \\ &\Leftrightarrow 2\theta = 0 \text{ ou } 0 = \pi \Leftrightarrow \theta = 0 \Leftrightarrow \theta' = -\theta = \theta = 0 \text{ mod } 2\pi. \end{aligned}$$

Il n'existe donc pas d'autres solutions que $\theta' = \theta \text{ mod } 2\pi$. $\square$

Exemple 3.1. Placer les points du plan complexe M_1 , M_2 , M_3 et M_4 , images respectives des nombres complexes définis par :

- a) z_1 le nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$,
- b) z_2 de module 3 et d'argument $-\frac{\pi}{4}$,
- c) z_3 de module 1 et d'argument $-\frac{\pi}{2}$,
- d) z_4 de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\frac{25\pi}{6}$.

3.3. Propriétés de l'argument d'un nombre complexe.

Ci-dessous, par commodité, on a aussi remis aussi les propriétés du module.

3. ARGUMENT ET FORME TRIGONOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Propriété 3.2. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ on a

$$z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'| \text{ et } \arg z = \arg z' \pmod{2\pi} \quad (a)$$

$$\arg(zz') = \arg z + \arg z' \pmod{2\pi}, \quad |zz'| = |z||z'| \quad (b)$$

$$\arg \frac{1}{z} = -\arg z \pmod{2\pi}, \quad \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} = |z|^{-1} \quad (c)$$

$$\arg \bar{z} = -\arg z \pmod{2\pi}, \quad |\bar{z}| = |z| \quad (d)$$

$$\arg \frac{z}{z'} = \arg z - \arg z' \pmod{2\pi}, \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}. \quad (e)$$

Preuve de la Propriété 3.2. La relation (a) est une conséquence de la Propriété 3.1.

Montrons la relation (b). Posons $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$, avec r, r', θ, θ' réels et $r > 0, r' > 0$. On obtient avec les formules d'addition des cos et des sin :

$$\begin{aligned} zz' &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \times r'(\cos \theta' + i \sin \theta') \\ &= r'r[\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i(\cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta')] \\ &= rr'(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')). \end{aligned}$$

On a donc avec la Propriété 3.1 («unicité» de la forme trigonométrique) :

$$zz' = rr'(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')) \Leftrightarrow |zz'| = rr', \arg(zz') = \theta + \theta' \pmod{2\pi}.$$

On obtient (c) en écrivant que :

$$\begin{aligned} r(\cos \theta + i \sin \theta) \times r^{-1}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) \\ &= (\cos \theta + i \sin \theta) \times (\cos \theta - i \sin \theta) \\ &= \cos^2 \theta - (i \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \Rightarrow z^{-1} = r^{-1}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)). \end{aligned}$$

La relation (d) est une conséquence de

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \Leftrightarrow \bar{z} = r(\cos \theta - i \sin \theta) \Leftrightarrow \bar{z} = r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)).$$

La relation (e) est une conséquence de (b) et (c) et de $z/z' = z \times (1/z')$.

Exemple 3.2. Egalité de deux nombres complexes. Si deux nombres complexes sont égaux entre eux, alors ils ont le même module et, à 2π près, le même argument (Propriété 3.2, relation (a)) :

- Comme $\cos 0 + i \sin 0 = 1$, alors si $r(\cos \theta + i \sin \theta) = 1$ avec $r > 0$, on a $r = 1$ et $\theta = 0 \pmod{2\pi}$.

3. ARGUMENT ET FORME TRIGONOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

- Comme $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$, alors si $r(\cos \theta + i \sin \theta) = i$ avec $r > 0$, on a $r = 1$ et $\theta = \frac{\pi}{2} \bmod{2\pi}$.

Exemple 3.3. Multiplication de deux nombres complexes. Les modules se multiplient et les arguments s'ajoutent (Propriété 3.2, relation (b)) :

$$\begin{aligned} [2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})] \times [3(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})] &= 2 \times 3(\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3})) \\ &= 6(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}). \end{aligned}$$

Propriété 3.3. Formule de Moivre. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

Preuve de la Propriété 3.3. Posons

$$z = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on obtient cette propriété par récurrence. Elle est vraie pour $n = 0$. Supposons la vraie au rang $n \geq 0$, alors

$$z^{n+1} = z z^n = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos n\theta + i \sin n\theta) = \cos((n+1)\theta) + i \sin((n+1)\theta),$$

ce qui démontre la propriété au rang $n+1$. La Propriété 3.4 est donc vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$, on a avec $m = -n \in \mathbb{N}$:

$$z^n = \frac{1}{z^m} = \frac{1}{\cos m\theta + i \sin m\theta} = \frac{1}{\cos n\theta - i \sin n\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta,$$

ce qui permet d'établir le résultat.

Exemple 3.4. Application de la formule de Moivre. On a, avec cette formule :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta.$$

Si on développe le terme de gauche, on obtient :

$$\cos^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta + i \sin 2\theta,$$

on retrouve les formules de duplication :

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta, \quad 2 \cos \theta \sin \theta = \sin 2\theta.$$

4. Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul.

4.1. Définitions et Propriétés.

Définition 4.1. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on définit l'exponentielle de $i\theta$ par

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Tout nombre complexe z non nul s'écrit alors $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$ avec $r > 0$ et θ défini à 2π près. L'écriture

$$z = r e^{i\theta} \quad \text{avec } r > 0, \theta \in \mathbb{R}$$

est appelée forme exponentielle de z .

La Propriété 3.2 donne avec cette notation la propriété suivante.

Propriété 4.1. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ on a

$$r e^{i\theta} = r' e^{i\theta'} \Leftrightarrow r = r' \text{ et } \theta = \theta' \bmod 2\pi \quad (a)$$

$$r e^{i\theta} \times r' e^{i\theta'} = r r' e^{i(\theta+\theta')} \quad (b)$$

$$\frac{1}{r e^{i\theta}} = r^{-1} e^{-i\theta} \quad (c)$$

$$\overline{r e^{i\theta}} = r e^{-i\theta} \quad (d)$$

$$\frac{r e^{i\theta}}{r' e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')} \quad (e)$$

On reprend les Exemples 3.2 et 3.3 avec cette notation.

Exemple 4.1. On a $e^{i0} = 1$, donc $e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \theta = 0 \bmod 2\pi$. On a $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$, donc $e^{i\theta} = i \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \bmod 2\pi$.

Exemple 4.2. Multiplication de deux nombres complexes :

$$2 e^{\frac{i\pi}{4}} \times 3 e^{\frac{i\pi}{3}} = 2 \times 3 e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3})} = 6 e^{\frac{7i\pi}{12}}.$$

La formule de Moivre de la Propriété 3.3 s'écrit alors de la manière suivante.

Propriété 4.2. Formule de Moivre. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

ou, de manière équivalente

$$(e^{i\theta})^n = (e^{ni\theta}).$$

4. FORME EXPONENTIELLE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

Preuve de la Propriété 4.2. On reprend à titre d'exemple, la démonstration de la formule de Moivre vue à la Propriété 3.3. Supposons la formule vraie au rang $n \geq 0$, alors :

$$(e^{i\theta})^{n+1} = e^{i\theta} (e^{i\theta})^n = e^{i\theta} e^{ni\theta} = e^{(n+1)i\theta}$$

ce qui démontre la propriété au rang $n+1$. La Propriété 4.2 est donc vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$, on a avec $m = -n \in \mathbb{N}$:

$$(e^{i\theta})^n = \frac{1}{(e^{i\theta})^m} = \frac{1}{e^{mi\theta}} = e^{-mi\theta} = e^{ni\theta}. \quad \square$$

En additionnant et en soustrayant membre à membre les égalités

$$\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}, \quad \cos \theta - i \sin \theta = e^{-i\theta},$$

on obtient les formules d'Euler suivantes.

Propriété 4.3. *Formules d'Euler.*

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Remarque 4.1. Les formules d'Euler sont aussi une conséquence de la Propriété 1.3 :

$$e^{i\theta} + \overline{e^{i\theta}} = 2\operatorname{Re}(e^{i\theta}) = 2 \cos \theta, \quad e^{i\theta} - \overline{e^{i\theta}} = 2i\operatorname{Im}(e^{i\theta}) = 2i \sin \theta.$$

Définition 4.2. *Exponentielle d'un nombre complexe.* Soit $z = a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on définit l'exponentielle de z par

$$e^z = e^a e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b).$$

Propriété 4.3. *L'exponentielle d'un nombre complexe vérifie les propriétés suivantes.*

$$\begin{aligned} e^{z+z'} &= e^z e^{z'}, \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \\ e^{-z} &= \frac{1}{e^z}, \forall z \in \mathbb{C}, \\ e^{z-z'} &= \frac{e^z}{e^{z'}}, \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \\ (e^z)^n &= e^{nz}, \forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Preuve de la Propriété 4.3. La relation d'additivité $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ est une conséquence des propriétés de l'exponentielle d'un nombre réel et de la Propriété 4.1. Les autres propriétés sont alors une conséquence de cette relation d'additivité.

4.2. Application de la formule de Moivre.**4.2.1. Expression de $\cos nx$ et $\sin nx$ en fonction des puissances de $\cos x$ et de $\sin x$, $n \in \mathbb{N}$.**

On donne ci-dessous deux exemples pour $n = 2$ et $n = 3$. On pourra procéder de manière similaire pour les autres valeurs de $n \in \mathbb{N}$: les cas 4, 5 sont traités à l'Exercice 4.2.

Reprenons l'Exemple 3.4, en utilisant la forme exponentielle d'un nombre complexe. On a, avec la formule de Moivre :

$$(e^{ix})^2 = e^{2ix}$$

Donc en développant $(e^{ix})^2$:

$$\begin{aligned}(e^{ix})^2 &= \cos^2 x + 2i \cos x \sin x + i^2 \sin^2 x = \cos^2 x + 2i \cos x \sin x - \sin^2 x \\ &= \cos 2x + i \sin 2x,\end{aligned}$$

on retrouve donc les formules :

$$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \sin 2x = 2 \cos x \sin x.}$$

Ensuite, on a, avec la formule de Moivre : $(e^{ix})^3 = e^{3ix}$, en développant $(e^{ix})^3$ on obtient :

$$(e^{ix})^3 = \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x + 3i^2 \cos x \sin^2 x + i^3 \sin^3 x = \cos 3x + i \sin 3x,$$

donc

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3 \cos x (1 - \cos^2 x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x, \\ \sin 3x &= 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x = 3(1 - \sin^2 x) \sin x - \sin^3 x = -4 \sin^3 x + 3 \sin x.\end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\boxed{\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x, \quad \sin 3x = -4 \sin^3 x + 3 \sin x.}$$

4.2.2. Linéarisation de $\cos^n x$ et $\sin^n x$, $n \in \mathbb{N}$.

La linéarisation de $\cos^n x$ et $\sin^n x$ consiste à exprimer $\cos^n x$ et $\sin^n x$ en fonction de combinaisons linéaires de $\cos px$ et de $\sin qx$, avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Nous donnons un exemple pour $n = 2$. Les cas $n = 3, 4, 5$ sont traités à l'Exercice 4.3.

4. FORME EXPONENTIELLE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

Avec la formule d'Euler et la formule de Moivre on a :

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} (e^{2ix} + 2e^{ix} e^{-ix} + e^{-2ix}) \\ &= \frac{1}{4} (e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}) = \frac{1}{4} (e^{2ix} + e^{-2ix} + 2) \\ &= \frac{1}{4} (2 \cos 2x + 2) = \frac{1}{2} (\cos 2x + 1).\end{aligned}$$

D'où :

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \text{ et } \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1.$$

Ensuite :

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4i^2} (e^{2ix} - 2e^{ix} e^{-ix} + e^{-2ix}) \\ &= -\frac{1}{4} (e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}) = -\frac{1}{4} (e^{2ix} + e^{-2ix} - 2) \\ &= -\frac{1}{4} (2 \cos 2x - 2) = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x).\end{aligned}$$

D'où :

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

4.3. Racines de l'unité.

On cherche les solutions de

$$z^n = 1, \quad z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}.$$

Exemple 4.3. Résolution de

$$z^2 = 1, \quad z^3 = 1, \quad z^4 = 1.$$

On pose $z = r e^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a alors

$$z^2 = 1 \Leftrightarrow r^2 e^{2i\theta} = e^{0i} \Leftrightarrow r = 1 \text{ et } 2\theta = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow r = 1 \text{ et } \theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

On obtient deux solutions distinctes, à 2π près, de θ pour $k = 0$ et $k = 1$ ce qui donne deux solutions :

$$z_1 = e^{i0} = 1, \quad z_2 = e^{i\pi} = -1.$$

4. FORME EXPONENTIELLE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

Ensuite :

$$z^3 = 1 \Leftrightarrow r^3 e^{3i\theta} = e^{0i} \Leftrightarrow r = 1 \text{ et } 3\theta = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow r = 1, \theta = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

On obtient trois solutions distinctes, à 2π près, de θ pour $k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$, ce qui donne les trois solutions suivantes :

$$z_1 = e^{i0} = 1, \quad z_2 = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_3 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On remarque que $z_3 = \bar{z}_2$.

Ensuite :

$$z^4 = 1 \Leftrightarrow r^4 e^{4i\theta} = e^{0i} \Leftrightarrow r = 1 \text{ et } 4\theta = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow r = 1, \theta = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

On obtient quatre solutions distinctes, à 2π près, de θ pour $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ et $k = 3$, ce qui donne les trois solutions suivantes :

$$z_1 = e^{i0} = 1, \quad z_2 = e^{\frac{i\pi}{2}} = i, \quad z_3 = e^{i\pi} = -1, \quad z_4 = e^{\frac{3i\pi}{2}} = -i.$$

On remarque que $z_4 = \bar{z}_2$.

On a alors la proposition suivante.

Proposition 4.1. a) Les solutions de l'équation

$$z^n = 1$$

sont données par :

$$z = e^{\frac{2ki\pi}{n}}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

b) Soit $z \in \mathbb{C}^*$, alors l'équation

$$z^n = Z$$

a pour solution

$$z = z_0 e^{\frac{2ki\pi}{n}}, \quad k = 0, \dots, n-1$$

où z_0 est une solution de $z^n = Z$.

Preuve de la Proposition 4.1. Pour (a) on procède comme dans l'Exemple 4.3.

Preuve de (b). Soit z_0 une solution de $z^n = Z$ avec $Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, par exemple $z_0 = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{2i\pi}{n}}$ (donc z_0 existe), alors z vérifie

$$\left(\frac{z}{z_0}\right)^n = \frac{z^n}{z_0^n} = \frac{Z}{Z} = 1.$$

Donc $\frac{z}{z_0}$ est une racine n -ième de l'unité, ce qui donne avec (a) :

$$\frac{z}{z_0} = e^{\frac{2ki\pi}{n}}, \quad k = 0, \dots, n. \quad \square$$

On remarque que les solutions de $z^n = Z$ s'obtiennent à partir d'une solution de cette équation et des racines n -ième de l'unité. L'Exercice 4.4 porte sur ce Paragraphe.

5. Nombres complexes en géométrie.

5.1. Relation entre argument et quotient de deux nombres complexes.

On a la propriété suivante, qui donne notamment une relation entre l'argument et le quotient de deux nombres complexes (relation (d)).

Propriété 5.1. *On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ et soit M le point d'affixe z , alors :*

$$|z| = \|\vec{OM}\|, \arg(z) = (\vec{e}_1, \vec{OM}). \quad (a)$$

Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ et $\vec{u}$ le vecteur d'affixe z , alors

$$|z| = \|\vec{u}\|, \arg(z\vec{u}) = (\vec{e}_1, \vec{u}). \quad (b)$$

Soient A et B deux points du plan alors

$$|z_{\vec{AB}}| = \|\vec{AB}\|, \arg(z_{\vec{AB}}) = \arg(z_B - z_A) = (\vec{e}_1, \vec{AB}). \quad (c)$$

Soient A, B, C et D quatre points du plan, alors

$$\left| \frac{z_{\vec{CD}}}{z_{\vec{AB}}} \right| = \frac{\|\vec{CD}\|}{\|\vec{AB}\|}, \arg\left(\frac{z_{\vec{CD}}}{z_{\vec{AB}}}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = (\vec{AB}, \vec{CD}). \quad (d)$$

Preuve de la Propriété 5.1. Les propriétés sur les modules sont un rappel donné par commodité (cf. Propriété 2.1, Propriété 2.2). La relation (a) est la Définition 3.1.

Montrons la relation (b). Soit M tel que $\vec{OM} = \vec{u}$, on a donc $z_{\vec{u}} = z_{\vec{OM}}$ et avec la relation (a) :

$$\arg(z_{\vec{u}}) = \arg(z_{\vec{OM}}) = (\vec{e}_1, \vec{OM}) = (\vec{e}_1, \vec{u}).$$

En particulier en posant $\vec{u} = \vec{AB}$, on obtient (c). La relation (d), s'obtient avec la relation de Chasles et la relation (c) :

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{z_{\vec{CD}}}{z_{\vec{AB}}}\right) &= \arg(z_{\vec{CD}}) - \arg(z_{\vec{AB}}) = (\vec{e}_1, \vec{CD}) - (\vec{e}_1, \vec{AB}) \\ &= (\vec{AB}, \vec{e}_1) + (\vec{e}_1, \vec{CD}) = (\vec{AB}, \vec{CD}). \end{aligned}$$

Exemple 5.1. Deux vecteurs sont orthogonaux entre eux si et seulement si le rapport de l'affixe du premier sur l'affixe du second est imaginaire pur :

$$(\vec{AB}, \vec{CD}) = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_{\vec{CD}}}{z_{\vec{AB}}}\right) = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{z_{\vec{CD}}}{z_{\vec{AB}}} = r e^{\pm i \frac{\pi}{2}}, r > 0 \Leftrightarrow \frac{z_{\vec{CD}}}{z_{\vec{AB}}} \in i \times \mathbb{R}^*.$$

5.2. Transformations du plan complexe.

On étudie trois type de transformations du plan : translations, homothétie et rotations et on donne la fonction complexe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ associée.

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Dans ce paragraphe M désigne un point du plan d'affixe z et M' un point du plan d'affixe z' .

5.2.1. Translations du plan.

Soit $\vec{u}$ un vecteur d'affixe a . On appelle translation de vecteur $\vec{u}$, l'application qui au point M associe le point M' tel que

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}.$$

On a donc

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \vec{u} \Leftrightarrow z' = z + a.$$

On dit que la fonction complexe f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = z + a$$

est associée à la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe a . Une représentation de f est donnée à la Figure 5.1.

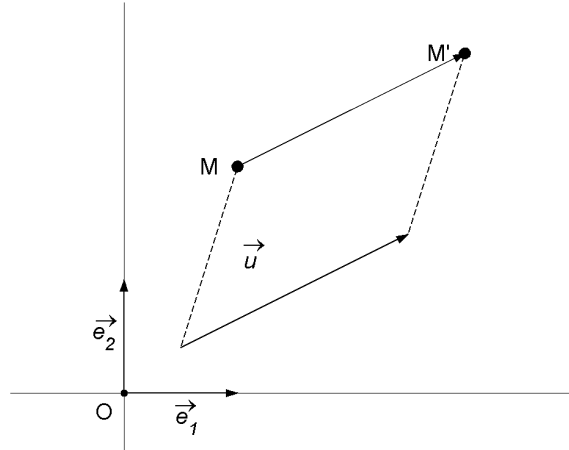


Figure 5.1. Translation T de vecteur $\vec{u}$. Le point M' est l'image par T du point M . On a $M' = T(M)$ et $z' = f(z)$, avec z affixe de M , z' affixe de M' et f la fonction associée à T . On a donc $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

5.2.1.1. Quelques propriétés des translations.

On considère la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe a représentée par $f(z) = z + a$. Soient A, B deux points du plan et $A' = T(A)$, $B' = T(B)$ leur image respective par T . On a donc

$$\begin{aligned} A' = T(A), B' = T(B) &\Leftrightarrow z_{A'} = z_A + a, z_{B'} = z_B + a \\ &\Leftrightarrow z_{B'} - z_{A'} = z_B - z_A, z_{A'} - z_A = a \\ &\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{A'B'}} = z_{\overrightarrow{AB}}, z_{\overrightarrow{AA'}} = a \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'} = \vec{u}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

5.2.1.1a. Image d'une droite par une translation.

Soit (D) une droite du plan, donnons l'image de (D) par la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe a . Soient A et B deux points de (D) et (D') la droite passant $A' = T(A)$, $B' = T(B)$ (cf. Figure 5.2). La droite (D) a pour équation :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}, t \in \mathbb{R},$$

ce qui donne avec (5.1) :

$$\begin{aligned} M \in D &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} \\ &\Leftrightarrow z = z_A + tz_{\overrightarrow{AB}} \\ &\Leftrightarrow f(z) = f(z_A + tz_{\overrightarrow{AB}}) = z_A + tz_{\overrightarrow{AB}} + a \\ &\Leftrightarrow z' = f(z_A) + tz_{\overrightarrow{AB}} \\ &\Leftrightarrow z' = f(z_A) + tz_{\overrightarrow{A'B'}} \text{ (avec (5.1))} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OA'} + t\overrightarrow{A'B'} \\ &\Leftrightarrow M \in D'. \end{aligned}$$

Donc l'image par une translation T d'une droite (D) passant par les point A et B est la droite parallèle (D') passant par $A' = T(A)$ et $B' = T(B)$.

On remarque qu'en prenant $t \in [0, 1]$, les relations ci-dessus montrent que l'image du segment $[A, B]$ est le segment $[T(A), T(B)] = [A', B']$ de longueur AB .

Une représentation de l'image d'une droite par une translation de vecteur $\vec{u}$ est donnée à la Figure 5.2.

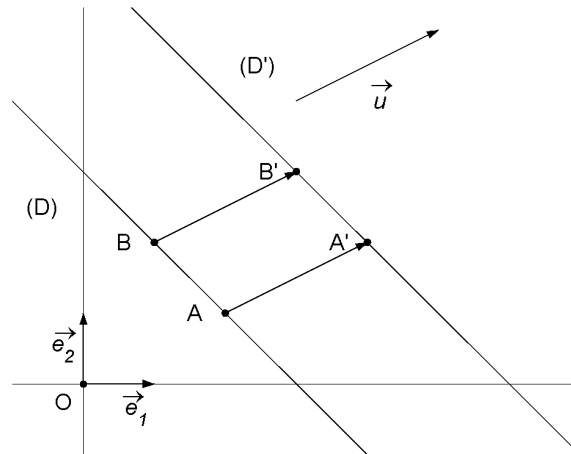


Figure 5.2. L'image de la droite (D) passant par A et B par la translation T de vecteur $\vec{u}$ est la droite (D') passant par les points $A' = T(A)$ et $B' = T(B)$.

5.2.1.1b. Conservation des distances.

Soient A, B deux points du plan et $A' = T(A)$, $B' = T(B)$ leur image respective par T . On a donc avec (5.1) :

$$A' = T(A), B' = T(B) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow AB = A'B'.$$

On a donc conservation des distances. Cette relation montre en particulier que l'image du cercle de centre A de rayon AB est le cercle de centre $A' = T(A)$ de rayon $A'B' = AB$ (cf. Figure 5.4).

5.2.1.1c. Conservation des angles orientés.

Soit A, B, C trois points du plan et $A' = T(A)$, $B' = T(B)$, $C' = T(C)$ leur image respective par T (cf. Figure 5.3). On a donc avec (5.1) :

$$A' = T(A), B' = T(B), C' = T(C) \Rightarrow z_{\overrightarrow{A'B'}} = z_{\overrightarrow{AB}} \text{ et } z_{\overrightarrow{A'C'}} = z_{\overrightarrow{AC}}.$$

On a donc

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{A'C'}}}{z_{\overrightarrow{A'B'}}}\right) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}),$$

la translation T conserve donc les angles orientés (cf. Figure 5.3).

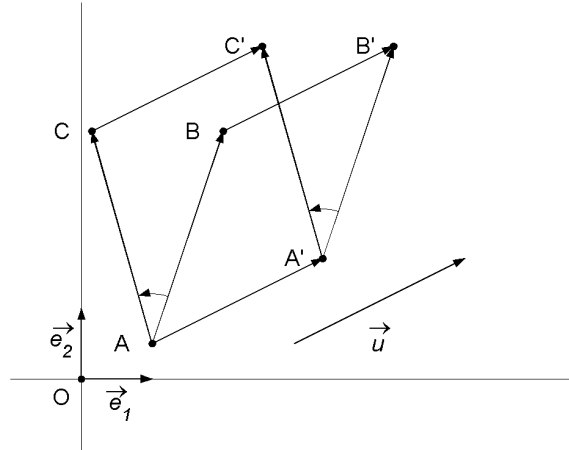


Figure 5.3. Conservation des angles orientés par la translation T de vecteur $\vec{u}$, on a $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{T(A)T(B)}, \overrightarrow{T(A)T(C)}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$.

Des propriétés ci-dessus, on en déduit que la translation T conserve l'alignement, les aires, le parallélisme et l'orthogonalité. On représente ci-dessous, à la Figure

5.4, un cercle et son image par une translation, l'image est aussi un cercle.

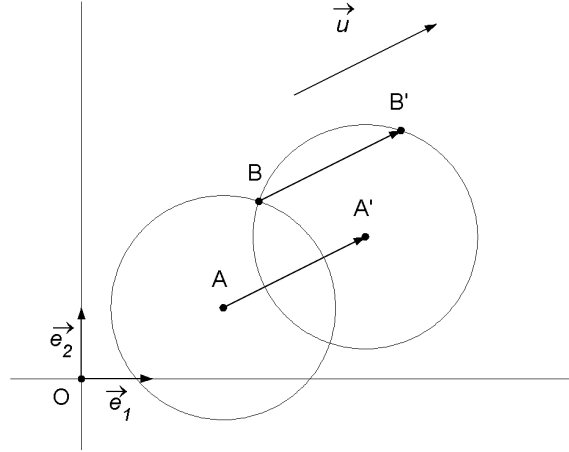


Figure 5.4. L'image du cercle de centre A passant par B et de rayon AB par la translation T de vecteur $\vec{u}$ est le cercle de centre $A' = T(A)$ et de rayon AB .

On représente ci-dessus, à la Figure 5.4, un cercle et son image par une translation, l'image est aussi un cercle.

5.2.2. Homothéties du plan.

Soit k un réel et Ω un point d'affixe ω . On appelle homothétie de centre Ω et de rapport k , l'application qui au point M associe le point M' tel que

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}.$$

On a donc

$$\overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{OM'} = k \overrightarrow{\Omega O} + k \overrightarrow{OM} \Leftrightarrow z' = \omega + k(z - \omega).$$

On dit que la fonction complexe f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \omega + k(z - \omega)$$

est associée à l'homothétie de centre Ω et de rapport k .

Une représentation de f est donnée à la Figure 5.5, avec la valeur de $k = 2.5$. A titre d'exemple, nous avons aussi reporté le point M'' , image de M par l'homothétie de

centre Ω et de rapport $-k = -2.5$.

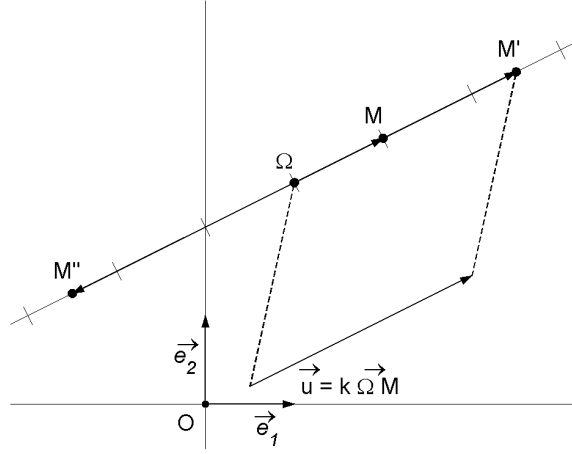


Figure 5.5. Homothétie H de centre Ω et de rapport k . Le point M' est l'image par H du point M . On a $M' = H(M)$ et $z' = f(z)$, avec z affixe de M , z' affixe de M' et f la fonction associée à H . La graduation de la droite (ΩM) vaut ΩM . On a donc $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ noté aussi $\vec{u}$ sur la figure. Sur cet exemple $k = 2.5$. Le point M'' est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport $-k$.

5.2.2.1. Quelques propriétés des homothéties.

On considère l'homothétie H de centre Ω d'affixe ω et de rapport k représentée par $f(z) = \omega + k(z - \omega)$.

Soient A, B deux points du plan et $A' = H(A)$, $B' = H(B)$ leur image respective par H . On a donc

$$\begin{aligned}
 A' = H(A), B' = H(B) &\Leftrightarrow z_{A'} = \omega + k(z_A - \omega), z_{B'} = \omega + k(z_B - \omega) \\
 &\Leftrightarrow z_{B'} - z_{A'} = k(z_B - z_A), z_{A'} - \omega = k(z_A - \omega) \\
 &\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{A'B'}} = kz_{\overrightarrow{AB}} \text{ et } z_{\overrightarrow{\Omega A'}} = kz_{\overrightarrow{\Omega A}} \\
 &\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{A'B'}} = z_{\overrightarrow{kAB}} \text{ et } z_{\overrightarrow{\Omega A'}} = z_{\overrightarrow{k\Omega A}} \\
 &\Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Omega A'} = k\overrightarrow{\Omega A}.
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

5.2.2.1a. Image d'une droite par une homothétie.

Soit (D) une droite du plan, donnons l'image de (D) par l'homothétie H de centre Ω d'affixe ω et de rapport k . Soient A et B deux points de (D) et (D') la droite passant $A' = H(A)$, $B' = H(B)$ (cf. Figure 5.6). La droite (D) a pour équation :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}, t \in \mathbb{R},$$

ce qui donne avec (5.2) :

$$\begin{aligned}
 M \in D &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} \\
 &\Leftrightarrow z = z_A + t z_{\overrightarrow{AB}} \\
 &\Leftrightarrow f(z) = f(z_A + t z_{\overrightarrow{AB}}) = \omega + k(z_A + t z_{\overrightarrow{AB}} - \omega) \\
 &\Leftrightarrow z' = \omega + k(z_A - \omega) + t k z_{\overrightarrow{AB}} \\
 &\Leftrightarrow z' = z_{A'} + t z_{\overrightarrow{kA'B'}} \\
 &\Leftrightarrow z' = z_{A'} + t z_{\overrightarrow{A'B'}} \text{ (avec (5.2))} \\
 &\Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OA'} + t \overrightarrow{A'B'} \\
 &\Leftrightarrow M \in D'.
 \end{aligned}$$

Donc l'image par une homothétie H d'une droite (D) passant par les points A et B est la droite parallèle (D') passant par $A' = H(A)$ et $B' = H(B)$ (cf. Figure 5.6).

On remarque qu'en prenant $t \in [0, 1]$, les relations ci-dessus montrent que l'image du segment $[A, B]$ est le segment $[H(A), H(B)] = [A', B']$ de longueur $|k|AB$.

Une représentation de l'image d'une droite par une homothétie est donnée à la Figure 5.6.

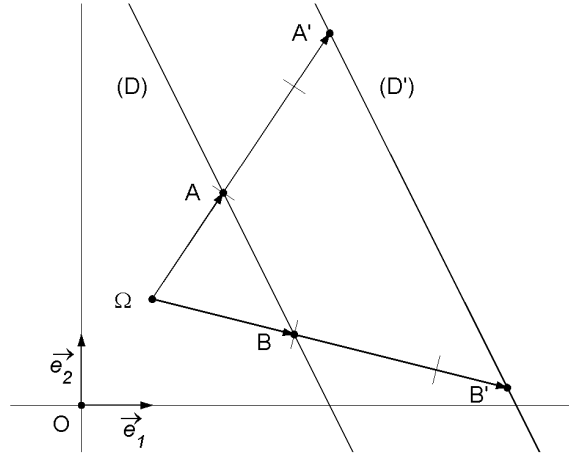


Figure 5.6. L'image de la droite (D) passant par A et B par l'homothétie H de centre Ω et rapport k est la droite (D') passant par les points $A' = H(A)$ et $B' = H(B)$. On a $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$. Sur cet exemple $k = 2.5$.

5.2.2.1b. Multiplication des distances par $|k|$.

Soient A, B deux points du plan et $A' = H(A)$, $B' = H(B)$ leur image respective par H . On a donc avec (5.2) :

$$A' = H(A), B' = H(B) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{A'B'} \Rightarrow AB = |k|A'B'.$$

On a donc multiplication des distances par $|k|$. Cette relation montre en particulier que l'image du cercle de centre A de rayon AB est le cercle de centre $A' = H(A)$ de rayon $|k|AB = A'B'$ (cf. Figure 5.8).

5.2.2.1c. Conservation des angles orientés.

Soient A, B, C trois points du plan et $A' = H(A), B' = H(B), C' = H(C)$ leur image respective par H (cf. Figure 5.7). On a donc avec (5.2) :

$$A' = H(A), B' = H(B), C' = H(C) \Rightarrow z_{\overrightarrow{A'B'}} = kz_{\overrightarrow{AB}} \text{ et } z_{\overrightarrow{A'C'}} = kz_{\overrightarrow{AC}}$$

On a donc

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = \arg\left(\frac{kz_{\overrightarrow{AC}}}{kz_{\overrightarrow{AB}}}\right) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{A'C'}}}{z_{\overrightarrow{A'B'}}}\right) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}),$$

l'homothétie H conserve donc les angles orientés (cf. Figure 5.7).

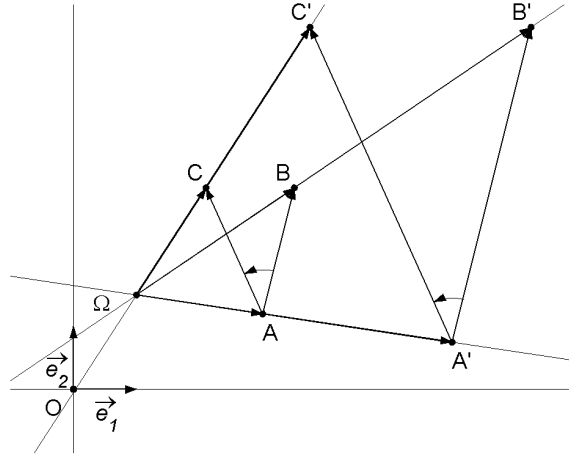


Figure 5.7. Conservation des angles orientés par l'homothétie H de centre Ω et de rapport k , on a $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{H(A)H(B)}, \overrightarrow{H(A)H(C)}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$. Sur cet exemple $k = 2.5$.

Des propriétés ci-dessus, on en déduit que l'homothétie H conserve l'alignement, le parallélisme et l'orthogonalité et que les aires sont multipliées par k^2 . On représente ci-dessous, à la Figure 5.8, un cercle et son image par une homothétie, l'image est

aussi un cercle.

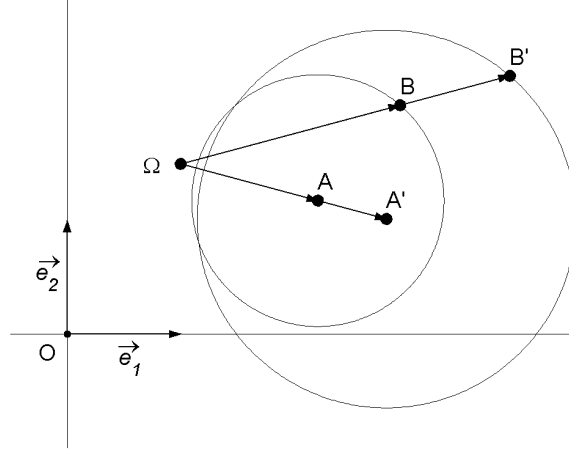


Figure 5.8. L'image du cercle de centre A passant par B et de rayon AB par l'homothétie H de centre Ω et de rapport k est le cercle de centre $A' = H(A)$ passant par $B' = H(B)$ et de rayon $A'B' = kAB$. Sur cet exemple $k = 1.5$.

5.2.3. Rotations du plan.

Soit θ un réel et Ω un point d'affixe ω . On appelle rotation de centre Ω et d'angle θ , l'application qui au point M associe le point M' tel que

$$\Omega M' = \Omega M \text{ et } (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta,$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned} |z' - \omega| &= |z - \omega| \text{ et } \arg \frac{z' - \omega}{z - \omega} = \theta \\ \Leftrightarrow \frac{z' - \omega}{z - \omega} &= m e^{i\theta} \text{ avec } m = \left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = 1 \\ \Leftrightarrow z' - \omega &= (z - \omega) e^{i\theta} \\ \Leftrightarrow z' &= \omega + (z - \omega) e^{i\theta}. \end{aligned}$$

On dit que la fonction complexe f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \omega + (z - \omega) e^{i\theta}$$

est associée à la rotation de centre Ω et d'angle θ . Une représentation de f est

donnée à la Figure 5.9.

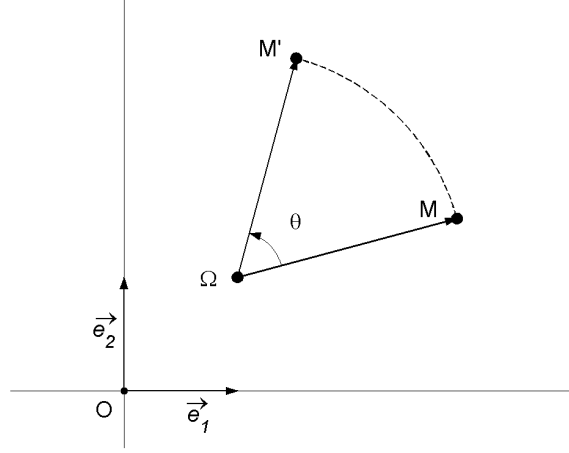


Figure 5.9. Rotation R de centre Ω et d'angle θ . Le point M' est l'image par R du point M . On a $M' = R(M)$ et $z' = f(z)$, avec z affixe de M , z' affixe de M' et f la fonction associée à R . On a donc $\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$.

5.2.3.1. Quelques propriétés des rotations.

On considère la rotation R de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ représentée par $f(z) = \omega + (z - \omega)e^{i\theta}$.

Soient A, B deux points du plan et $A' = R(A)$, $B' = R(B)$ leur image respective par R . On a donc

$$\begin{aligned} A' = R(A), B' = R(B) &\Leftrightarrow z_{A'} = \omega + (z_A - \omega)e^{i\theta}, z_{B'} = \omega + (z_B - \omega)e^{i\theta} \\ &\Leftrightarrow z_{B'} - z_{A'} = (z_B - z_A)e^{i\theta} \text{ et } A' = R(A), \\ &\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{A'B'}} = z_{\overrightarrow{AB}}e^{i\theta} \text{ et } A' = R(A), \\ &\Leftrightarrow A'B' = AB \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta \text{ et } A' = R(A). \end{aligned} \quad (5.3)$$

5.2.3.1a. Image d'une droite par une rotation.

Soit (D) une droite du plan, donnons l'image de (D) par la rotation R de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ . Soient A et B deux points de D et (D') la droite passant $A' = R(A)$, $B' = R(B)$ (cf. Figure 5.10). La droite (D) a pour équation :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}, t \in \mathbb{R},$$

ce qui donne avec (5.3) :

$$M \in D \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$$

5. NOMBRES COMPLEXES EN GEOMETRIE

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow z = z_A + tz_{\overrightarrow{AB}} \\
&\Leftrightarrow f(z) = f(z_A + tz_{\overrightarrow{AB}}) = \omega + (z_A + tz_{\overrightarrow{AB}} - \omega) e^{i\theta} \\
&\Leftrightarrow z' = \omega + (z_A - \omega) e^{i\theta} + tz_{\overrightarrow{AB}} e^{i\theta} \\
&\Leftrightarrow z' = \omega + (z_A - \omega) e^{i\theta} + tz_{\overrightarrow{A'B'}} \text{ (avec (5.3) – ligne 3)} \\
&\Leftrightarrow z' = z_{A'} + tz_{\overrightarrow{A'B'}} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OA'} + t\overrightarrow{A'B'}, \quad t \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow M \in D'.
\end{aligned}$$

Donc l'image par une rotation R d'une droite (D) passant par les point A et B est la droite (D') passant par $A' = R(A)$ et $B' = R(B)$. Comme, avec (5.3), on a $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta$, on en déduit que les droites font un angle θ entre-elles (cf. Figure 5.10).

On remarque qu'en prenant $t \in [0, 1]$, les relations ci-dessus montrent que l'image du segment $[A, B]$ est le segment $[R(A), R(B)] = [A', B']$ de longueur AB .

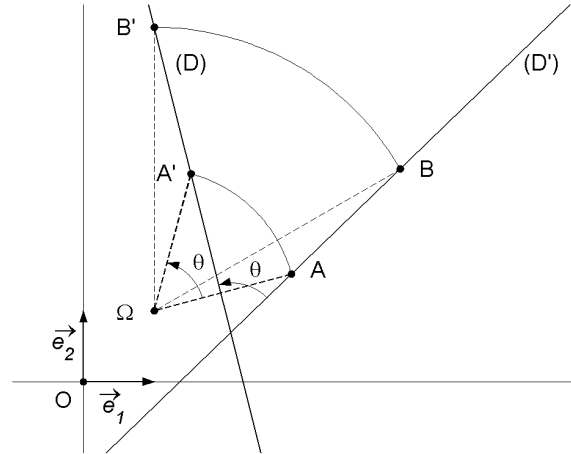


Figure 5.10. L'image de la droite (D) passant par A et B par la rotation R de centre Ω et d'angle θ est la droite (D') passant par les points $A' = R(A)$ et $B' = R(B)$. On a $A'B' = AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta$.

5.2.3.1b. Conservation des distances.

Soit A, B deux points du plan et $A' = R(A)$, $B = R(B)$ leur image respective par R . On a donc avec (5.3) :

$$A' = R(A), \quad B = R(B) \Rightarrow A'B' = AB \text{ et } (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AB}) = \theta.$$

On a donc conservation des distances. Cette relation montre en particulier que l'image du cercle de centre A de rayon AB est le cercle de centre $A' = R(A)$ de rayon $AB = A'B'$ (cf. Figure 5.12).

5.2.3.1b. Conservation des angles orientés.

Soit A, B, C trois points du plan et $A' = R(A), B' = R(B), C' = R(C)$ leur image respective par R (cf. Figure 5.11). On a donc avec (5.3) :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_{AC}}{z_{AB}}\right) = \arg\left(\frac{e^{i\theta} z_{AC}}{e^{i\theta} z_{AB}}\right) = \arg\left(\frac{z_{A'C'}}{z_{A'B'}}\right) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}).$$

On a donc conservation des angles orientés (cf. Figure 5.11).

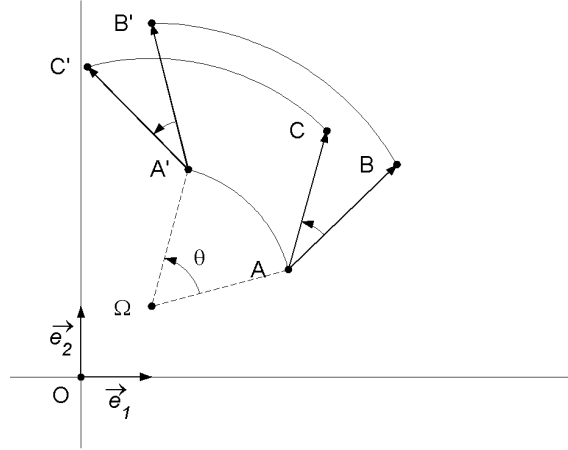


Figure 5.11. Conservation des angles orientés la rotation R de centre Ω et d'angle θ , on a $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{R(A)R(B)}, \overrightarrow{R(A)R(C)}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$.

Des propriétés ci-dessus, on en déduit que la rotation R conserve les aires, l'alignement, le parallélisme et l'orthogonalité. On représente ci-dessous, à la Figure 5.12, un cercle et son image par une rotation, l'image est aussi un cercle.

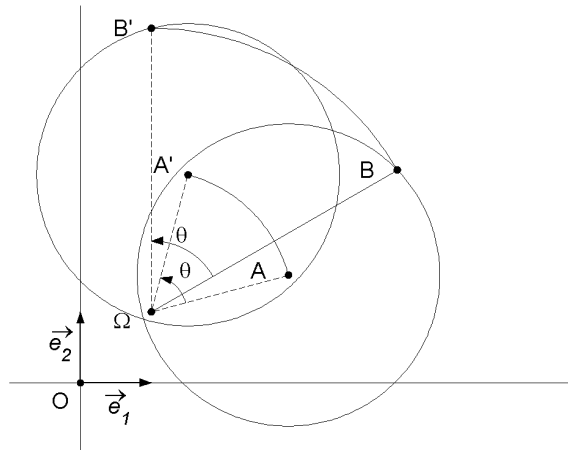


Figure 5.12. L'image du cercle de centre A passant par B et de rayon AB par la rotation R de centre Ω et d'angle θ est le cercle de centre $A' = R(A)$ et de rayon $AB = R(A)R(B) = A'B'$, avec $B' = R(B)$.

6. Nombres complexes. Exercices.**1. Définition des nombres complexes, opérations.**

Exercice 1.1. Donner la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

$$a) 1 + 2i, b) 1 - 2i, c) -1 + i\sqrt{3}, d) 5i - 1, e) 27, f) 3i, g) -2\pi.$$

Exercice 1.2. Addition de nombres complexes.

a) Mettre sous forme algébrique les nombres suivants :

$$\begin{aligned} A &= (3 + i) - (5 + 2i) - (3 + i), \quad B = -(2 + i) + 3 + 5i, \\ C &= -(10 + 5i) - i - (4 + 9i), \quad D = 3 + 5i - (2 + i), \\ E &= 1 + i + [5 + i - (3 - i)], \quad F = (1 + i + 5 + i) - (3 - i), \\ G &= 5 - 2i - (3 - i) - (4 + 2 + i) + (3 - 4i) - (1 + 2i). \end{aligned}$$

b) soit $z = 5 - 2i$, calculer $z + \bar{z}$ et $z - \bar{z}$. Que remarque-t-on.

Exercice 1.3. Produit de nombres complexes. Exemple :

$$(3 - i)(4 + i) = 12 + 3i - 4i - i^2 = 12 + 3i - 4i + 1 = 13 - i.$$

Mettre sous forme algébrique les nombres suivants :

$$\begin{aligned} A &= (1 + 2i)(3 + 4i), \quad B = (-2 + i)(1 + i), \quad C = (1 + i)(1 - i), \quad D = 3(2 + i), \\ E &= i(2 - i\sqrt{2}), \quad F = i \times 2i, \quad G = (3 - i)^2, \quad H = (1 + i)^3, \quad I = (a + bi)(a - bi), \\ J &= (7 - i)^2, \quad K = (2 - 3i)(2 + 3i), \quad L = (2 - i)^4. \end{aligned}$$

Exercice 1.4. Nombre conjugué.

a) Donner le conjugué de $z = 3 + 2i$.

b) Que peut-t-on dire des nombres complexes $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$.

c) Donner le conjugué des nombres complexes suivants

$$z_1 = 1 - i, \quad z_2 = -i + \sqrt{3}, \quad z_3 = i, \quad z_4 = 3, \quad z_5 = -2 - i, \quad z_6 = -i\pi.$$

d) Exprimer en fonction de z le conjugué de $\bar{z}$.

e) Quels sont les nombres complexes égaux à leur conjugué.

f) Quel est le conjugué d'un imaginaire pur ?

Exercice 1.5. Quotient de nombres complexes. Ecrire sous forme algébrique :

$$z_1 = \frac{3-2i}{5+i}, z_2 = \frac{5+2i}{i}, z_3 = \frac{3}{i}, z_4 = \frac{1}{1+3i},$$

$$z_5 = \frac{1+i}{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}, z_6 = \frac{(1+i)^3}{1-i}, z_7 = \frac{(1-i)^4}{(1+i)^2}.$$

Exercice 1.6. Résoudre les équations :

a) $(4+i)z = 1+i$, b) $(2-i)z = 3+i$, c) $3z-5 = iz+3i$, d) $z+2i+3iz+5 = \frac{1}{i}z+1+3i$.

Exercice 1.7. Résoudre les équations suivantes :

a) $x^2 + 3 = 0$, b) $(2x-5)^2 + 4 = 0$, c) $x^2 + 2x + 2 = 0$, d) $3x^2 + 6x + 2 = 0$.

2. Représentation géométrique d'un nombre complexe.

Exercice 2.1. Placer sur le plan les points $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ d'affixes respectives $z_1 = 2+i$, $z_2 = -3+2i$, $z_3 = -1-2i$, $z_4 = 3+4i$, $z_5 = 3i$, $z_6 = -4$.

Exercice 2.2. Soient les points A, B et C d'affixes $z_A = 3-5i$, $z_B = 1+i$ et $z_C = 2-2i$. Montrer que C est le milieu de $[AB]$.

Exercice 2.3. 1) Placer les points M_1, M_2, M_3 d'affixes respectifs $z_1 = \sqrt{3}-i$, $\sqrt{3}+i$ et $z_3 = 2i$. Calculer $|z_1|, |z_2|, |z_3|$. En déduire que M_1, M_2, M_3 appartiennent à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

2) Montrer que le quadrilatère $OM_1M_2M_3$ est un losange.

Exercice 2.4. 1) Placer les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -\frac{1}{3} + 2i$, $z_B = 1+2i$ et $z_C = \frac{7}{3} + 2i$. Calculer l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Calculer leur rapport. En déduire que A, B et C sont alignés.

2) Placer les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -2-i$, $z_B = 1+5i$, $z_C = -3-7i$ et $z_D = 2+3i$. Calculer l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. En déduire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice 2.5. 1) Placer les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -2+i$, $z_B = 1+4i$, $z_C = -1+3i$ et $z_D = 1+i$. Calculer l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ puis leur quotient. En déduire que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

2) Soient les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -1+i$, $z_B = -1-i$, $z_C = 2i$ et $z_D = 2-2i$. Montrer que A, O et D sont alignés. Montrer que ACD est un triangle rectangle en A . Etudier la nature du triangle BCD .

3. Argument et forme trigonométrique d'un nombre complexe.

Exercice 3.1. 1) Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 1 - i, \quad z_3 = i, \quad z_4 = -i, \quad z_5 = 3, \quad z_6 = -8, \\ z_7 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_8 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}, \quad z_9 = 1 - i\sqrt{3}.$$

- 2) Exprimer en fonction de $|z|$ et de $\arg z$, le module et l'argument de $-z$ et de $\bar{z}$.
 3) Pourrait-on parler d'argument pour le nombre 0.
 4) Soit $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. Calculer $z + \bar{z}$ et $z - \bar{z}$.
 5) Ecrire sous forme cartésienne les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}), \quad z_2 = 4(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}), \quad z_3 = 12(\cos \frac{25\pi}{4} + i \sin \frac{25\pi}{4}), \\ z_4 = 15(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2})), \quad z_5 = 2(\cos \frac{-15\pi}{2} + i \sin \frac{-15\pi}{2}).$$

Exercice 3.2. Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(\sqrt{2} + i\sqrt{2}), \quad z_2 = (1 + i)(1 - i\sqrt{3}), \quad z_3 = \frac{1}{1 - i\sqrt{3}}, \quad z_4 = \frac{1}{1 + i}, \\ z_5 = \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}(1 - i)}, \quad z_6 = \frac{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}{2(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})}, \quad z_7 = \frac{1 - i}{1 + i}.$$

Exercice 3.3. 1) Montrer que l'équation du second degré $z^2 - 6z + 12$ admet pour solution $z_1 = 3 - i\sqrt{3}$ et $z_2 = 3 + i\sqrt{3}$. Ecrire sous forme trigonométrique ces deux solutions.

- 2) Calculer sous forme algébrique et sous forme trigonométrique le produit $(3 + i\sqrt{3})(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$.
 3) Dédurre de la question précédente les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et de $\sin \frac{5\pi}{12}$.

4. Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul.

Exercice 4.1. a) Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 8, \quad z_2 = -3, \quad z_3 = 5i, \quad z_4 = -3i, \quad z_5 = 2 + 2i, \quad z_6 = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_7 = 1 - i\sqrt{3}.$$

b) Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad z_3 = \sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}},$$

6. NOMBRES COMPLEXES. EXERCICES

c) Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$z_1 = (1 - i)^8, \quad z_2 = \left(\frac{i}{1 + i} \right)^{2007}.$$

d) Ecrire sous forme exponentielle les nombres $z_1, \dots, z_7$ de l'Exercice 3.2 : on referra les calculs en utilisant la forme exponentielle d'un nombre complexe.

Exercice 4.2. Exprimer $\cos nx$ et $\sin nx$ en fonction des puissances de $\cos x$ et de $\sin x$ pour $n = 4$ et $n = 5$.

Exercice 4.3. Linéariser $\cos^n x$ et $\sin^n x$ pour $n = 3, 4, 5$.

Exercice 4.4 a) Résoudre $z^6 = 1$.

b) Résoudre

$$z^3 = 3, \quad z^3 = 8i, \quad z^4 = 1 + i.$$

c) Résoudre $z^3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$. Calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

d) Trouver z tel que $z^2 = 5 - 12i$.

5. Nombres complexes en géométrie.

Exercice 5.1. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 1 + 3i$, $b = 2 + i$ et $c = -1 + 2i$. Calculer $Z = \frac{b-a}{c-a}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.

Exercice 5.2. A tout nombre complexe z , distinct de i , d'image M , on associe le nombre complexe

$$Z = \frac{z-2}{z-i}.$$

a) Interpréter géométriquement $|Z|$ et $\arg Z$ à l'aide des images A et B de 2 et de i .

b) Déterminer l'ensemble E_1 des points M du plan, d'affixe Z , tels que $|Z| = 1$.

c) Déterminer l'ensemble E_2 des points M du plan tels que Z soit réel.

d) Déterminer l'ensemble E_3 des points M du plan tels que Z soit imaginaire pur.

Exercice 5.3. Placer les points $A(2, 2)$, $B(-1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3})$ et $C(-1 + \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3})$. Montrer, en utilisant le module et l'argument d'un nombre complexe bien choisi, que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 5.4. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = -1 + i$, $b = -1 - i$, $c = 2i$, $d = 2 - 2i$.

6. NOMBRES COMPLEXES. EXERCICES

- a) Calculer, sous forme algébrique, les nombres complexes $\frac{c-a}{d-a}$ et $\frac{c-b}{d-b}$.
- b) En déduire la nature des triangles ACD et BCD .
- c) Montrer que les points A , B , C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 5.5. Soit A le point d'affixe $-2 + 3i$ et soit B le point d'affixe $1 - 3i$. À z on associe z' tel que

$$z' = \frac{z - 1 + 3i}{z + 2 - 3i}.$$

Déterminer et construire l'ensemble E des points M du plan tels que z' ait pour argument $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 5.6. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Soit L une transformation du plan et f la fonction complexe associée. Soient A et B du point du plan d'affixes respectifs z_A et z_B .

Calculer l'affixe $z_{A'} = f(z_A)$ et $z_{B'} = f(z_B)$ des points A' et B' et représenter l'image (D') par L de la droite (D) passant par les points A et B pour les cas suivants :

- a) $A(2, 1)$, $B(1, 2)$, $L = T$ translation de vecteur $\vec{u}(2, 1)$.
- b) $A(2, 3)$, $B(3, 1)$, $L = H$ homothétie de rapport $k = \frac{5}{2}$ et de centre $\Omega(1, \frac{3}{2})$.
- c) $A(1 + 2\cos\frac{\pi}{12}, 1 + 2\sin\frac{\pi}{12})$, $B(1 + 4\cos\frac{\pi}{6}, 1 + 4\sin\frac{\pi}{6})$, $L = R$ rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre $\Omega(1, 1)$.

7. Nombres complexes. Correction des exercices.

1. Définition des nombres complexes, opérations.

Exercice 1.1. Donner la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

$$a) 1 + 2i, b) 1 - 2i, c) -1 + i\sqrt{3}, d) 5i - 1, e) 27, f) 3i, g) -2\pi.$$

Réponse. On a :

$$\begin{aligned} a) \operatorname{Re}(1 + 2i) &= 1, \operatorname{Im}(1 + 2i) = 2, b) \operatorname{Re}(1 - 2i) = 1, \operatorname{Im}(1 - 2i) = -2, \\ c) \operatorname{Re}(-1 + i\sqrt{3}) &= -1, \operatorname{Im}(-1 + i\sqrt{3}) = \sqrt{3} \\ d) \operatorname{Re}(5i - 1) &= -1, \operatorname{Im}(5i - 1) = 5, e) \operatorname{Re}(27) = 27, \operatorname{Im}(27) = 0, \\ f) \operatorname{Re}(3i) &= 0, \operatorname{Im}(3i) = 3, g) \operatorname{Re}(-2\pi) = -2\pi, \operatorname{Im}(-2\pi) = 0. \end{aligned}$$

Exercice 1.2. Addition de nombres complexes.

a) Mettre sous forme algébrique les nombres suivants :

$$\begin{aligned} A &= (3 + i) - (5 + 2i) - (3 + i), B = -(2 + i) + 3 + 5i, \\ C &= -(10 + 5i) - i - (4 + 9i), D = 3 + 5i - (2 + i), \\ E &= 1 + i + [5 + i - (3 - i)], F = (1 + i + 5 + i) - (3 - i), \\ G &= 5 - 2i - (3 - i) - (4 + 2 + i) + (3 - 4i) - (1 + 2i). \end{aligned}$$

b) soit $z = 5 - 2i$, calculer $z + \bar{z}$ et $z - \bar{z}$. Que remarque-t-on.

Réponse. a) On a :

$$\begin{aligned} A &= (3 + i) - (5 + 2i) - (3 + i) = -(5 + 2i) = -5 - 2i, \\ B &= -(2 + i) + 3 + 5i = -2 - i + 3 + 5i = 1 + 4i, \\ C &= -(10 + 5i) - i - (4 + 9i) = -10 - 5i - i - 4 - 9i = -14 - 15i, \\ D &= 3 + 5i - (2 + i) = 3 + 5i - 2 - i = 1 + 4i, \\ E &= 1 + i + [5 + i - (3 - i)] = 1 + i + 5 + i - 3 + i = 3 + 3i, \\ F &= (1 + i + 5 + i) - (3 - i) = 6 + 2i - 3 + i = 3 + 3i, \\ G &= 5 - 2i - (3 - i) - (4 + 2 + i) + (3 - 4i) - (1 + 2i) \\ &= 5 - 2i - 3 + i - 6 - i + 3 - 4i - 1 - 2i = -2 - 8i. \end{aligned}$$

b) On a :

$$\begin{aligned} z &= 5 - 2i, z + \bar{z} = 5 - 2i + 5 + 2i = 10 = 2\operatorname{Re}(z), \\ z - \bar{z} &= 5 - 2i - (5 + 2i) = -4i = 2i\operatorname{Im}(z), \end{aligned}$$

7. NOMBRES COMPLEXES. CORRECTION DES EXERCICES

Les relations $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$ sont vraies pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 1.3. Produit de nombres complexes. Exemple :

$$(3 - i)(4 + i) = 12 + 3i - 4i - i^2 = 12 + 3i - 4i + 1 = 13 - i.$$

Mettre sous forme algébrique les nombres suivants :

$$\begin{aligned} A &= (1 + 2i)(3 + 4i), \quad B = (-2 + i)(1 + i), \quad C = (1 + i)(1 - i), \quad D = 3(2 + i), \\ E &= i(2 - i\sqrt{2}), \quad F = i \times 2i, \quad G = (3 - i)^2, \quad H = (1 + i)^3, \quad I = (a + bi)(a - bi), \\ J &= (7 - i)^2, \quad K = (2 - 3i)(2 + 3i), \quad L = (2 - i)^4. \end{aligned}$$

Réponse. Pour le calcul de J , K et de L ci-dessous, on a utilisé les identités remarquables. On a alors :

$$\begin{aligned} A &= (1 + 2i)(3 + 4i) = 3 + 4i + 6i + 8i^2 = 3 + 10i - 8 = -5 + 10i, \\ B &= (-2 + i)(1 + i) = -2 - 2i + i + i^2 = -2 - i - 1 = -3 - i, \\ C &= (1 + i)(1 - i) = 1 - i + i - i^2 = 1 + 1 = 2 \\ \text{ou } C &= (1 + i)(1 - i) = 1^2 - i^2 = 2, \\ D &= 3(2 + i) = 6 + 3i, \\ E &= i(2 - i\sqrt{2}) = 2i - i^2\sqrt{2} = \sqrt{2} + 2i, \\ F &= i \times 2i = 2i^2 = -2, \\ G &= (3 - i)^2 = (3 - i)(3 - i) = 9 - 3i - 3i + i^2 = 9 - 6i - 1 = 8 - 6i \\ \text{ou } G &= (3 - i)^2 = 3^2 - 2 \times 3i + i^2 = 8 - 6i, \\ H &= (1 + i)^3 = (1 + i)(1 + i)(1 + i) = (1 + i)(1 + i + i + i^2) \\ &= (1 + i) \times (2i) = 2i + 2i^2 = -2 + 2i \\ \text{ou } H &= (1 + i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = -2 + 2i, \\ I &= (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + bai - b^2i^2 = a^2 + b^2 \\ \text{ou } I &= (a + bi)(a - bi) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2, \\ J &= (7 - i)^2 = 7^2 - 14i + i^2 = 48 - 14i, \\ K &= (2 - 3i)(2 + 3i) = 2^2 - (3i)^2 = 4 + 9 = 13, \\ L &= (2 - i)^4 = ((2 - i)^2)^2 = (2^2 - 4i + i^2)^2 = (3 - 4i)^2 \\ &= 3^2 - 24i + (4i)^2 = 9 - 24i - 16 = -7 - 24i. \end{aligned}$$

Exercice 1.4. Nombre conjugué.

a) Donner le conjugué de $z = 3 + 2i$.

b) Que peut-t-on dire des nombres complexes $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$.

7. NOMBRES COMPLEXES. CORRECTION DES EXERCICES

c) Donner le conjugué des nombres complexes suivants

$$z_1 = 1 - i, \quad z_2 = -i + \sqrt{3}, \quad z_3 = i, \quad z_4 = 3, \quad z_5 = -2 - i, \quad z_6 = -i\pi.$$

d) Exprimer en fonction de z le conjugué de $\bar{z}$.

e) Quels sont les nombres complexes égaux à leur conjugué.

f) Quel est le conjugué d'un imaginaire pur ?

Réponse.

a) On a $z = 3 + 2i$, $\bar{z} = 3 - 2i$.

b) On a $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc $z_1 = z_2$, car z_1 et z_2 ont même partie réelle et même partie imaginaire (unicité de la décomposition algébrique d'un nombre complexe).

c) Donner le conjugué des nombres complexes suivants

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 - i, \quad \bar{z}_1 = 1 + i, \\ z_2 &= -i + \sqrt{3} = \sqrt{3} - i, \quad \bar{z}_2 = \sqrt{3} + i, \\ z_3 &= i, \quad \bar{z}_3 = -i, \\ z_4 &= 3, \quad \bar{z}_4 = 3, \\ z_5 &= -2 - i, \quad \bar{z}_5 = -2 + i, \\ z_6 &= -i\pi, \quad \bar{z}_6 = i\pi. \end{aligned}$$

d) Expression du conjugué de $\bar{z}$ en fonction de z . On a $z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$, $\bar{z} = \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)$ et donc $\bar{\bar{z}} = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z) = z$.

e) Nombre complexe égal à son conjugué. On a

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z) \Leftrightarrow i\operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

f) Nombre conjugué d'un nombre imaginaire pur. Si z est un nombre complexe imaginaire pur alors $z = ib$ avec $b = \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$ et $\bar{z} = -ib = -z$. Donc $\bar{z} = -z$.
Donc

$$z \in i \times \mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z}.$$

Exercice 1.5. Quotient de nombres complexes. Ecrire sous forme algébrique :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{3 - 2i}{5 + i}, \quad z_2 = \frac{5 + 2i}{i}, \quad z_3 = \frac{3}{i}, \quad z_4 = \frac{1}{1 + 3i}, \\ z_5 &= \frac{1 + i}{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}, \quad z_6 = \frac{(1 + i)^3}{1 - i}, \quad z_7 = \frac{(1 - i)^4}{(1 + i)^2}. \end{aligned}$$

Réponse. On a :

$$z_1 = \frac{3-2i}{5+i} = \frac{(3-2i)(5-i)}{(5+i)(5-i)} = \frac{15-3i-10i+2i^2}{5^2-i^2} = \frac{13-13i}{26} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2},$$

$$z_2 = \frac{5+2i}{i} = \frac{(5+2i) \times (-i)}{i \times (-i)} = -5i+2 = 2-5i,$$

$$z_3 = \frac{3}{i} = \frac{3 \times (-i)}{i \times (-i)} = -3i, \left(\frac{1}{i} = -i\right),$$

$$z_4 = \frac{1}{1+3i} = \frac{1-3i}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{1-3i}{1+9} = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i,$$

$$z_5 = \frac{1+i}{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{(1+i)(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)}{(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}i^2}{(\frac{3}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2},$$

$$= \frac{3 + \sqrt{3} + (3 - \sqrt{3})i}{2 \times (\frac{9}{4} + \frac{3}{4})} = \frac{3 + \sqrt{3} + (3 - 2\sqrt{3})i}{2 \times 3} = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} + \frac{3 - \sqrt{3}}{6}i,$$

$$z_6 = \frac{(1+i)^3}{1-i} = \frac{(1+i)^3(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+i)^2(1+i)^2}{1^2+1^2} = \frac{(1+2i+i)^2}{2} = \frac{(2i)^2}{2} = -2,$$

$$z_7 = \frac{(1-i)^4}{(1+i)^2} = \frac{(1-i)^4(1-i)^2}{(1+i)^2(1-i)^2} = \frac{((1-i)^2)^3}{((1+i)(1-i))^2} = \frac{(1-2i+i^2)^3}{(1^2+1^2)^2} \\ = \frac{(-2i)^3}{2^2} = \frac{(-1)^3 2^3 i^3}{2^2} = 2i.$$

On remarque que $i^{-1} = \frac{1}{i} = -i$ car $i \times (-i) = -i^2 = 1$.

Exercice 1.6. Résoudre les équations :

$$a) (4+i)z = 1+i, \quad b) (2-i)z = 3+i, \quad c) 3z-5 = iz+3i, \quad d) z+2i+3iz+5 = \frac{1}{i}z+1+3i.$$

Réponse. On résout les équations du premier degré suivantes.

$$a) (4+i)z = 1+i \Leftrightarrow z = \frac{1+i}{4+i} = \frac{(1+i)(4-i)}{(4+i)(4-i)} = \frac{4-i+4i-i^2}{4^2+1} = \frac{5}{17} + \frac{3}{17}i,$$

$$b) (2-i)z = 3+i \Leftrightarrow z = \frac{3+i}{2-i} = \frac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{(3+i)(2+i)}{2^2+1} \\ = \frac{6+3i+2i+i^2}{2^2+1} = \frac{5+5i}{4} = 1+i,$$

$$c) 3z-5 = iz+3i \Leftrightarrow z(3-i) = 5+3i \Leftrightarrow z = \frac{5+3i}{4+i} = \frac{(5+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} \\ = \frac{15+5i+9i+3i^2}{3^2+1} = \frac{12+14i}{10} = \frac{6}{5} + \frac{7}{5}i,$$

$$d) z+2i+3iz+5 = \frac{1}{i}z+1+3i \Leftrightarrow z(1+3i) + 5+2i = -iz+1+3i$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow z(1+4i) = i-4 \\
 &\Leftrightarrow z = \frac{i-4i}{1+4i} = \frac{(i-4)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)} \\
 &= \frac{i-4i^2-4+16i}{1^2+4^2} = \frac{17i}{17} = i.
 \end{aligned}$$

Exercice 1.7. Résoudre les équations suivantes :

a) $x^2 + 3 = 0$, b) $(2x - 5)^2 + 4 = 0$, c) $x^2 + 2x + 2 = 0$, d) $3x^2 + 6x + 2 = 0$.

Réponse. On résout les équations du second degré suivantes.

a) $x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -3 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3}i$ ou $x = \sqrt{3}i$,

b) $(2x - 5)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (2x - 5)^2 = -4 \Leftrightarrow 2x - 5 = -2i$ ou $2x - 5 = 2i$
 $\Leftrightarrow x = \frac{5}{2} - i$ ou $x = \frac{5}{2} + i$,

c) $x^2 + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = -1$,

c bis) $x^2 + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2}$
 $\Leftrightarrow x = -1 - i$ ou $x = -1 + i$,

d) $3x^2 + 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 3 \times 2}}{2 \times 3} = \frac{-6 \pm \sqrt{12}}{6} = -1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. Représentation géométrique d'un nombre complexe.

Exercice 2.1. Placer sur le plan les points $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ d'affixes respectives $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -3 + 2i$, $z_3 = -1 - 2i$, $z_4 = 3 + 4i$, $z_5 = 3i$, $z_6 = -4$.

Réponse. On place sur la Figure 2.1, les points $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ d'affixes respectives $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -3 + 2i$, $z_3 = -1 - 2i$, $z_4 = 3 + 4i$, $z_5 = 3i$, $z_6 = -4$.

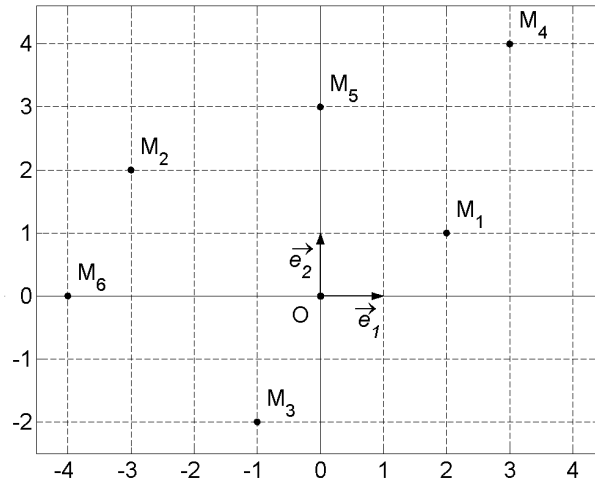


Figure 2.1. Représentation géométrique des nombres complexes $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$.

7. NOMBRES COMPLEXES. CORRECTION DES EXERCICES

Exercice 2.2. Soient les points A , B et C d'affixes $z_A = 3 - 5i$, $z_B = 1 + i$ et $z_C = 2 - 2i$. Montrer que C est le milieu de $[AB]$.

Réponse. Soient A , B et C les points d'affixes respectifs $z_A = 3 - 5i$, $z_B = 1 + i$ et $z_C = 2 - 2i$, alors

$$\frac{z_A + z_B}{2} = \frac{3 - 5i + 1 + i}{2} = \frac{4 - 4i}{2} = z_C.$$

Donc, d'après la Propriété 2.3 (affixe d'un barycentre) C est le milieu de $[A, B]$. On peut encore le vérifier directement en écrivant que :

$$z_A + z_B = 2z_C \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{OA}} + z_{\overrightarrow{OB}} = 2z_{\overrightarrow{OC}} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}} = z_{2\overrightarrow{OC}} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OC}.$$

Exercice 2.3. 1) Placer les points M_1 , M_2 , M_3 d'affixes respectifs $z_1 = \sqrt{3} - i$, $\sqrt{3} + i$ et $z_3 = 2i$. Calculer $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_3|$. En déduire que M_1 , M_2 , M_3 appartiennent à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

2) Montrer que le quadrilatère $OM_1M_2M_3$ est un losange.

Réponse. 1) On place, à la Figure 2.2, les points M_1 , M_2 , M_3 d'affixes respectifs $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$ et $z_3 = 2i$.

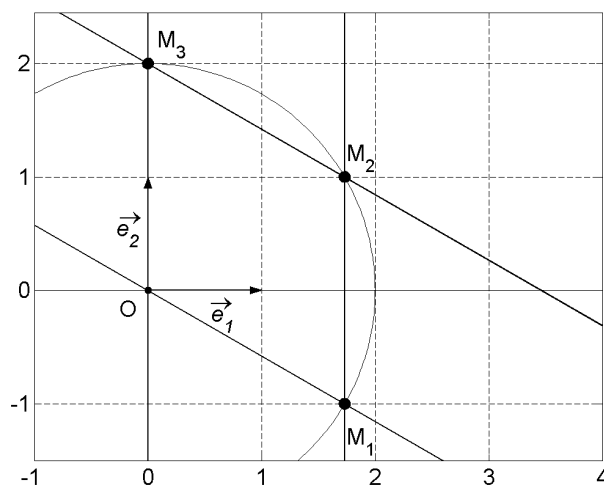


Figure 2.2. Représentation géométrique des nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$ et $z_3 = 2i$.

On a

$$|z_1| = |z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2, \quad |z_3| = 2.$$

On a donc $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2 \Leftrightarrow OM_1 = OM_2 = OM_3$. On en déduit que M_1 , M_2 , M_3 sont sur le cercle de centre O et de rayon 2.

2) Le quadrilatère $OM_1M_2M_3$ est un losange si $OM_1M_2M_3$ est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur. On a

$$z_{\overrightarrow{OM_1}} = z_{M_1} - z_O = \sqrt{3} - i, \quad z_{\overrightarrow{M_3M_2}} = z_{M_2} - z_{M_3} = \sqrt{3} + i - 2i = \sqrt{3} - i.$$

Donc $z_{\overrightarrow{OM_1}} = z_{\overrightarrow{M_3M_2}} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{M_3M_2}$ et $OM_1M_2M_3$ est un parallélogramme. Ensuite

$$OM_1 = |z_{\overrightarrow{OM_1}}| = |z_{M_1}| = 2,$$

$$M_1M_2 = |z_{\overrightarrow{M_1M_2}}| = |z_{M_2} - z_{M_1}| = |\sqrt{3} + i - (\sqrt{3} - i)| = |2i| = 2.$$

Donc $OM_1 = M_1M_2$, le parallélogramme $OM_1M_2M_3$ a deux côtés consécutifs égaux, c'est donc un losange.

Exercice 2.4. 1) Placer les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = -\frac{1}{3} + 2i$, $z_B = 1 + 2i$ et $z_C = \frac{7}{3} + 2i$. Calculer l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Calculer leur rapport. En déduire que A , B et C sont alignés.

2) Placer les points A , B , C et D d'affixes respectives $z_A = -2 - i$, $z_B = 1 + 5i$, $z_C = -3 - 7i$ et $z_D = 2 + 3i$. Calculer l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. En déduire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Réponse. 1) On place à la Figure 2.3a les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = -\frac{1}{3} + 2i$, $z_B = 1 + 2i$ et $z_C = \frac{7}{3} + 2i$.

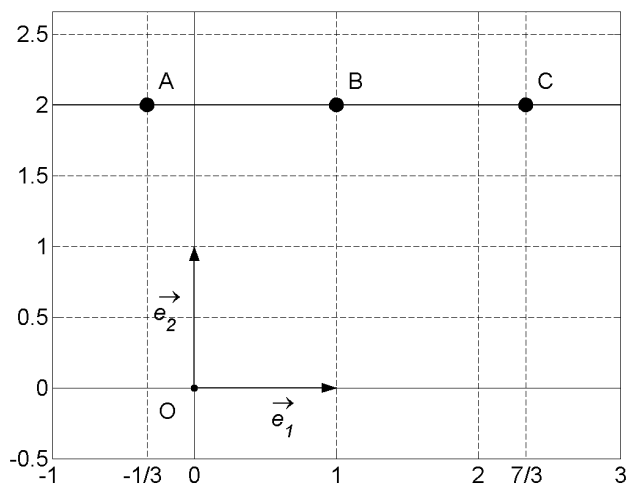


Figure 2.3a. Représentation géométrique des nombres complexes $z_A = -\frac{1}{3} + 2i$, $z_B = 1 + 2i$ et $z_C = \frac{7}{3} + 2i$. On remarque que A , B et C ont mêmes ordonnées $y = 2$ et sont donc alignés.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour affixes respectifs :

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 1 + 2i - \left(-\frac{1}{3} + 2i\right) = \frac{4}{3}, \quad z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = \frac{7}{3} + 2i - \left(-\frac{1}{3} + 2i\right) = \frac{8}{3}$$

et le rapport $\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{BC}}} = \frac{1}{2}$ est un nombre réel. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont donc colinéaires, avec un point commun, donc A , B et C sont alignés.

2) On place à la Figure 2.3b les points A , B , C et D d'affixes respectives $z_A = -2 - i$, $z_B = 1 + 5i$, $z_C = -3 - 7i$ et $z_D = 2 + 3i$.

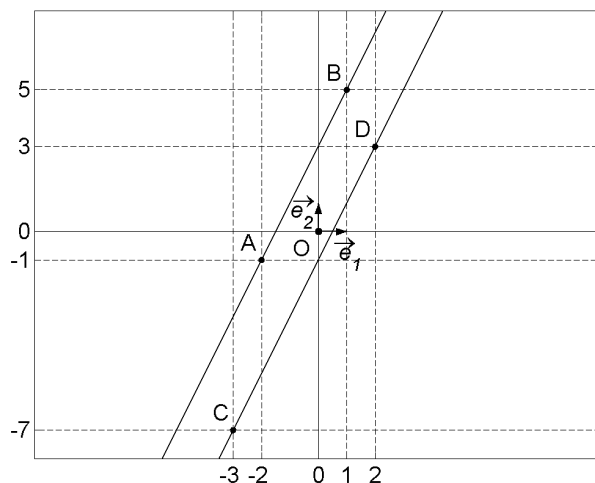


Figure 2.3b. Représentation géométrique des nombres complexes $z_A = -2 - i$, $z_B = 1 + 5i$, $z_C = -3 - 7i$ et $z_D = 2 + 3i$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont pour affixes respectifs

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AB}} &= z_B - z_A = 1 + 5i - (-2 - i) = 3 + 6i, \\ z_{\overrightarrow{CD}} &= z_D - z_C = 2 + 3i - (-3 - 7i) = 5 + 10i \end{aligned}$$

et le rapport

$$\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{CD}}} = \frac{3 + 6i}{5 + 10i} = \frac{3}{5} \times \frac{1 + 2i}{1 + 2i} = \frac{3}{5},$$

est un nombre réel. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont donc colinéaires et les droites (AB) et (CD) sont parallèles. On remarque que A , B et D ne sont pas alignés et donc que les droites (AB) et (CD) sont disjointes. En effet, avec $z_{\overrightarrow{BD}} = z_D - z_B = 2 + 3i - (1 + 5i) = 1 - 2i$, le rapport

$$\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{BD}}} = \frac{3 + 6i}{1 - 2i} = \frac{(3 + 6i)(1 + 2i)}{1 + 2^2} = \frac{3 + 6i + 6i - 12}{5} = \frac{-9 + 12i}{5},$$

n'est pas un nombre réel pur. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BD}$ ne sont donc pas colinéaires, et les points A , B et D ne sont pas alignés.

Exercice 2.5. 1) Placer les points A , B , C et D d'affixes respectives $z_A = -2 + i$, $z_B = 1 + 4i$, $z_C = -1 + 3i$ et $z_D = 1 + i$. Calculer l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ puis leur quotient. En déduire que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

7. NOMBRES COMPLEXES. CORRECTION DES EXERCICES

2) Soient les points A , B , C et D d'affixes respectives $z_A = -1 + i$, $z_B = -1 - i$, $z_C = 2i$ et $z_D = 2 - 2i$. Montrer que A , O et D sont alignés. Montrer que ACD est un triangle rectangle en A . Etudier la nature du triangle BCD .

Réponse. 1) On place les points A , B , C et D d'affixes respectives $z_A = -2 + i$, $z_B = 1 + 4i$, $z_C = -1 + 3i$ et $z_D = 1 + i$ (cf. Figure 2.4a). Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont pour affixes respectifs :

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AB}} &= z_B - z_A = 1 + 4i - (-2 + i) = 3 + 3i, \\ z_{\overrightarrow{CD}} &= z_D - z_C = 1 + i - (-1 + 3i) = 2 - 2i, \end{aligned}$$

le rapport

$$\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{CD}}} = \frac{3 + 3i}{2 - 2i} = \frac{(3 + 3i)(2 + 2i)}{2^2 + 2^2} = \frac{6(1 + i)(1 + i)}{8} = \frac{3(1 + 2i + i^2)}{4} = \frac{3}{2}i$$

est un nombre imaginaire pur, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont donc orthogonaux et les droites (AB) et (CD) perpendiculaires.

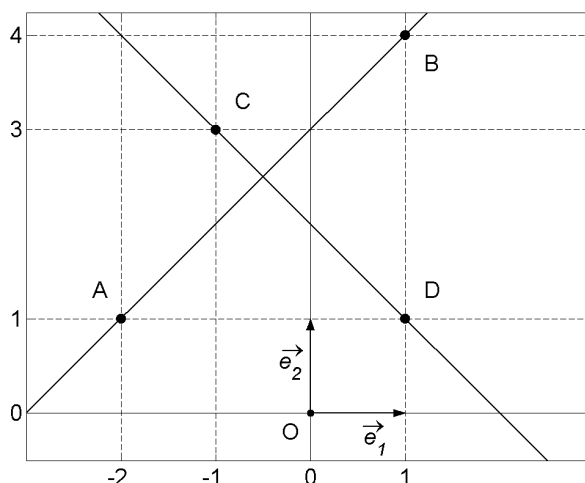


Figure 2.4a. Représentation géométrique des nombres complexes $z_A = -2 + i$, $z_B = 1 + 4i$, $z_C = -1 + 3i$ et $z_D = 1 + i$.

2) On place les points A , B , C et D d'affixes respectives $z_A = -1 + i$, $z_B = -1 - i$,

7. NOMBRES COMPLEXES. CORRECTION DES EXERCICES

$z_C = 2i$ et $z_D = 2 - 2i$ (cf. Figure 2.4b).

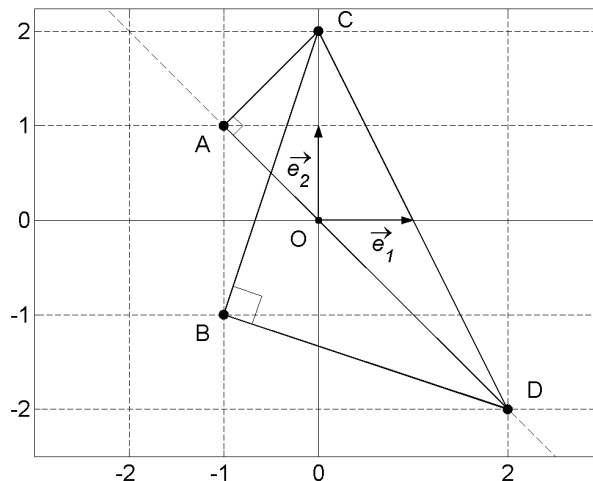


Figure 2.4b. Représentation géométrique des nombres complexes $z_A = -1 + i$, $z_B = -1 - i$, $z_C = 2i$ et $z_D = 2 - 2i$.

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OD}$ ont pour affixes respectifs

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{OA}} &= z_A - z_O = -1 + i, \\ z_{\overrightarrow{OD}} &= z_D - z_O = 2 - 2i, \end{aligned}$$

le rapport

$$\frac{z_{\overrightarrow{OA}}}{z_{\overrightarrow{OD}}} = \frac{-1 + i}{2 - 2i} = \frac{-1}{2} \times \frac{1 - i}{1 - i} = -\frac{1}{2}$$

est un nombre réel pur, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont donc colinéaires, avec un point commun, donc O , A et D sont alignés.

Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ont pour affixes respectifs :

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AC}} &= z_C - z_A = 2i - (-1 + i) = 1 + i, \\ z_{\overrightarrow{AD}} &= z_D - z_A = 2 - 2i - (-1 + i) = 3 - 3i, \end{aligned}$$

donc

$$\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AD}}} = \frac{1 + i}{3 - 3i} = \frac{(1 + i)(3 + 3i)}{3^2 + 3^2} = 3 \times \frac{(1 + i)^2}{18} = 3 \times \frac{1 + 2i + i^2}{18} = \frac{i}{3}.$$

les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont donc orthogonaux et le triangle ACD est rectangle en A .

Nature du triangle BCD . Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ ont pour affixes respectifs :

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{BC}} &= z_C - z_B = 2i - (-1 - i) = 1 + 3i, \\ z_{\overrightarrow{BD}} &= z_D - z_B = 2 - 2i - (-1 - i) = 3 - i, \end{aligned}$$

donc $z_{\overrightarrow{BC}} = iz_{\overrightarrow{BD}}$, le rapport

$$\frac{z_{\overrightarrow{BC}}}{z_{\overrightarrow{BD}}} = i$$

est un nombre imaginaire pur, les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont donc orthogonaux. On a aussi

$$BC = |z_{\overrightarrow{BC}}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}, BD = |z_{\overrightarrow{BD}}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10},$$

Donc $BC = BD$. Le triangle BCD est rectangle en B et isocèle en B . On vérifie que

$$CD^2 = |z_{\overrightarrow{CD}}|^2 = |z_D - z_C|^2 = |2 - 2i - 2i|^2 = |2 - 4i|^2 = 20 = BC^2 + BD^2.$$

3. Argument, forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul.

Exercice 3.1. 1) Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + i, z_2 = 1 - i, z_3 = i, z_4 = -i, z_5 = 3, z_6 = -8, \\ z_7 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_8 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}, z_9 = 1 - i\sqrt{3}.$$

2) Exprimer en fonction de $|z|$ et de $\arg z$, le module et l'argument de $-z$ et de $\bar{z}$.

3) Pourrait-on parler d'argument pour le nombre 0.

4) Soit $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. Calculer $z + \bar{z}$ et $z - \bar{z}$.

5) Ecrire sous forme cartésienne les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}), z_2 = 4(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}), z_3 = 12(\cos \frac{25\pi}{4} + i \sin \frac{25\pi}{4}), \\ z_4 = 15(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2})), z_5 = 2(\cos \frac{-15\pi}{2} + i \sin \frac{-15\pi}{2}).$$

Réponse. 1) On calcule le module et argument des nombres complexes suivants.

$$z_1 = 1 + i, z_2 = 1 - i, z_3 = i, z_4 = -i, z_5 = 3, z_6 = -8, \\ z_7 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_8 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}, z_9 = 1 - i\sqrt{3}.$$

Pour faire apparaître la forme trigonométrique de z_1 , on met le module de z_1 en facteur :

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}},$$

7. NOMBRES COMPLEXES. CORRECTION DES EXERCICES

donc

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow |z_1| = \sqrt{2}, \arg z_1 = \frac{\pi}{4}.$$

Ensuite :

$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i) = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4})) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}},$$

donc

$$z_2 = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4})) \Leftrightarrow |z_2| = \sqrt{2}, \arg z_2 = -\frac{\pi}{4}.$$

On a :

$$\begin{aligned} z_3 &= i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow |z_3| = 1, \arg z_3 = \frac{\pi}{2}, \\ z_4 &= -i = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow |z_4| = 1, \arg z_4 = -\frac{\pi}{2}, \\ z_5 &= 3 = 3(\cos 0 + i \sin 0) \Leftrightarrow |z_5| = 3, \arg z_5 = 0, \\ z_6 &= -8 = 8(\cos \pi + i \sin \pi) \Leftrightarrow |z_6| = 8, \arg z_6 = \pi, \\ z_7 &= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow |z_7| = 1, \arg z_7 = \frac{2\pi}{3}, \\ z_8 &= \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow |z_8| = 2, \arg z_8 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 3.1 (suite). 2) Expression de $-z$ et de $\bar{z}$ en fonction de $|z|$ et de $\arg z$ (cf. aussi la Propriété 3.2). Posons $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg z$. On a

$$-z = -r(\cos \theta + i \sin \theta) = r(\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)).$$

On a donc

$$|-z| = |z|, \arg(-z) = \arg z - \pi = \arg z + \pi \pmod{2\pi}.$$

En particulier si l'on choisit l'argument de z et de $-z$ dans $] -\pi, \pi]$:

$$\arg(-z) = \arg z + \pi \text{ si } \arg z \in] -\pi, 0], \arg(-z) = \arg z - \pi \text{ si } \arg z \in]0, \pi].$$

Ensuite

$$\bar{z} = r(\cos \theta - i \sin \theta) = r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) \Leftrightarrow |\bar{z}| = |z|, \arg \bar{z} = -\arg(z) \pmod{2\pi}.$$

En particulier si l'on choisit l'argument de z et de $\bar{z}$ dans $] -\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned} \arg(\bar{z}) &= -\arg z \text{ si } \arg z \in] -\pi, \pi[, \\ \arg(\bar{z}) &= \pi = -\arg z + 2\pi \text{ si } \arg z = \pi \text{ (donc } z \in \mathbb{R}^-). \end{aligned}$$

Exercice 3.1 (suite). 3) Pourrait-on parler d'argument pour le nombre 0. L'argument de ce nombre n'a pas été défini. En particulier, on n'a pas défini l'angle $(\vec{OO}, \vec{e}_1)$.

Exercice 3.1 (suite). 4) Soit $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. Calcul de $z + \bar{z}$ et $z - \bar{z}$. On a

$$z + \bar{z} = r(\cos \theta + i \sin \theta) + r(\cos \theta - i \sin \theta) = 2r \cos \theta = 2\operatorname{Re}(z)$$

et

$$z - \bar{z} = r(\cos \theta + i \sin \theta) - r(\cos \theta - i \sin \theta) = 2ri \sin \theta = 2i\operatorname{Im}(z).$$

Exercice 3.1 (suite). 5) Mise sous forme cartésienne des nombres complexes suivants :

$$\begin{aligned} z_1 &= 2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}), \quad z_2 = 4(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}), \quad z_3 = 12(\cos \frac{25\pi}{4} + i \sin \frac{25\pi}{4}), \\ z_4 &= 15(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2})), \quad z_5 = 2(\cos(\frac{-15\pi}{2}) + i \sin(\frac{-15\pi}{2})). \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} z_1 &= 2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}, \\ z_2 &= 4(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) = 4(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2 + 2i\sqrt{3}, \\ z_3 &= 12(\cos \frac{25\pi}{4} + i \sin \frac{25\pi}{4}) = 12(\cos \frac{(24+1)\pi}{4} + i \sin \frac{(24+1)\pi}{4}) \\ &= 12(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = 12(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 6\sqrt{2} + 6i\sqrt{2}, \\ z_4 &= 15(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2})) = -15i, \\ z_5 &= 2(\cos(\frac{-15\pi}{2}) + i \sin(\frac{-15\pi}{2})) = 2(\cos \frac{(-16+1)\pi}{2} + i \sin \frac{(-16+1)\pi}{2}) \\ &= 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = 2i. \end{aligned}$$

Exercice 3.2. Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$\begin{aligned} z_1 &= (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(\sqrt{2} + i\sqrt{2}), \quad z_2 = (1+i)(1-i\sqrt{3}), \quad z_3 = \frac{1}{1-i\sqrt{3}}, \quad z_4 = \frac{1}{1+i}, \\ z_5 &= \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}(1-i)}, \quad z_6 = \frac{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}{2(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})}, \quad z_7 = \frac{1-i}{1+i}. \end{aligned}$$

Réponse. Pour mettre une des expressions ci-dessus sous forme trigonométrique, on pourra, au préalable, la simplifier puis, pour chacun des termes du produit ou du quotient définissant cette expression, mettre en facteur le module du terme

7. NOMBRES COMPLEXES. CORRECTION DES EXERCICES

afin de déterminer sa forme trigonométrique. Par exemple pour z_1 , on calcule les modules suivants :

$$|-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1, \quad |\sqrt{2} + i\sqrt{2}| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2.$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} z_1 &= (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) \\ &= (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) \times 2 \times (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) \\ &= 2(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}) \times (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) \\ &= 2(\cos(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4})) \\ &= 2(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12}). \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} z_2 &= (1 + i)(1 - i\sqrt{3}) \\ &= \sqrt{2} \times (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}) \times 2 \times (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) \\ &= 2\sqrt{2} \times (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) \times (\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})) \\ &= 2\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{12}) + i \sin(-\frac{\pi}{12})), \\ z_3 &= \frac{1}{1 - i\sqrt{3}} = \frac{1}{2(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{1}{2} \frac{1}{(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3}))} = \frac{1}{2}(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}), \\ \text{ou } z_3 &= \frac{1}{1 - i\sqrt{3}} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{(1 - i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})} = \frac{1}{4}(1 + i\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) \\ &= \frac{1}{2}(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}), \\ z_4 &= \frac{1}{1 + i} = \frac{1}{\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4})), \\ z_5 &= \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}(1 - i)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}})} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})}{\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})) \times (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) \\
&= \frac{1}{2}(\cos(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})) \\
&= \frac{1}{2}(\cos(-\frac{\pi}{12}) + i \sin(-\frac{\pi}{12})), \\
z_6 &= \frac{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}{2(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})} \\
&= \frac{1}{2} \times (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) \times (\cos(-\frac{\pi}{12}) + i \sin(-\frac{\pi}{12})) \\
&= \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}) + i \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}) \\
&= \frac{1}{2}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}), \\
z_7 &= \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1^2 - 2i + i^2}{2} = -i = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2}) \\
\text{ou } z_7 &= \frac{1-i}{1+i} = \frac{\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}})}{\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})} = \frac{\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4})}{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}} \\
&= (\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4})) \times (\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4})) \\
&= (\cos(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4})) = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2}) = -i.
\end{aligned}$$

Exercice 3.3. 1) Montrer que l'équation du second degré $z^2 - 6z + 12$ admet pour solution $z_1 = 3 - i\sqrt{3}$ et $z_2 = 3 + i\sqrt{3}$. Ecrire sous forme trigonométrique ces deux solutions.

2) Calculer sous forme algébrique et sous forme trigonométrique le produit $(3 + i\sqrt{3})(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$.

3) Dédurre de la question précédente les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et de $\sin \frac{5\pi}{12}$.

Réponse. 1) On a $\Delta = 6^2 - 4 \times 12 = 36 - 48 = -12$, on a donc deux solutions

$$z_1 = \frac{6 - i\sqrt{12}}{2} = 3 - i\sqrt{3} \text{ et } z_2 = \frac{6 + i\sqrt{12}}{2} = 3 + i\sqrt{3}.$$

On peut le vérifier directement

$$\begin{aligned}
z_1^2 - 6z_1 + 12 &= 3^2 - 6i\sqrt{3} + (i\sqrt{3})^2 - 6(3 - i\sqrt{3}) + 12 = 9 - 3 - 18 + 12 + 6i\sqrt{3} - 6i\sqrt{3} = 0, \\
z_2^2 - 6z_2 + 12 &= 3^2 + 6i\sqrt{3} + (i\sqrt{3})^2 - 6(3 + i\sqrt{3}) + 12 = 9 - 3 - 18 + 12 + 6i\sqrt{3} - 6i\sqrt{3} = 0.
\end{aligned}$$

Forme trigonométrique de z_1 et de z_2 . On a avec $|z_1| = |z_2| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$:

$$z_1 = 3 - i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}(\frac{3}{2\sqrt{3}} - i\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}) = 2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}) = 2\sqrt{3}(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i \sin(-\frac{\pi}{6})).$$

7. NOMBRES COMPLEXES. CORRECTION DES EXERCICES

et

$$z_2 = 3 + i\sqrt{3} = \bar{z}_1 = \sqrt{3}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}).$$

2) On a, en utilisant la forme trigonométrique de z_2 calculée au 1) :

$$\begin{aligned} (3 + i\sqrt{3})(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) &= 2\sqrt{3}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) \\ &= 2\sqrt{3} \cos(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}) \\ &= 2\sqrt{3}(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}). \end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned} (3 + i\sqrt{3})(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}) &= \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3i}{\sqrt{2}} + \frac{i\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{i^2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}i. \end{aligned}$$

3) En identifiant partie réelle et partie imaginaire de la forme algébrique et trigonométrique du produit effectué, on obtient :

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3}(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}) &= \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}i \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{3} \cos \frac{5\pi}{12} &= \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \quad 2\sqrt{3} \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \cos \frac{5\pi}{12} &= \frac{3 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}, \quad \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

4. Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul.

Exercice 4.1. a) Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 8, \quad z_2 = -3, \quad z_3 = 5i, \quad z_4 = -3i, \quad z_5 = 2 + 2i, \quad z_6 = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_7 = 1 - i\sqrt{3}.$$

b) Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad z_3 = \sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}},$$

c) Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$z_1 = (1 - i)^8, \quad z_2 = \left(\frac{i}{1 + i}\right)^{2007}.$$

d) Ecrire sous forme exponentielle les nombres $z_1, \dots, z_7$ de l'Exercice 3.2 : on referra les calculs en utilisant la forme exponentielle d'un nombre complexe.

Réponse. a) On a

$$z_1 = 8 = 8(\cos 0 + i \sin 0) = 8e^{i0},$$

$$z_2 = -3 = 3(\cos \pi + i \sin \pi) = 3e^{i\pi},$$

$$z_3 = 5i = 5(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = 5e^{i\frac{\pi}{2}},$$

$$z_4 = -3i = 3(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2})) = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{ou } z_4 = -3i = \overline{3i} = \overline{3e^{i\frac{\pi}{2}}} = 3e^{-i\frac{\pi}{2}},$$

$$z_5 = 2 + 2i = \sqrt{2^2 + 2^2}(\frac{2}{\sqrt{8}} + \frac{2}{\sqrt{8}}i) = 2\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}},$$

$$z_6 = 1 + i\sqrt{3} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) = 2e^{i\frac{\pi}{3}},$$

$$z_7 = 1 - i\sqrt{3} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 2(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{ou } z_7 = 1 - i\sqrt{3} = \overline{1 + i\sqrt{3}} = \overline{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

Exercice 4.1 (suite). b) Mise sous forme algébrique de nombres complexes.

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

$$z_2 = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2}i,$$

$$z_3 = \sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{3}(\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i \sin(-\frac{2\pi}{3})) = \sqrt{3}(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i.$$

Exercice 4.1 (suite). c) Mise sous forme algébrique de nombres complexes. On utilise la formule de Moivre ou on développe.

Calcul de $z_1 = (1 - i)^8$. On a :

$$1 - i = \sqrt{1^2 + 1^2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}},$$

donc

$$z_1 = (1 - i)^8 = (\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^8 = (\sqrt{2})^8 e^{-i\frac{8\pi}{4}} = [(\sqrt{2})^2]^4 e^{-2i\pi} = 16.$$

On a aussi

$$z_1 = (1 - i)^8 = [(1 - i)^2]^4 = (1 - 2i + i^2)^4 = (-2i)^4 = 16.$$

Calcul de $z_1 = \left(\frac{i}{1+i}\right)^{2007}$. On a

$$\frac{i}{1+i} = \frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Donc, avec $2007 = 2000 + 7 = 8 \times 250 + 7$:

$$\begin{aligned} z_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^{2007} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{2007} e^{i\frac{2007\pi}{4}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{2006} \times \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{8 \times 250 + 7\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2^{1003}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{1}{2^{1003}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2^{1004}} (1-i). \end{aligned}$$

On a aussi

$$(1+i)^{2007} = (1+i)[(1+i)^2]^{1003} = (1+i)(1+2i+i^2)^{1003} = (1+i)(2i)^{1003},$$

d'où

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{i^{2007}}{(1+i)^{2007}} = \frac{i^{2007}(1-i)}{(1+i)(2i)^{1003}(1-i)} = \frac{i^{1004}(1-i)}{2 \times 2^{1003}} \\ &= \frac{(i^4)^{251}(1-i)}{2^{1004}} = \frac{1}{2^{1004}} (1-i). \end{aligned}$$

Exercice 4.1 (suite). d) Ecriture sous forme exponentielle des nombres $z_1, \dots, z_7$ de l'Exercice 3.2.

$$\begin{aligned} z_1 &= \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) \\ &= \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} e^{i\frac{2\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} e^{i(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4})} = \frac{1}{2} e^{i\frac{11\pi}{12}} \\ z_2 &= (1+i)(1-i\sqrt{3}) \\ &= \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \times 2 \times \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3})} = 2\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{12}}, \\ z_3 &= \frac{1}{1-i\sqrt{3}} = \frac{1}{2(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{1}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}}, \\ z_4 &= \frac{1}{1+i} = \frac{1}{\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})} = \frac{1}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}}, \\ z_5 &= \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}(1-i)} = \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}})} = \frac{1}{2} \times \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} e^{i(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})} = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{12}}, \\
z_6 &= \frac{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}{2(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})} = \frac{1}{2} \times e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{-i\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{2} e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12})} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}, \\
z_7 &= \frac{1-i}{1+i} = \frac{\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}})}{\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}.
\end{aligned}$$

Exercice 4.2. Exprimer $\cos nx$ et $\sin nx$ en fonction des puissances de $\cos x$ et de $\sin x$ pour $n = 4$ et $n = 5$.

Réponse. On a $(e^{i\theta})^4 = e^{4i\theta}$, donc en développant $(e^{i\theta})^4 = (\cos \theta + i \sin \theta)^4$, on obtient :

$\cos^4 \theta + 4i \cos^3 \theta \sin \theta + 6i^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 4i^3 \cos \theta \sin^3 \theta + i^4 \sin^4 \theta = \cos 4\theta + i \sin 4\theta$,
donc, en identifiant partie réelle et partie imaginaire :

$$\cos 4\theta = \cos^4 \theta - 6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta, \quad \sin 4\theta = 4 \cos^3 \theta \sin \theta - 4 \cos \theta \sin^3 \theta.$$

On a $(e^{i\theta})^5 = e^{5i\theta}$, donc en développant $(e^{i\theta})^5$:

$$\begin{aligned}
\cos^5 \theta + 5i \cos^4 \theta \sin \theta + 10i^2 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 10i^3 \cos^2 \theta \sin^3 \theta \\
+ 5i^4 \cos \theta \sin^4 \theta + i^5 \sin^5 \theta = \cos 5\theta + i \sin 5\theta,
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\cos 5\theta &= \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta, \\
\sin 5\theta &= \sin^5 \theta - 10 \cos^2 \theta \sin^3 \theta + 5 \cos^4 \theta \sin \theta.
\end{aligned}$$

On peut exprimer $\cos 5\theta$ en fonction de $\cos \theta$, en utilisant la relation $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ dans la première des 2 relations ci-dessus :

$$\begin{aligned}
\cos 5\theta &= \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta \\
&\Leftrightarrow \cos 5\theta = \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta (1 - \cos^2 \theta) + 5 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta)^2 \\
&\Leftrightarrow \cos 5\theta = \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta + 10 \cos^5 \theta + 5 \cos \theta - 10 \cos^3 \theta + 5 \cos^5 \theta \\
&\Leftrightarrow \cos 5\theta = 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta.
\end{aligned}$$

Exercice 4.3. Linéariser $\cos^n x$ et $\sin^n x$ pour $n = 3, 4, 5$.

Réponse. Avec la formule d'Euler et la formule de Moivre on a :

$$\begin{aligned}
\cos^3 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 \\
&= \frac{1}{8} (e^{3ix} + 3e^{2ix} e^{-ix} + 3e^{ix} e^{-2ix} + e^{-3ix}) \\
&= \frac{1}{8} (e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}) \\
&= \frac{1}{8} (e^{3ix} + e^{-3ix} + 3(e^{ix} + e^{-ix})) \\
&= \frac{1}{8} (2 \cos 3x + 6 \cos x)
\end{aligned}$$

7. NOMBRES COMPLEXES. CORRECTION DES EXERCICES

d'où

$$\cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3 \cos x}{4} \text{ et } \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} \sin^3 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 \\ &= \frac{1}{8i^3} (e^{3ix} - 3e^{2ix} e^{-ix} + 3e^{ix} e^{-2ix} - e^{-3ix}) \\ &= -\frac{1}{8i} (e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}) \\ &= -\frac{1}{8i} (e^{3ix} - e^{-3ix} - 3(e^{ix} - e^{-ix})) \\ &= -\frac{1}{8i} (2i \sin 3x - 6i \sin x) \\ &= \frac{1}{4} (-\sin 3x + 3 \sin x), \end{aligned}$$

d'où

$$\sin^3 x = \frac{-\sin 3x + 3 \sin x}{4} \text{ et } \sin 3x = -4 \sin^3 x + 3 \sin x.$$

Avec la formule d'Euler et la formule de Moivre on a :

$$\begin{aligned} \cos^4 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 \\ &= \frac{1}{2^4} (e^{4ix} + 4e^{3ix} e^{-ix} + 6e^{2ix} e^{-2ix} + 4e^{ix} e^{-3ix} + e^{-4ix}) \\ &= \frac{1}{16} (e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) \\ &= \frac{1}{16} (e^{4ix} + e^{-4ix} + 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6) \\ &= \frac{1}{16} (2 \cos 4x + 8 \cos 2x + 6), \end{aligned}$$

d'où

$$\cos^4 x = \frac{\cos 4x + 4 \cos 2x + 3}{8} \text{ et } \cos 4x = 8 \cos^4 x - 4 \cos 2x - 3.$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} \sin^4 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^4 \\ &= \frac{1}{2^4 i^4} (e^{4ix} - 4e^{3ix} e^{-ix} + 6e^{2ix} e^{-2ix} - 4e^{ix} e^{-3ix} + e^{-4ix}) \\ &= \frac{1}{16} (e^{4ix} + e^{-4ix} + 6 - 4(e^{2ix} + e^{-2ix})) \\ &= \frac{1}{16} (2 \cos 4x - 8 \cos 2x + 6), \\ &= \frac{1}{8} (\cos 4x - 4 \cos 2x + 3), \end{aligned}$$

d'où

$$\sin^4 x = \frac{\cos 4x - 4 \cos 2x + 3}{8}.$$

Avec la formule d'Euler et la formule de Moivre on a :

$$\begin{aligned} \cos^5 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^5 \\ &= \frac{1}{2^5} (e^{5ix} + 5e^{4ix} e^{-ix} + 10e^{3ix} e^{-2ix} + 10e^{2ix} e^{-3ix} + 5e^{ix} e^{-4ix} + e^{-5ix}) \\ &= \frac{1}{32} (e^{5ix} + 5e^{3ix} + 10e^{ix} + 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} + e^{-5ix}) \\ &= \frac{1}{32} (e^{5ix} + e^{-5ix} + 5(e^{3ix} + e^{-3ix}) + 10(e^{ix} + e^{-ix})) \\ &= \frac{1}{32} (2 \cos 5x + 10 \cos 3x + 20 \cos x), \end{aligned}$$

d'où

$$\cos^5 x = \frac{\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x}{16} \text{ et } \cos 5x = 16 \cos^5 x - 5 \cos 3x - 10 \cos x.$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} \sin^5 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \right)^5 \\ &= \frac{1}{2^5 i^5} (e^{5ix} - 5e^{4ix} e^{-ix} + 10e^{3ix} e^{-2ix} - 10e^{2ix} e^{-3ix} + 5e^{ix} e^{-4ix} - e^{-5ix}) \\ &= \frac{1}{32i} (e^{5ix} - 5e^{3ix} + 10e^{ix} - 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} - e^{-5ix}) \\ &= \frac{1}{32i} (e^{5ix} - e^{-5ix} - 5(e^{3ix} - e^{-3ix}) + 10(e^{ix} - e^{-ix})) \\ &= \frac{1}{32i} (2i \sin 5x - 10i \sin 3x + 20i \sin x) \\ &= \frac{1}{16} (\sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x), \end{aligned}$$

d'où

$$\sin^5 x = \frac{\sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x}{16} \text{ et } \sin 5x = 16 \sin^5 x + 5 \sin 3x - 10 \sin x.$$

Exercice 4.4. a) Résoudre $z^6 = 1$.

b) Résoudre

$$z^3 = 3, \quad z^3 = 8i, \quad z^4 = 1 + i.$$

c) Résoudre $z^3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$. Calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

d) Trouver z tel que $z^2 = 5 - 12i$.

Réponse. a) D'après la Proposition 4.1, les solutions de l'équation $z^6 = 1$ sont données par :

$$z = e^{\frac{2ki\pi}{6}} = e^{\frac{ki\pi}{3}}, k = 0, \dots, 5.$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} z_1 &= 1, \\ z_2 &= e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \\ z_3 &= e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \\ z_4 &= e^{i\frac{3\pi}{3}} = -1, \\ z_5 &= e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \\ z_6 &= e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$

Exercice 4.4 (suite). b) Résolution de $z^3 = 8$. On peut chercher une solution z de la forme $z = r e^{i\theta}$, ou appliquer la Proposition 4.1, ce qui consiste à multiplier par les racines de l'unité une solution particulière z_0 .

Une solution est donnée par $z_0 = 2$ alors, avec la Proposition 4.1, les solutions sont obtenues en multipliant z_0 par les racines troisièmes de l'unité :

$$\begin{aligned} z_1 &= 2, \\ z_2 &= 2 e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2 \times \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + \sqrt{3}i, \\ z_3 &= 2 e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2 \times \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 - \sqrt{3}i. \end{aligned}$$

Exercice 4.4 (suite). b) Résolution de $z^3 = 8i$. On cherche z de la forme $z = r e^{i\theta}$. On a donc

$$r^3 e^{3i\theta} = 8 e^{i\frac{\pi}{2}},$$

ce qui donne

$$r = 2 \text{ et } 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow r = 2, \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, \text{ avec } k \in \mathbb{Z},$$

On obtient alors toutes les solutions avec $k = 0, 1, 2$ (on peut aussi prendre $k = -1, 0, 1$, etc.), ce qui donne :

$$z = r e^{i\theta} \text{ avec } r = 2, \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2 \pmod{2\pi}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i, \\ z_2 &= 2 e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i, \\ z_3 &= 2 e^{i\frac{9\pi}{6}} = 2 e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i. \end{aligned}$$

On peut aussi poser $z_0 = 2 e^{i\frac{\pi}{6}}$, une solution. Les solutions s'obtiennent alors en multipliant z_0 par les racines troisièmes de l'unité $1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + i, \\ z_2 &= 2 e^{i\frac{\pi}{6}} e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2 e^{i\frac{5\pi}{6}} = -1 + \sqrt{3}i, \\ z_3 &= 2 e^{i\frac{\pi}{6}} e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2 e^{-i\frac{\pi}{2}} = -1 - \sqrt{3}i. \end{aligned}$$

Exercice 4.4 (suite). *b).* Résolution de $z^4 = 1 + i$. On met $1 + i$ sous forme exponentielle. On a

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{2}\right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

On cherche une solution z_0 de la forme $z_0 = r e^{i\theta}$. On a donc $r = 2^{\frac{1}{8}}$ et $e^{4i\theta} = e^{i\frac{\pi}{4}}$, dont une solution est donnée par $\theta = \frac{\pi}{16}$. On donc la solution $z_0 = 2^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{\pi}{16}}$.

Les solutions s'obtiennent alors en multipliant z_0 par les racines quatrièmes de l'unité :

$$1, e^{i\frac{\pi}{2}} = i, e^{i\pi} = -1, e^{i\frac{3\pi}{2}} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} z_1 &= 2^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{\pi}{16}}, \\ z_2 &= 2^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{\pi}{16}} e^{i\frac{\pi}{2}} = 2^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{9\pi}{16}} = 2^{\frac{1}{8}} i e^{i\frac{\pi}{16}}, \\ z_3 &= 2^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{\pi}{16}} e^{i\pi} = 2^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{17\pi}{16}} = -2^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{\pi}{16}}, \\ z_4 &= 2^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{\pi}{16}} e^{-i\frac{\pi}{2}} = 2^{\frac{1}{8}} e^{-i\frac{7\pi}{16}} = -2^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{\pi}{16}}, \end{aligned}$$

et, en choisissant l'argument de la solution dans $] -\pi, \pi]$:

$$z_1 = 2^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{\pi}{16}}, z_2 = 2^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{9\pi}{16}}, z_3 = 2^{\frac{1}{8}} e^{-i\frac{15\pi}{16}}, z_4 = 2^{\frac{1}{8}} e^{-i\frac{7\pi}{16}}.$$

Exercice 4.4 (suite). *c)* Résolution de $z^3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$. On peut utiliser une racine z_0 ou résoudre directement. On a

$$-\sqrt{2} + i\sqrt{2} = \left(\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = 2 e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

7. NOMBRES COMPLEXES. CORRECTION DES EXERCICES

On cherche z de la forme $z = r e^{i\theta}$. On a donc

$$r^3 e^{3i\theta} = 2 e^{i\frac{3\pi}{4}},$$

ce qui donne :

$$r = 2^{\frac{1}{3}} \text{ et } 3\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ avec } k = -1, 0, 1 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k = -1, 0, 1.$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} z_1 &= 2^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\pi}{4}} = 2^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = 2^{-\frac{1}{6}}(1+i), \\ z_2 &= 2^{\frac{1}{3}} e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3})} = 2^{\frac{1}{3}} e^{-i\frac{5\pi}{12}}, \\ z_3 &= 2^{\frac{1}{3}} e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3})} = 2^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{11\pi}{12}}. \end{aligned}$$

Valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$. On a d'une part :

$$e^{i\frac{11\pi}{12}} = \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} = \cos(\pi - \frac{\pi}{12}) + i \sin(\pi - \frac{\pi}{12}) = -\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} e^{i\frac{11\pi}{12}} &= e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3})} = e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \times \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+i)(-1+i\sqrt{3}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(-1+i\sqrt{3}-i-\sqrt{3}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(-1-\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)) \\ &= \frac{1}{4}(-\sqrt{2}-\sqrt{6}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Exercice 4.4 (suite). d) On résout $z^2 = 5 - 12i$ en cherchant a de la forme $z = a + ib$. On a nécessairement a non nul, sinon z^2 serait imaginaire pur ou nul et z vérifie donc $z^2 = a^2 + 2aib - b^2$, ce qui donne avec $a \neq 0$:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ 2ab = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ ab = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{36}{a^2} = 5 \\ b = -\frac{6}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 36 = 5a^2 \\ b = -\frac{6}{a} \end{cases}$$

On a alors

$$a^4 - 5a^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow a^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2} \Leftrightarrow a^2 = 9 \Leftrightarrow a = \pm 3.$$

On obtient avec $b = -\frac{6}{a}$:

$$(a, b) = (3, -2) \text{ ou } (a, b) = (-3, 2)$$

On a donc deux solutions

$$z_1 = 3 - 2i \quad z_2 = -3 + 2i.$$

5. Nombres complexes en géométrie.

Exercice 5.1. On considère les points A , B et C d'affixes respectives $a = 1 + 3i$, $b = 2 + i$ et $c = -1 + 2i$. Calculer $Z = \frac{b-a}{c-a}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.

Réponse. On a

$$Z = \frac{b-a}{c-a} = \frac{2+i-1-3i}{-1+2i-1-3i} = \frac{1-2i}{-2-i} = \frac{i(-i-2)}{-2-i} = i.$$

On en déduit que

$$\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}} = i \text{ et } |Z| = 1.$$

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs orthogonaux et $AB = AC$. On en déduit que ABC est un triangle rectangle en A , isocèle en A .

Ci-dessus on a utilisé la Propriété 2.4 : deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ non nuls d'affixes respectives z et z' sont orthogonaux si et seulement si $\frac{z'}{z} \in i \times \mathbb{R}^*$. On peut aussi utiliser la Propriété 5.1 :

$$\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}} = i \Rightarrow \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}}\right) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}.$$

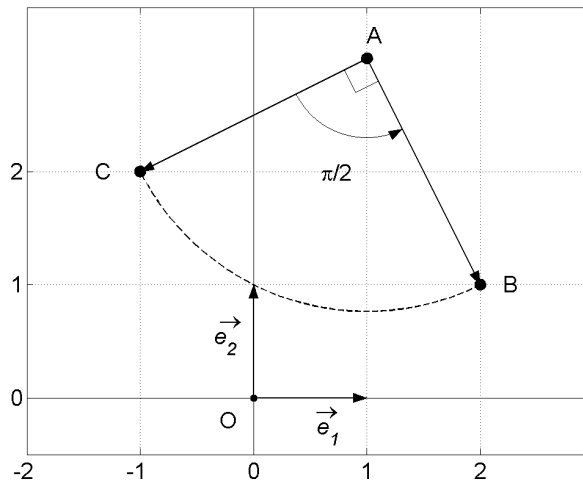


Figure 5.1. Représentation du triangle ABC isocèle et rectangle en A .

Exercice 5.2. A tout nombre complexe z , distinct de i , d'image M , on associe le nombre complexe

$$Z = \frac{z-2}{z-i}.$$

- a) Interpréter géométriquement $|Z|$ et $\arg Z$ à l'aide des images A et B de 2 et de i .
- b) Déterminer l'ensemble E_1 des points M du plan, d'affixe Z , tels que $|Z| = 1$.
- c) Déterminer l'ensemble E_2 des points M du plan tels que Z soit réel.
- d) Déterminer l'ensemble E_3 des points M du plan tels que Z soit imaginaire pur.

Réponse. a) On a

$$|Z| = \left| \frac{z-2}{z-i} \right| = \left| \frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{BM}} \right| = \frac{AM}{BM}, \quad \arg Z = \arg \frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{BM}} = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}).$$

b) $|Z| = 1 \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow E_1$ médiatrice de $[AB]$.

c) On a

$$\begin{aligned} Z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{BM}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg \frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{BM}} = 0 \text{ ou } \pi \pmod{2\pi} \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = 0 \text{ ou } \pi \pmod{2\pi} \Leftrightarrow E_2 \text{ droite } (AB) \text{ privée de } B. \end{aligned}$$

d) On a

$$\begin{aligned} Z \in i \times \mathbb{R} &\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{BM}} \in i \times \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \arg \frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{BM}} = \pm \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \pm \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \\ &\Leftrightarrow E_3 \text{ cercle de diamètre } [AB] \text{ privée de } B. \end{aligned}$$

Le cercle E_3 a donc pour centre le point I d'affixe $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = 1 + \frac{i}{2}$, donc I a

pour coordonnées $(1, \frac{1}{2})$, et de rayon $\frac{|z_{\overrightarrow{AB}}|}{2} = \frac{|2-i|}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

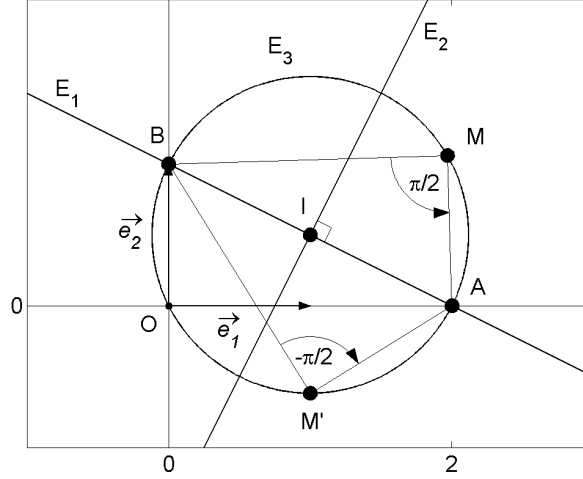


Figure 5.2. Représentation de E_1 , E_2 et E_3 . On remarque que $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2}$, pour la partie supérieure du cercle et $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = -\frac{\pi}{2}$ sinon. L'ensemble E_1 est la médiatrice de $[AB]$, E_2 est la droite (AB) privée de B et E_3 est le cercle de diamètre $[AB]$ et de centre $I = (1, \frac{1}{2})$, privé de B .

Exercice 5.3. Placer les points $A(2, 2)$, $B(-1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3})$ et $C(-1 + \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3})$. Montrer, en utilisant le module et l'argument d'un nombre complexe bien choisi, que le triangle ABC est équilatéral.

Réponse. On a

$$\begin{aligned}
 Z &= \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-1 - \sqrt{3} - i + i\sqrt{3} - 2 - 2i}{-1 + \sqrt{3} - i - i\sqrt{3} - 2 - 2i} \\
 &= \frac{-3 - \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 3)}{-3 + \sqrt{3} - i(3 + \sqrt{3})} \\
 &= \frac{(-3 - \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 3))(-3 + \sqrt{3} + i(3 + \sqrt{3}))}{(-3 + \sqrt{3})^2 + (3 + \sqrt{3})^2} \\
 &= \frac{-(3 + \sqrt{3})(-3 + \sqrt{3}) - i(3 + \sqrt{3})(3 + \sqrt{3}) + i(\sqrt{3} - 3)^2 + i^2(\sqrt{3} - 3)(3 + \sqrt{3})}{3^2 - 6\sqrt{3} + 3 + 3^2 + 6\sqrt{3} + 3} \\
 &= \frac{-(3 - 9) - i(9 + 6\sqrt{3} + 3) + i(3 - 6\sqrt{3} + 9) - (3 - 9)}{24} \\
 &= \frac{12 - 12i\sqrt{3}}{24} \\
 &= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-\frac{i\pi}{3}} = \cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}).
 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}} = e^{-\frac{i\pi}{3}} \text{ et } |Z| = 1.$$

donc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{3}$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$, $AB = AC = 1$. On en déduit que ABC est un triangle équilatéral de côtés de longueur 1.

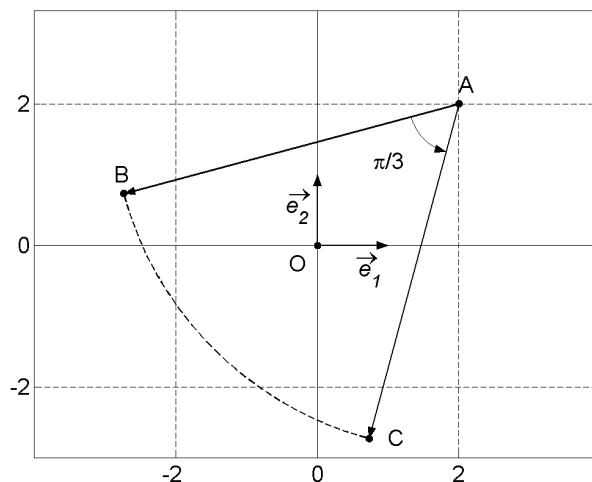


Figure 5.3. Représentation du triangle équilatéral ABC .

Exercice 5.4. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = -1+i$, $b = -1-i$, $c = 2i$, $d = 2-2i$.

- Calculer, sous forme algébrique, les nombres complexes $\frac{c-a}{d-a}$ et $\frac{c-b}{d-b}$.
- En déduire la nature des triangles ACD et BCD .
- Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Réponse. a) On a

$$Z_1 = \frac{c-a}{d-a} = \frac{2i+1-i}{2-2i+1-i} = \frac{1+i}{3-3i} = \frac{(1+i)^2}{3(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{3(1^2+1^2)} = \frac{i}{3}.$$

On en déduit que

$$\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AD}}} = \frac{i}{3} \text{ et } |Z_1| = \frac{1}{3},$$

donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont deux vecteurs orthogonaux et $AC = \frac{1}{3}AD$. On en déduit que ABD est un triangle rectangle en A (cf. Figure 5.4). Ensuite

$$Z_2 = \frac{c-b}{d-b} = \frac{2i+1+i}{2-2i+1+i} = \frac{1+3i}{3-i} = i \frac{3-i}{3-i} = i.$$

On en déduit que

$$\frac{z_{\overrightarrow{BC}}}{z_{\overrightarrow{BD}}} = i \text{ et } |Z_2| = 1,$$

donc $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont deux vecteurs orthogonaux et $BC = BD = 1$. On en déduit que CBD est un triangle rectangle en B , isocèle en B .

c) Comme $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont deux vecteurs orthogonaux A est sur le cercle de diamètre CD .

De même $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont deux vecteurs orthogonaux B est sur le cercle de diamètre CD .

Donc A, B, C et D appartiennent au même cercle de centre I d'affixe

$$z_I = \frac{c + d}{2} = \frac{2i + 2 - 2i}{2} = 1$$

et de rayon

$$\frac{CD}{2} = \frac{|d - c|}{2} = \frac{|2 - 2i - 2i|}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + 4^2}}{2} = \sqrt{5}.$$

Le point I a donc pour coordonnées $(1, 0)$.

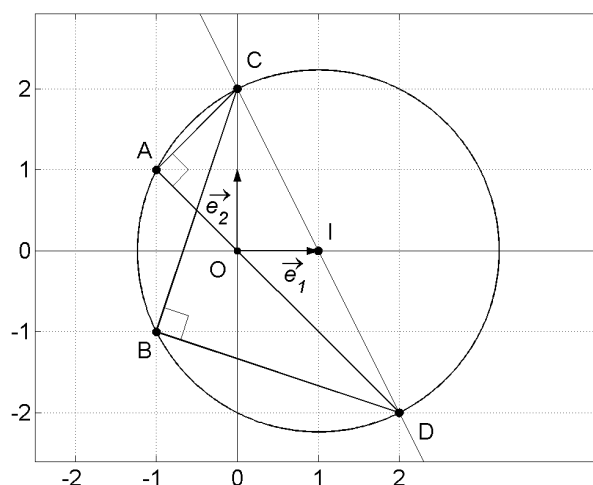


Figure 5.4. Représentation des points A, B, C et D et du cercle contenant ces points.

Exercice 5.5. Soit A le point d'affixe $-2 + 3i$ et B le point d'affixe $1 - 3i$. Au nombre z on associe z' tel que

$$z' = \frac{z - 1 + 3i}{z + 2 - 3i}.$$

Déterminer et construire l'ensemble E des points M du plan tels que z' ait pour argument $\frac{\pi}{2}$.

Réponse. On a donc, avec z_A affixe de A et z_B affixe de B :

$$z' = \frac{z - (1 - 3i)}{z - (-2 + 3i)} = \frac{z - z_B}{z - z_A} = \frac{z_{\overrightarrow{BM}}}{z_{\overrightarrow{AM}}}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \arg(z') &= \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arg \frac{z_{\overrightarrow{BM}}}{z_{\overrightarrow{AM}}} = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) &= (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

Donc E est le demi-cercle d'extrémités A, B , privé de B et tel que $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) > 0, \forall M \in E$.

L'ensemble E est donc inclus dans le cercle $\mathcal{C}$ (cf. Figure 5.5). de centre I d'affixe

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = -\frac{1}{2},$$

donc I a pour coordonnées $(-\frac{1}{2}, 0)$, et de rayon

$$\frac{|z_{\overrightarrow{AB}}|}{2} = \frac{|1 - 3i + 2 - 3i|}{2} = \frac{|3 - 6i|}{2} = \frac{\sqrt{45}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

Déterminons quel est le demi-cercle partagé par le diamètre $[AB]$, privé de B , solution (cf. Figure 5.5).

Pour cela, soit $K = (R - 0.5, 0)$ et $K' = (-R - 0.5, 0)$, les deux points du cercle qui intersectent l'axe des x (avec ce choix on a bien K et K' sur l'axe des x et $IK = |x_K - x_I| = R$, $IK' = |x_{K'} - x_I| = R$).

La Figure 5.5 montre que

$$(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB}) = \frac{\pi}{2}, (\overrightarrow{K'A}, \overrightarrow{K'B}) = -\frac{\pi}{2}$$

E est donc le demi-cercle d'extrémités A et B qui contient K et privé de B .

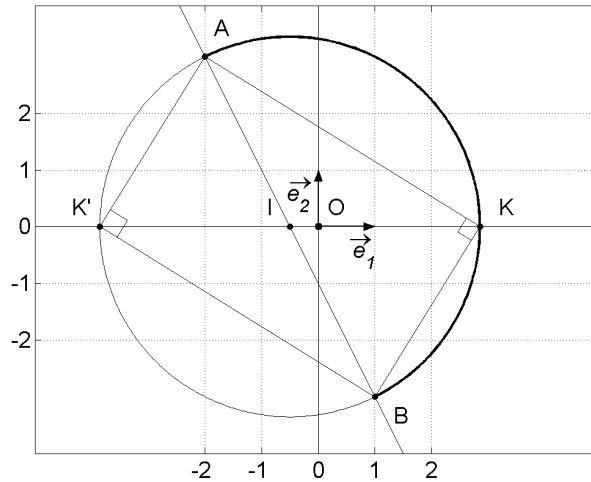


Figure 5.5. Représentation du demi-cercle solution d'extrémités A et B passant par K , auquel on enlève B . Le point K' n'appartient pas à ce demi-cercle.

On peut vérifier par le calcul que $K \in E$, de la manière suivante. On a

$$\arg \frac{z_{\overrightarrow{BM}}}{z_{\overrightarrow{AM}}} = \frac{\pi}{2} \bmod 2\pi \Leftrightarrow \frac{z_{\overrightarrow{BM}}}{z_{\overrightarrow{AM}}} \in i \times \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \arg z' \in i \times \mathbb{R}^+$$

Posons $z_{\overrightarrow{AB}} = 2Re^{i\phi}$. On a

$$z_{\overrightarrow{AB}} = 1 - 3i + 2 - 3i = 3 - 6i = 3\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}i\right) \Leftrightarrow \cos \phi = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin \phi = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

On en déduit que $-\frac{\pi}{2} < \phi < 0 \bmod 2\pi$. Ensuite, les points de $\mathcal{C}$ sont de la forme $z = z_I + Re^{i\theta}$, on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{z - z_B}{z - z_A} &= \frac{z_I + Re^{i\theta} - z_B}{z_I + Re^{i\theta} - z_A} = \frac{\frac{z_A + z_B}{2} + Re^{i\theta} - z_B}{\frac{z_A + z_B}{2} + Re^{i\theta} - z_A} \\ &= \frac{\frac{z_A - z_B}{2} + Re^{i\theta}}{\frac{z_B - z_A}{2} + Re^{i\theta}} = \frac{z_A + 2Re^{i\theta} - z_B}{z_B + 2Re^{i\theta} - z_A} \\ &= \frac{-2Re^{i\phi} + 2Re^{i\theta}}{2Re^{i\phi} + 2Re^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta} - e^{i\phi}}{e^{i\theta} + e^{i\phi}} \\ &= \frac{1 - e^{i(\phi - \theta)}}{1 + e^{i(\phi - \theta)}} = \frac{(1 - e^{i(\phi - \theta)})(1 - e^{-i(\phi - \theta)})}{(1 + e^{i(\phi - \theta)})(1 - e^{-i(\phi - \theta)})} \\ &= \frac{1 - e^{-i(\phi - \theta)} - e^{i(\phi - \theta)} + 1}{1 - e^{-i(\theta - \phi)} + e^{i(\phi - \theta)} - 1} = \frac{2 - 2\cos(\phi - \theta)}{2i\sin(\phi - \theta)} \\ &= i \frac{\cos(\phi - \theta) - 1}{\sin(\phi - \theta)} = i \frac{1 - \cos(\theta - \phi)}{\sin(\theta - \phi)}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\arg z = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \sin(\theta - \phi) > 0 \Leftrightarrow \phi \leq \theta \leq \phi + \pi.$$

Cette relation est vérifiée par K , car pour $\theta = 0$, $\sin(\theta - \phi) = \sin(-\phi) > -\sin \phi > 0$. On en déduit que E passe par K .

Exercice 5.6. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Soit L une transformation du plan et f la fonction complexe associée. Soient A et B du point du plan d'affixes respectifs z_A et z_B .

Calculer l'affixe $z_{A'} = f(z_A)$ et $z_{B'} = f(z_B)$ des points A' et B' et représenter l'image (D') par L de la droite (D) passant par les points A et B pour les cas suivants :

- $A(2, 1)$, $B(1, 2)$, $L = T$ translation de vecteur $\vec{u}(2, 1)$.
- $A(2, 3)$, $B(3, 1)$, $L = H$ homothétie de rapport $k = \frac{5}{2}$ et de centre $\Omega(1, \frac{3}{2})$.
- $A(1 + 2\cos \frac{\pi}{12}, 1 + 2\sin \frac{\pi}{12})$, $B(1 + 4\cos \frac{\pi}{6}, 1 + 4\sin \frac{\pi}{6})$, $L = R$ rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre $\Omega(1, 1)$.

Réponse. a) On a, avec $a = 2 + i$, $f(z) = z + a$ et :

$$\begin{aligned} z_{A'} &= f(z_A) = z_A + 2 + i = 2 + i + 2 + i = 4 + 2i, \\ z_{B'} &= f(z_B) = z_B + 2 + i = 1 + 2i + 2 + i = 3 + 3i. \end{aligned}$$

La droite (D) et son image (D') sont représentées à la Figure 5.6 ci-dessous.

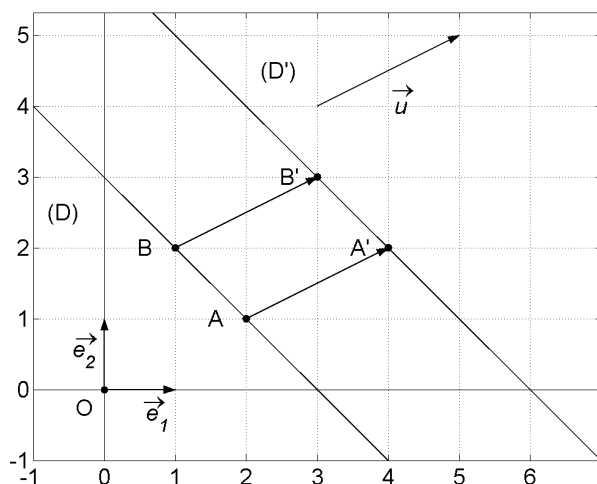


Figure 5.6. L'image de la droite (D) passant par A et B par la translation T de vecteur $\vec{u}$ est la droite (D') passant par les points $A' = T(A)$ et $B' = T(B)$.

c) On a, avec $\omega = 1 + \frac{3}{2}i$ et $k = 2.5$, $f(z) = \omega + k(z - \omega)$ et :

$$\begin{aligned} z_{A'} &= f(z_A) = \omega + k(z_A - \omega) = 1 + \frac{3}{2}i + \frac{5}{2}(2 + 3i - 1 - \frac{3}{2}i) = \frac{7}{2} + \frac{21}{4}i, \\ z_{B'} &= f(z_B) = \omega + k(z_B - \omega) = 1 + \frac{3}{2}i + \frac{5}{2}(3 + i - 1 - \frac{3}{2}i) = 6 + \frac{1}{4}i. \end{aligned}$$

La droite (D) et son image sont représentées à la Figure 5.7 ci-dessous.

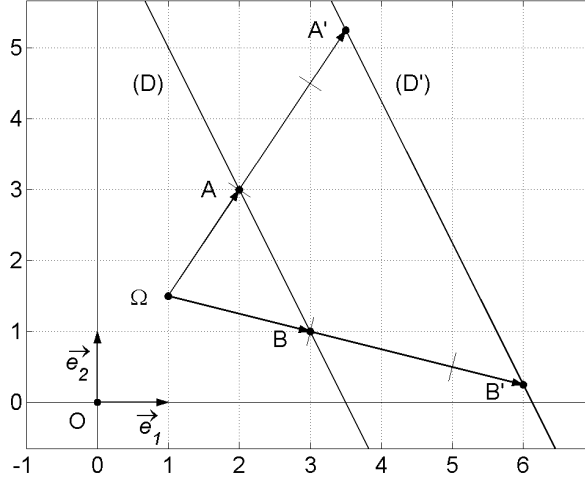


Figure 5.7. L'image de la droite (D) passant par A et B par l'homothétie H de centre Ω et rapport k est la droite (D') passant par les points $A' = H(A)$ et $B' = H(B)$. On a $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$, avec $k = \frac{5}{2}$.

c) On a, avec $\omega = 1 + i$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$, $f(z) = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$ et :

$$z_{A'} = f(z_A) = \omega + e^{i\frac{\pi}{3}}(z_A - \omega) = \omega + 2e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{12}} = \omega + 2e^{i\frac{5\pi}{12}},$$

$$z_{B'} = f(z_B) = \omega + e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - \omega) = \omega + 4e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{6}} = \omega + 4e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

La droite (D) et son image sont représentées à la Figure 5.8 ci-dessous. Sur cette figure, la graduation du cercle de rayon 5 et de centre Ω est de $\frac{\pi}{12}$.

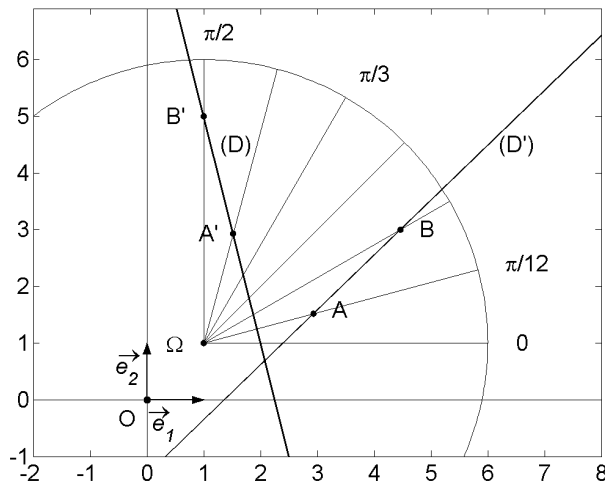


Figure 5.8. L'image de la droite (D) passant par A et B par la rotation R de centre Ω et d'angle θ est la droite (D') passant par les points $A' = R(A)$ et $B' = R(B)$. On a $A'B' = AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \frac{\pi}{3}$.

7. NOMBRES COMPLEXES. CORRECTION DES EXERCICES