1. ENSEMBLES

1.1. Ensemble fini, cardinal

Lorsqu'un ensemble E a n éléments, on dit que E est un ensemble fini. On dit alors que son cardinal est n, et on note : $\text{card}(E) = n$.

L'ensemble vide est l'ensemble qui n'a pas d'élément, il est noté $\emptyset$. On pose $\text{card}(\emptyset) = 0$.

Exemple 1.1

$E = \{a, b, c, d\}$ est un ensemble fini et dans ce cas $\text{card}(E) = 4$.

Certains ensembles ne sont pas finis comme $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ qui ont une infinité d'éléments.

1.2. Appartenance. Partie d'un ensemble. Inclusion

L'appartenance d'un élément x à un ensemble E se note $x \in E$ et on dit x élément de E ou x appartient à E. Lorsque x n'appartient pas à E on note $x \notin E$.

Un ensemble A est un sous-ensemble d'un ensemble E si tout élément de A est élément de E. On dit alors que A est inclus dans E et on note $A \subset E$. On appelle partie de E tout sous-ensemble de E.

L'ensemble des parties de E se note $\mathcal{P}(E)$.

Par convention $\emptyset$ est une partie de n'importe quel ensemble.

Toute partie de E réduite à un seul élément est appelée singleton. Lorsque $\text{card}(E) = n$, il y a n singletons.

Exemple 1.2

Soit $E = \{a, b, c, d\}$, les singletons de E sont les parties : $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$.

1.3. Intersection

Si A et B sont deux ensembles, l'intersection de A et B est l'ensemble noté $A \cap B$, constitué des éléments qui appartiennent à A et B :

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B.$$

Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont des parties disjointes de E.

- Commutativité : $A \cap B = B \cap A$,

- Associativité : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$,

- Avec $\emptyset$: $A \cap \emptyset = \emptyset$.

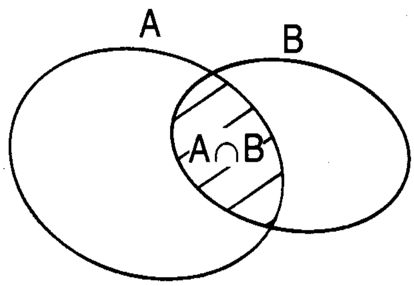

Figure 1.1. $A \cap B$ est représenté par la partie hachurée.

1.4. Réunion

Si A et B sont deux ensembles, la réunion de A et B est l'ensemble, noté $A \cup B$, constitué des éléments qui appartiennent à A ou à B :

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B.$$

Lorsque A et B sont des ensembles disjoints : $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B$.

- Commutativité : $A \cup B = B \cup A$,

- Associativité : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$,

- Avec $\emptyset$: $A \cup \emptyset = A$.

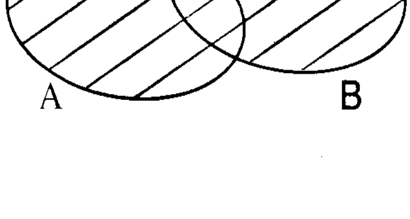

Figure 1.2. $A \cup B$ est représenté par la partie hachurée.

L'intersection est distributive par rapport à la réunion :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap C) \cup (A \cap C).$$

La réunion est distributive par rapport à l'intersection :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

1.5. Complémentaire

Si A est une partie d'un ensemble E, le complémentaire de A dans E est la partie de E, constituée des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. Le complémentaire de A dans E est noté $\complement_E A$, A^c ou plus simplement $\overline{A}$:

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A.$$

On a :

- $\text{card}(\overline{A}) = \text{card}\, E - \text{card}\, A$,
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$,
- $A \cup \bar{A} = E$.

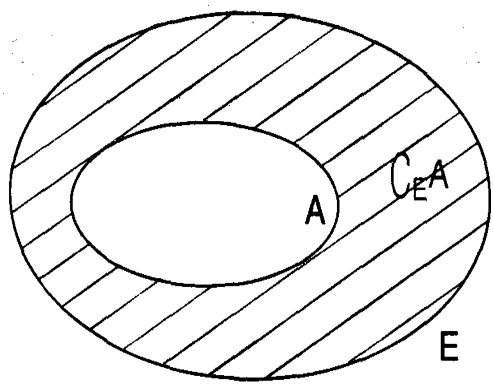

Figure 1.3. A est son complémtaire

1.6. Propriétés de passage au complémentaire (lois de Morgan) :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Exercice 1.1. Soient A, B et C les intervalles de $\mathbb{R}$:

$$A = [0, 1], B = [\frac{1}{2}, 3], C =]-1, \frac{2}{3}[.$$

a) Quel est l'ensemble $A \cap B$? L'ensemble $B \cap C$? L'ensemble $A \cap C$?

b) Quel est l'ensemble $A \cup B$? L'ensemble $B \cup C$?

c) Quels sont les ensembles $(A \cup B) \cap C$ et $(A \cap C) \cup (B \cap C)$?

Exercice 1.2. Soit E l'ensemble des entiers naturels strictement inférieurs à 10. Soient A l'ensemble des éléments de E qui sont pairs et B l'ensemble des éléments de E divisibles par 3.

1° Donner les éléments de $A \cap B$ et $A \cup B$.

2° Décrire un ensemble C qui soit inclus dans B.

3° Décrire $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

4° Trouver un ensemble D tel que A et D soient disjoints.

5° On note $D = A \cap B$. Décrire l'ensemble $B \times D$ (*cf.* 1.10). Quel est son cardinal ?

1.7. Différence de deux ensembles

Si A et B sont deux ensembles, la différence de A et B est l'ensemble, noté $A \backslash B$, constitué des éléments qui appartiennent A et qui n'appartiennent pas à B :

$$x \in A \backslash B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \notin B.$$

On a pour A et B sous-ensembles d'un espace E :

$$A \backslash B = A \cap \overline{B}.$$

Exercice 1.3. Donner une représentation sous forme de diagramme de la différence de deux ensembles.

1.8. Différence symétrique de deux ensembles

On appelle différence symétrique de A et B, notée $A \Delta B$, l'ensemble constitué par la réunion des éléments de A qui ne sont pas dans B et des éléments de B qui ne sont pas dans A :

$$x \in A \Delta B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou bien } x \in B \text{ (ou exclusif)}.$$

On a :

$$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B),$$
$$A \Delta B = B \Delta A \text{ (symétrie)}.$$

On a pour A et B sous-sensembles d'un espace E :

$$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A \cup B) \backslash (A \cap B),$$

Exercice 1.4. Donner une représentation sous forme de diagramme de la différence symétrique de deux ensembles.

1.9. Partition

Une partition d'un ensemble E est une famille de parties non vides de E, disjointes deux à deux, et dont la réunion est l'ensemble E.

Exemple 1.3

$\{\{a_1, a_2\}, \{a_3\}\}$ est une partition de l'ensemble $E = \{a_1, a_2, a_3\}$. Les familles suivantes ne sont pas des partitions de E :

$\{\emptyset, \{a_1, a_3\}, \{a_2\}\}$ (cette famille contient l'ensemble vide),

$\{\{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}\}$ (a_2 appartient à plus d'une partie),

$\{a_1, a_2\}$ (a_3 n'est pas dans la réunion).

Exercice résolu 1.5. Combien de partitions n peut-on faire avec un ensemble à 2 éléments ? 3 éléments ? Et à 4 éléments ?

Réponse :

On remarque qu'il s'agit ici d'un problème de dénombrement. Pour $E_2 = \{a_1, a_2\}$ les partitions sont :

$$\big\{\{a_1\}, \{a_2\}\big\},\ \big\{\{a_1, a_2\}\big\} \Rightarrow n = 2.$$

Pour $E_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$ on peut par exemple regarder les partitions à 3, puis 2, puis 1 élément :

$$\begin{aligned}\big\{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}\big\}, \big\{\{a_1, a_2\}, \{a_3\}\big\}, \big\{\{a_1, a_3\}, \{a_2\}\big\}, \big\{\{a_2, a_3\}, \{a_1\}\big\},\\ \big\{\{a_1, a_2, a_3\}\big\}.\end{aligned} \tag{1.1}$$

d'où $n = 5$.

On peut aussi partir des partitions de E_2 auxquelles on ajoute l'élément a_3 : la partition $\big\{\{a_1\}, \{a_2\}\big\}$ donne $\big\{\{a_1, a_3\}, \{a_2\}\big\}$, $\big\{\{a_1\}, \{a_2, a_3\}\big\}$ ainsi que $\big\{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}\big\}$; puis la partition $\big\{\{a_1, a_2\}\big\}$ donne $\big\{\{a_1, a_2, a_3\}\big\}$ et $\big\{\{a_1, a_2\}, \{a_3\}\big\}$. On obtient alors bien toutes les partitions.

Procédons de même pour obtenir les partitions de $E_4 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ en partant des partitions de E_3 obtenues en (1.1). En ajoutant a_4 à $\big\{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}\big\}$ on obtient :

$$\begin{aligned}&\big\{\{a_1, a_4\}, \{a_2\}, \{a_3\}\big\}, \big\{\{a_1\}, \{a_2, a_4\}, \{a_3\}\big\},\\ &\big\{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3, a_4\}\big\}, \big\{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\}\big\},\end{aligned}$$

soit 4 partitions. En procédant de même pour les autres partitions on obtient finalement

$$n = 4 + 3 + 3 + 3 + 2 = 15 \text{ partitions.}$$

Le nombre de partitions différentes d'un ensemble à n éléments est aussi appelé nombre de Bell et est noté B_n. Les premiers nombres de Bell sont $B_0 = 1$, $B_1 = 1$, $B_2 = 2$, $B_3 = 5$, $B_4 = 15$, $B_5 = 52$, $B_6 = 203$.

1.10. Produit cartésien

On appelle produit cartésien de deux ensembles E et F l'ensemble noté $E \times F$ des couples (a, b) où a est un élément de E, et b un élément de F.

On a

$$\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F).$$

Montrons le résultat ci-dessus. Soit $(x, y) \in E \times F$. Il y a card(E) façons de choisir x. Pour chaque choix de x, il y a card(F) façons de choisir y. Soit au total $\text{card}(F) + \text{card}(F) + \cdots + \text{card}(F)$ (card(E) termes dans la somme) choix possibles du couple (x, y), ce qui donne le résultat.

Ce type de raisonnement est souvent utilisé en combinatoire.

Exercice résolu 1.6. Soient $E = \{1, 2\}$ et $F = \{a, b, c\}$, donner $E \times F$.

Réponse :

$$E \times F = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}.$$

Exemple 1.4

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) (où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$) est le produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ également noté $\mathbb{R}^2$.

1.11. Produit cartésien de p ensembles

Le produit cartésien de deux ensembles se généralise à plusieurs ensembles. Soient p ensembles notés $E_1, E_2, \cdots, E_p$. On appelle produit cartésien des ensembles $E_1, E_2, \cdots, E_p$ l'ensemble noté $E_1 \times E_2 \cdots \times E_p$ des élément de la forme $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ avec $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \cdots, x_p \in E_p$. Les éléments de cet espace sont appelés des p-uples. Pour $p = 2$ les p-uples sont appelés couples et pour $p = 3$ des triplets. Par exemple dans l'espace usuel on représente les coordonnées cartésiennes d'un point par un triplet de $\mathbb{R}^3$.

On a

$$\text{card}(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p) = \text{card}(E_1) \times \text{card}(E_2) \times \cdots \times \text{card}(E_p).$$

Exercice résolu 1.7. Un code est composé d'une lettre de l'alphabet, d'un chiffre (entier entre 0 et 9), d'une lettre de l'alphabet et d'un chiffre. Combien y a-t-il de codes possibles ?

Réponse :

Posons $E_1 = E_4 = \{a, b, \cdots, y, z\}$ et $E_2 = E_4 = \{1, 2, \cdots, 9\}$, alors le nombre de codes possibles est le nombre de 4-uples de $E_1 \times E_2 \times E_3 \times E_4$, il y a donc $26 \times 10 \times 26 \times 10 = 67600$ codes possibles.

On peut aussi raisonner directement : il y a 26 manières de choisir une lettre pour le premier terme du code, 10 manières de choisir un chiffre pour le second terme du code, ce qui fait 26×10 façons de choisir les deux premiers termes du code. En continuant ce raisonnement pour le choix des deux termes suivants du code, on retrouve le résultat.

Autre style de rédaction de la solution : Il y a 26 manières de choisir le premier terme du code parmi les 26 *lettres de l'alphabet, etc.*

1.12. p-liste

L'ensemble E étant un ensemble à n éléments, on appelle p-liste de E toute p-uple $(x_1, \cdots, x_p)$ où chaque x_k est élément de E.

Une p-liste (ou liste de longueur p) de E est donc est un p-uplet de $E^p = E \times \cdots \times E$ (p facteurs) ; on dit aussi suite de longueur p d'éléments de E.

D'après le résultat sur le cardinal d'un ensemble, il y a n^p p-listes d'un ensemble à n éléments.

Exemple 1.5

Le terme (a, n, a, n, a, s) est une 6-liste de l'ensemble $E = \{a, b, c, ..., z\}$ des lettres de l'alphabet. Il y a $26^6 = 308915776$, 6-listes de E.

Exemple 1.6

Tirage avec remise d'un échantillon ordonnné de boules dans une urne : une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement p boules de l'urne en notant à chaque tirage le numéro de la boule sortie et en remettant celle-ci dans l'urne. Quel est le nombre de tirages distincts possibles ? (on appelle ici tirage la suite ordonné des p numéros obtenus successivement.)

Comme il y a remise, le nombre de tirages est le nombre d'éléments de E^p, avec $E = \{1, 2, \cdots, n\}$. Il y en a donc n^p. On verra au Chapitre suivant le cas d'un tirage sans remise.

Exercice 1.8. On jette successivement 3 fois un dé à quatre faces numérotées de 1 à 4 et on note le nombre à trois chiffres obtenu. Ecrire tous les nombres que l'on peut obtenir. Combien y en a-t-il ? On pourra utiliser une arbre (*cf.* Chapitre 2).

2. PROBLÈMES DE DÉNOMBREMENTS

2.1. Permutations

2.1.1. Notion de permutation

Quatre chevaux A, B, C, D prennent le départ d'une course ; combien y a-t-il d'ordres d'arrivée possibles ?

1° Nous pouvons raisonner comme suit :

Les quatre chevaux se disputent la première place ; il y a donc quatre possibilités pour désigner le cheval qui arrivera premier : A, B, C, D ; l'un des chevaux étant arrivé premier, les trois chevaux restant se disputent la deuxième place ; il y a donc 4×3 possibilités pour désigner les deux chevaux qui arriveront premier et second :

$$\begin{array}{ccc} A, B & A, C & A, D \\ B, A & B, C & B, D \\ C, A & C, B & C, D \\ D, A & D, B & D, C; \end{array}$$

de même les deux chevaux classés premier et second étant arrivés, les deux chevaux restant se disputeront la troisième place ; il y a donc $4 \times 3 \times 2$ façons de désigner les trois chevaux qui arriveront premier, second et troisième ; enfin, les trois chevaux classés premier, second et troisième étant arrivés, le cheval restant se contentera de la quatrième et dernière place. Il y a donc :

$$4 \times 3 \times 2 \times 1$$

ordre d'arrivée possibles ; chacun d'eux correspond à un chemin dans un des quatre «arbres» suivants :

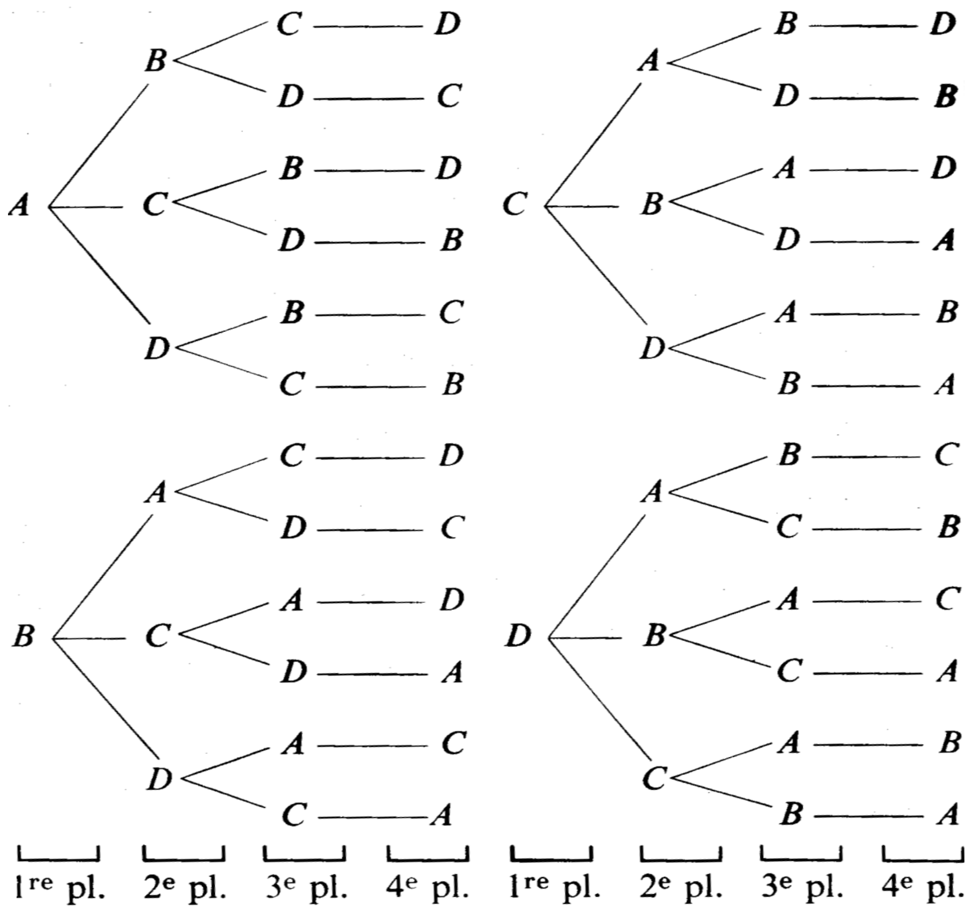

Figure 2.1.

2° Nous pouvons aussi raisonner comme suit :

S'il n'y avait que les deux chevaux A et B au départ de la course, il y aurait deux ordres d'arrivée possibles :

$$A, B \text{ et } B, A;$$

l'adjonction du troisième cheval C multiplie par 3 le nombre d'ordres possibles : en effet, dans chacun des deux cas précédents, le cheval C peut prendre la première, la deuxième ou la troisième place ; cela donne les 2×3 ordres d'arrivée suivants :

$$C, A, B \quad A, C, B \quad A, B, C$$

et :

$$C, B, A \quad B, C, A, \quad B, A, C;$$

de même l'adjonction du quatrième cheval D, multiplie par 4 le nombre des ordres d'arrivée possibles ; ce nombre est donc :

$$1 \times 2 \times 3 \times 4.$$

Avec cette méthode, les ordres d'arrivée sont représentés par le graphe suivant :

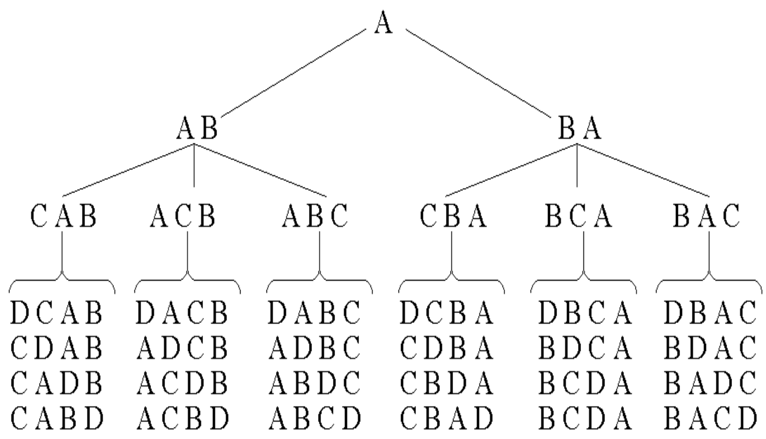

Figure 2.2.

2.1.2. Définition d'une permutation

On définit les permutations d'un ensemble fini de la manière suivante.

Définition 2.1. *E étant un ensemble à n éléments, on appelle permutation de E toute n-liste d'éléments distincts de E.*

On dit aussi permutation de n éléments.

Une permutation de n éléments est donc un n-uple formé en rangeant ces n éléments dans un ordre déterminé, c'est-à-dire en les plaçant à n places numérotées 1, 2 ,$\cdots$, n.

Dans l'exemple ci-dessus, chaque ordre d'arrivée possible est une permutation des quatre lettres A, B, C, D.

Deux permutations distinctes sont composées des mêmes éléments, mais diffèrent par l'ordre dans lequel sont rangés ces éléments.

L'un ou l'autre des raisonnements faits au Paragraphe 2.1.1 se généralise et donne :

Proposition 2.1. *Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments, est égal au produit des n premiers entiers :*

$$1 \times 2 \times ... \times n.$$

Définition 2.2. *Le produit des n premiers entiers s'appelle factorielle n et se note $n!$:*

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n.$$

On pose, par convention, $0! = 1$.

On a par exemple

$$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6;\ 5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120.$$

Exercice 2.1. Calculer

$$0!,\ 1!,\ 2!,\ 3!,\ 4!,\ 5!,\ 6!,\ 7!, \frac{100!}{99!}, \frac{10!}{3!7!}, \frac{16!}{15 \times 13 \times 11 \times 9 \times 7 \times 5 \times 3 \times 2^8}.$$

2.2. Arrangements

2.2.1. Notion d'arrangement

Cinq chevaux A, B, C, D, E prennent le départ d'une course ; de combien de façons peut-on désigner les trois chevaux arrivant premier, second et troisième, compte tenu de l'ordre d'arrivée de ces trois chevaux ? (Combien y a-t-il de «tiercés dans l'ordre » différents ?)

Les cinq chevaux se disputent la première place ; l'un des chevaux ayant pris la première place, les quatre chevaux restant se disputent la deuxième place ; un de ces chevaux ayant pris la deuxième place, les trois chevaux restant se disputent la troisième place. Le nombre cherché est donc :

$$5 \times 4 \times 3.$$

Chaque tiercé dans l'ordre correspond à un chemin dans un des cinq arbres suivants :

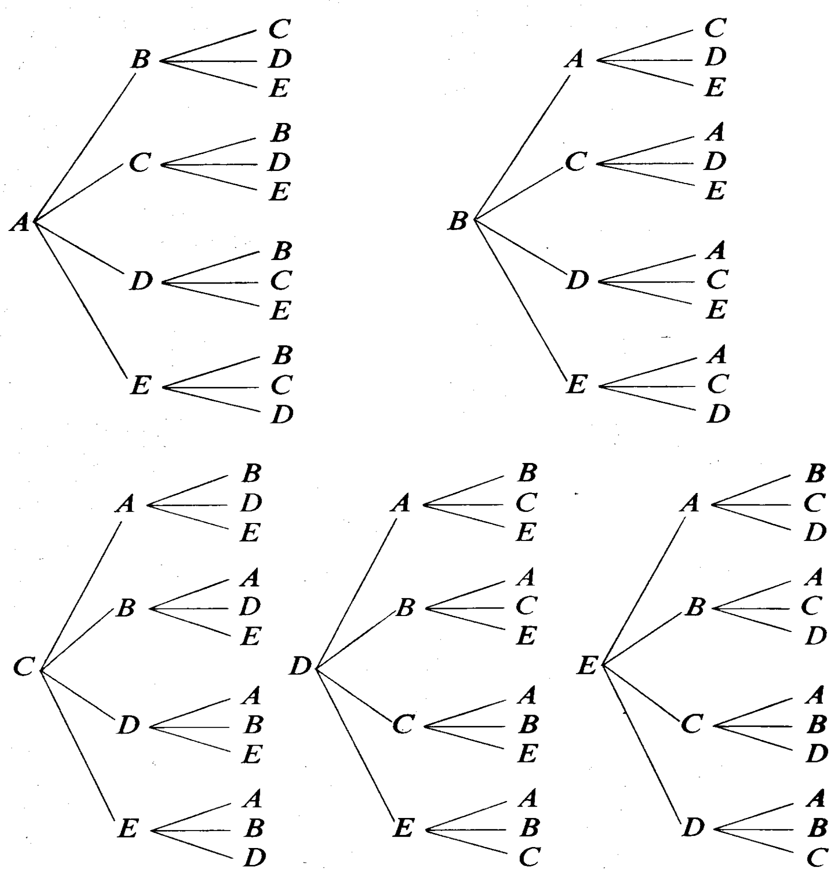

Figure 2.3.

2.2.2. Définition d'un arrangement

On a la définition suivante :

Définition 2.3. *Soit E un ensemble à n éléments et $0 \leq p \leq n$. On appelle arrangement de p éléments de E toute p-liste d'éléments distincts de E.*

On dit aussi arrangement de p éléments parmi n ou arrangement de n éléments pris p à p.

Un arrangement de p éléments parmi n est donc un p-uple formé en choisissant p éléments distincts parmi ces n éléments et en les rangeant à p places numérotées.

Dans l'exemple ci-dessus, chaque tiercé dans l'ordre est un arrangement de trois lettres choisies parmi les cinq lettres A, B, C, D, E.

Deux arrangements distincts diffèrent soit par le fait qu'ils ne contiennent pas les mêmes éléments, soit, s'ils contiennent les mêmes éléments, par l'ordre de ces éléments.

Le nombre d'arrangements de p éléments parmi n est le suivant :

Proposition 2.2. *Le nombre d'arrangements de p éléments parmi n est noté A_n^p et est donné par le produit de p entiers consécutifs, décroissant à partir de n :*

$$A_n^p = n \times (n-1) \cdots \times (n-p+1) \text{ (p facteurs).}$$

Le terme A_n^p s'écrit aussi :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Preuve

Le raisonnement du Paragraphe 2.2.1 se généralise de la manière suivante. Il y a n choix pour former la première composante des p-uples, il reste alors $n-1$ choix possibles pour forme la deuxième composante, ... pour la $i^{\text{ème}}$ composante, il reste $n-(i-1)$ choix, *etc.* et finalement pour la composante p, il reste $n-(p-1)$ choix. On a donc $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$ arrangements possibles.

On a par exemple

$$A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60,$$

3 entiers consécutifs décroissant à partir de 5. Le dernier facteur est bien égal à $n-p+1 = 5-3+1 = 3$.

La deuxième égalité de la proposition s'obtient en écrivant que :

$$A_n^p = n(n-1)...(n-p+1) = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)(n-p)(n-p-1)\cdots \times 2 \times 1}{(n-p)(n-p-1)\cdots \times 2 \times 1} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

2.2.3. Exemple : arrangements sur un sous-ensemble

Dans les problèmes de dénombrement on est souvent amené à effectuer des dénombrements sur des sous-ensembles déterminés.

Considérons l'exemple suivant. Une classe se compose de 10 garçons et de 7 filles ; de combien de façons distinctes peut-on choisir distribuer les rôles de Cléante, Frosine, Harpagon, Marianne et Valère.

a) Sans distinction de sexe ?

b) En choisissant 3 garçons pour tenir les rôles d'Harpagon, Cléante et Valère, et 2 filles pour tenir les rôles de Frosine et Marianne ?

Réponse. a) Dans ce premier cas, le nombre de rôles est le nombre d'arrangements de 5 élèves parmi 17 : il y a 17 manières de distribuer le rôle de Cléante, puis 16 manières de distribuer le rôle de Frosine, puis 15 manières de distribuer le rôle de Harpagon, puis 14 manières de distribuer le rôle de Marianne, puis 13 manières de distribuer le rôle de Valère, soit

$$A_{17}^{5} = 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 = 742560 \text{ possibilité de distribuer les rôles.}$$

b) Dans ce cas on distribue les 2 rôles féminins chez les 7 filles, soit $A_7^2 = 7 \times 6 = 42$ possibilités, et les 3 rôles masculins chez les 10 garçons, soit $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$ possibilités ; or à chaque couple de filles peut être associé 720 triplets de garçons ; il y a donc au total :

$$A_7^2 \times A_{10}^3 = 30240 \text{ possibilité de distribuer les rôles.}$$

Dans l'ensemble E des élèves de la classe on a donc effectué un dénombrement dans l'ensemble des filles et dans l'ensemble des garçons, le résultat s'obtenant ici en multipliant les résultats obtenus.

Exercice résolu 2.2. Une urne contient 19 boules dont 8 blanches, 5 vertes et 6 rouges.

1° On tire successivement et sans remise 8 boules de l'urne.

a) Combien y a-t-il de manières de tirer successivement de l'urne 3 boules blanches puis 2 boules vertes et enfin 3 boules rouges ?

b) Combien y a-t-il de manières de tirer successivement 2 boules blanches puis 2 boules vertes puis 1 boule blanche et enfin 3 boules rouges ?

2° A chaque tirage de la boule, on note le résultat et on remet la boule. Que deviennent les résultats précédents ?

Réponse :

Ici l'énoncé sous-entend que les boules sont distinctes et que l'on extrait des échantillons ordonnés de boules.

a) Il y a $A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$ façons de choisir les trois premières boules parmi les 8 boules blanches, puis $A_5^2 = 5 \times 4 = 20$ façons de choisir les 2 boules suivantes parmi les 5 boules vertes et enfin $A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$ façons de choisir les 3 dernières boules parmi les 6 boules rouges. Soit au total

$$A_8^3 \times A_5^2 \times A_6^3 = 336 \times 20 \times 120 = 806400 \ \text{ tirages distincts.}$$

b) En raisonnant comme précédemment il y a A_8^3 façons de choisir les boules des tirages 1, 2 et 5 parmi les 8 boules blanches, A_5^2 façons de choisir les boules des tirages 3 et 4 parmi les 5 boules vertes et enfin A_6^3 façons de choisir les boules des trois derniers tirages parmi les 6 boules rouges.

Le nombre de manières est donc le même qu'au cas précédent : pour un choix donné du nombre de boules sorties couleurs par couleurs, ici 3 blanches, 2 vertes et 3 rouges, l'ordre de sortie des couleurs ne joue pas.

On peut aussi raisonner directement :
- il y a 8 façons de choisir la première boule parmi les 8 boules blanches,
- il y a 7 façons de choisir la deuxième boule parmi les 7 boules blanches restantes,
- il y a 5 façons de choisir la troisième boule parmi les 5 boules vertes,
- il y a 4 façons de choisir la quatrième boule parmi les 4 boules vertes restantes,
- il y a 6 façons de choisir la cinquième boule parmi les 6 boules blanches restantes,
- il y a 6 façons de choisir la sixième boule parmi les 6 boules rouges,
- il y a 5 façons de choisir la septième boule parmi les 5 boules rouges restantes,
- il y a 4 façons de choisir la huitième boule parmi les 4 boules rouges restantes ;
soit

$$8 \times 7 \times 5 \times 4 \times 6 \times 6 \times 5 \times 4 = 806400 \text{ tirages distincts.}$$

c) Considérons le cas correspondant à *a)*. Il y a maintenant $8^3 = 512$ façons de choisir les 3 premières boules blanches parmi les 8 boules blanches : il y a 8 façons de choisir la première boule parmi les 8 boules blanches, ensuite comme après chaque tirage on remet la boule tirée dans l'urne, il y a 8 façons de choisir la seconde boule parmi les 8 boules blanche et encore 8 façons de choisir la dernière boule parmi les 8 boules blanches. De même, il y a $5^2 = 25$ façons de choisir les 2 boules suivantes parmi les 5 boules vertes et enfin $6^3 = 216$ façons de choisir les 3 dernières boules parmi les 6 boules rouges. Soit au total

$$512 \times 25 \times 216 = 2764800 \text{ tirages distincts.}$$

Le cas correspondant à *b)* cas se traite de manière similaire et conduit au même résultat.

Exercice résolu 2.3. Un code est composé d'une lettre de l'alphabet, d'un chiffre (entier entre 0 et 9), d'une lettre de l'alphabet distincte de la précédente et d'un chiffre distinct du chiffre précédent. Calculer le nombre de codes possibles.

Réponse :

Il y a ici

$$26 \times 10 \times 25 \times 9 = 58500 \text{ codes possibles.}$$

On peut aussi regarder cette question du point de vue ensembliste.

Le nombre de codes est le nombre d'arrangements de 4 éléments de $E = \{a, b, \cdots, z, 0, 1, \cdots, 9\}$ tels que ces arrangements ont une lettre de l'alphabet en position 1 et 3 et un chiffre en position 2 et 4. Il y a A_{26}^2 manières de choisir 2 lettres parmi les 26 lettres de E et A_{10}^2 manières de choisir 2 chiffres parmi les 10 chiffres de E.

On remarque que l'on peut, comme à l'Exercice 1.7, considérer les 4-uples de $E_1 \times E_2 \times E_3 \times E_3$; ici ces 4-uples sont tels que le troisième terme de chaque 4-uple est distinct du premier et le quatrième terme distinct du second.

2.3. Combinaisons

2.3.1. Notion de combinaison

Cinq chevaux A, B, C, D, E prennent le départ d'une course ; de combien de façons peut-on désigner les trois chevaux qui arriveront les premiers ? (On s'intéresse donc aux chevaux composant un tiercé, sans tenir compte de l'ordre du tiercé.)

Supposons par exemple, que les trois chevaux arrivés les premiers soient A, B, C (sans que l'on sache lequel est le premier, lequel est le second, lequel est le troisième) ; il y a alors $3\,!{=}6$ ordres d'arrivée possibles de ces trois chevaux :

$$A, B, C \quad A, C, B \quad B, A, C \quad B, C, A \quad C, A, B \quad C, B, A;$$

ainsi à chaque façon de désigner les trois chevaux arrivés les premiers, correspondent six « tiercés dans l'ordre » différents ; or nous avons vu (Paragraphe 2.2.1) qu'il y avait $5 \times 4 \times 3 = 60$ « tiercés dans l'ordre » distincts ; le nombre cherché est donc :

$$\frac{60}{6} = 10.$$

Pour énumérer les ensembles de trois chevaux correspondant aux dix façons de désigner les trois chevaux arrivant les premiers, nous pouvons énumérer d'abord les ensembles de deux chevaux correspondant aux différentes façons de désigner es deux chevaux arrivant les derniers et prendre ensuite les complémentaires de ces ensembles par rapport à l'ensemble des cinq chevaux :

$$\begin{array}{llll} (A,B) & (A,C) & (A,D) & (A,E) \\ (B,C) & (B,D) & (B,E) & \\ (C,D) & (C,E) & & \\ (D,E) & & & \end{array}$$

Les complémentaires sont :

$$\begin{array}{llll} (C,D,E) & (B,D,E) & (B,C,E) & (B,C,D) \\ (A,D,E) & (A,C,E) & (A,C,D) & \\ (A,B,E) & (A,B,D) & & \\ (A,B,C) & & & \end{array}$$

Chaque tiercé sans ordre d'arrivée correspond aussi à un chemin comportant trois termes des arbres suivants :

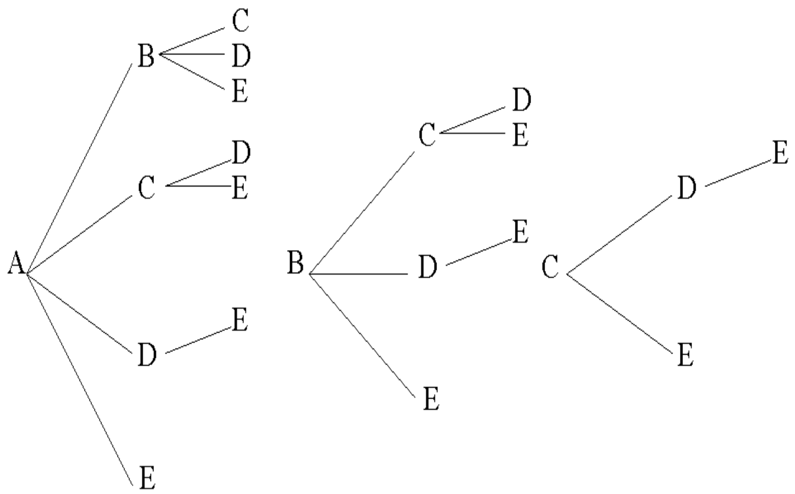

Figure 2.4.

2.3.2. Définition d'une combinaison

Définition 2.4. *Soit E un ensemble à n éléments et $p \leq n$. On appelle combinaison de p éléments de E, toute partie (i.e. sous-ensemble) de E à p éléments.*

On dit aussi combinaison de p éléments parmi n ou combinaison de n éléments pris p à p.

Dans l'exemple ci-dessus, nous avons énuméré les combinaisons de deux lettres, puis de trois lettres, choisies parmi les cinq lettres A, B, C, D, E.

Deux combinaisons distinctes ne contiennent pas les mêmes éléments.

2.3.3. Nombre de combinaisons de p éléments parmi n

Proposition 2.3. *Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n est noté C_n^p, ce nombre est donné par*

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!},$$

il est aussi noté $\binom{n}{p}$.

Preuve

Chaque combinaison de p éléments parmi n, donne naissance, par permutation de ses p éléments, à $p!$ arrangements distincts. Ensuite, soit deux arrangements générés par deux combinaisons distinctes ; comme ces deux combinaisons diffèrent au moins d'un terme, les deux arrangements sont donc distincts. Les combinaisons génèrent donc au total $p!C_n^p$ arrangements distincts et ce sont tous les arrangements que l'on peut obtenir, car tout arrangement est nécessairement issu d'une combinaison ; le nombre C_n^p de ces combinaisons s'obtient donc en divisant par $p!$ le nombre A_n^p des arrangements de p éléments choisis parmi n éléments :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{(n-1)...(n-p+1)}{p!}$$

ce que l'on peut aussi écrire :

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}.$$

On a ainsi :

$$C_5^3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3!} = 10;\ C_8^3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3!} = 56;\ C_n^1 = \frac{n}{1!} = n;$$

et aussi

$$C_n^n = \frac{n(n-1)\cdots \times 2 \times 1}{n!} = 1 :$$

il y a en effet une seule façon de choisir n éléments parmi n éléments.

Il y a un seul sous-ensemble à 0 élément d'un ensemble de n éléments : c'est $\emptyset$, nous posons donc $C_n^0 = 1$ (remarquons que pour $p = 0$, l'expression $\dfrac{n!}{(n-p)!p!}$ vaut 1 grâce à la convention $0! = 1$).

Exercice 2.4. *a)* Exprimer en fonction de n les valeurs de

$$C_n^1,\ C_n^2,\ C_n^{n-1},\ C_n^{n-2}.$$

b) Calculer l'expression

$$C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4;$$

et en déduire le nombre de parties d'un ensemble à 4 éléments (*cf.* le Paragraphe 2.5).

2.3.4. Propriétés des nombres C_n^p

Proposition 2.4. *On a les relations suivantes : pour* $0 \leq p \leq n$ *on a*

1) $C_n^0 = C_n^n = 1,$

2) $C_n^p = C_n^{n-p},$

3) $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ (triangle de Pascal),

4) $C_n^p = \dfrac{n}{p} C_{n-1}^{p-1}$, pour $1 \leq p \leq n$, $C_n^p = \dfrac{A_n^k}{A_p^k} C_{n-k}^{p-k}$, pour $0 \leq k \leq p \leq n$.

Preuve

1) *cf.* ci-dessus

2) On a avec la formule de la Proposition 2.3 :

$$C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-(n-p))!(n-p)!} = C_n^p.$$

On peut aussi démontrer ce point en passant par les ensembles : le complémentaire d'un sous-ensemble à p éléments par rapport à un ensemble à n éléments, a $n-p$ éléments ; le nombre des sous-ensembles à $n-p$ éléments, d'un ensemble de n éléments, est donc égal au nombre des sous-ensembles à p éléments.

Ainsi calculer C_{10}^7 revient à calculer C_{10}^3 :

$$C_{10}^7 = C_{10}^3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3} = 120.$$

En général dans le calcul de C_n^p, on simplifie le numérateur par le plus grand des deux termes $p!$ ou $(n-p)!$.

3) Parmi les C_5^3 combinaisons de 3 chevaux choisis parmi 5 chevaux, considérées au *a)*, distinguons celles qui contiennent le cheval A et celles qui ne le contiennent pas :

Les combinaisons qui contiennent le cheval A, s'obtiennent en adjoignant au cheval A, deux chevaux choisis parmi les 4 chevaux restant B, C, D, E : il y en a donc C_4^2.

Les combinaisons qui ne contiennent pas le cheval A, s'obtiennent en choisissant 3 chevaux parmi les 4 chevaux B, C, D, E : il y en a C_4^3 ; on a donc l'égalité :

$$C_5^3 = C_4^2 + C_4^3.$$

Le même raisonnement sur les combinaisons de p éléments choisis parmi n éléments conduit à l'identité :

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p.$$

4) Ce point est laissé en exercice. $\square$

2.4. Triangle de Pascal

La ligne n et la colonne p du Tableau 2.1 suivant (triangle de Pascal) donnent le nombre C_n^p (en numérotant les lignes et les colonnes à partir de 0). La propriété 3) de la Proposition 2.4 montre que chaque élément est égal à la somme de l'élément situé au-dessus, et de l'élément situé à gauche de ce dernier ; par exemple :

$$C_5^3 = C_4^2 + C_4^3;$$

cela permet de calculer de proche en proche les éléments du Tableau 2.2. Dans ce tableau les termes de la première colonne valent $C_n^0 = 1$ et ceux de la diagonale valent $C_n^n = 1$.

colonne	0	1	2	3	4	5	$\cdots$	$n+1$
ligne 0	C_0^0							
1	C_1^0	C_1^1						
2	C_2^0	C_2^1	C_2^2					
3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3				
4	C_4^0	C_4^1	$\underline{C_4^2}$	$\underline{C_4^3}$	C_4^4			
5	C_5^0	C_5^1	C_5^2	$\underline{C_5^3}$	C_5^4	C_5^5		
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$		
$n+1$	C_n^0	C_n^1		$\dots$	C_n^p	$\dots$	$\dots$	C_n^n

Tableau 2.1

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	$\underline{6}$	$\underline{4}$	1	
1	5	10	$\underline{10}$	5	1

Tableau 2.2.

Exercice 2.5. Compléter les lignes 6 et 7 du Tableau 2.2.

2.5. Applications

On donne ci-dessous quelques exercices résolus sur les arrangements et les combinaisons.

Exercices résolus 2.6.

1° Dans une classe de 10 élèves, de combien de façons peut-on choisir 3 élèves pour s'occuper de la bibliothèque ?

Réponse :

Ici l'ordre des élèves n'intervient pas : il interviendrait si par exemple on voulait attribuer à chaque élève une tâche déterminée. La réponse est donc le nombre de combinaisons de 3 personnes choisies dans un ensemble de 10 personnes :

$$C_{10}^3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3} = 120.$$

2° Dans une classe de 10 élèves, de combien de façons peut-on choisir 3 élèves pour tenir respectivement les rôles d'Harpagon, Cléante et Valère dans l'Avare ?

Réponse :

Ici l'ordre intervient : l'ordre des élèves détermine l'attribution des rôles. C'est le nombre d'arrangements de 3 personnes choisies parmi 10 personnes :

$$A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720.$$

3° Une classe se compose de 10 garçons et de 7 filles ; de combien de façons peut-on choisir 3 garçons pour tenir les rôles d'Harpagon, Cléante et Valère, et 2 filles pour tenir les rôles de Frosine et Marianne ?

Réponse :

Il y a 720 façons de choisir les 3 garçons et $A_7^2 = 7 \times 6 = 42$ façons de choisir les 2 filles ; or chaque triplet de garçons peut être associé à chaque couple de filles ; il y a donc $720 \times 42 = 30240$ façons de choisir les 3 garçons et les 2 filles.

4° De combien de façons peut-on choisir trois cartes dans un jeu de 32 cartes ?

Réponse :

Ici l'ordre de tirage des cartes n'intervient pas. On a donc

$$C_{32}^3 = \frac{32 \times 31 \times 30}{1 \times 2 \times 3} = 4960 \text{ façons.}$$

5° De combien de façons peut-on choisir 3 cartes dans un jeu de 32 cartes de manière que :

a) ces 3 cartes soient 2 rouges et 1 pique ;

b) ces 3 cartes contiennent 2 rois et 1 carreau (Soit 2 rois exactement et 1 carreau exactement).

Réponse :

a) On est dans une situation analogue à celle de l'exemple du Paragraphe 2.2.1, ici on regarde les combinaisons sur des sous-ensembles de l'ensemble des 32 cartes ; le nombre de combinaisons de 2 cartes parmi les 16 cartes rouges et de 1 carte parmi les 8 cartes pique.

Il y a C_{16}^2 façons de choisir les deux cartes rouges et C_8^1 façons de choisir la carte de pique ; le nombre cherché est donc :

$$C_{16}^2 \times C_8^1 = 120 \times 8 = 960.$$

b) On remarque que le roi de carreau est l'intersection des deux ensembles : rois et carreaux. Distinguons les

- cas où le roi de carreau ne figure pas parmi les 3 cartes (on choisit des cartes qui sont hors de l'intersection des deux ensembles roi et carreaux) : les 2 rois sont choisis parmi 3 rois et le carreau est choisi parmi 7 carreaux ; ces cas sont au nombre de :

$$C_3^2 \times C_7^1 = 3 \times 7 = 21;$$

- et les cas où le roi de carreau figure parmi les 3 cartes ; les 3 cartes se composent alors du roi de carreau, d'un autre roi et d'une carte qui n'est ni un roi ni un carreau ; il y a une façon de choisir le roi de carreau, 3 façons de choisir l'autre roi et 21 façons de choisir une carte parmi les 21 cartes qui ne sont ni roi, ni carreau ; ces cas sont donc au nombre de :

$$C_1^1 \times C_4^1 \times C_{21}^1 = 1 \times 3 \times 21 = 63;$$

le nombre de façons cherché est donc :

$$21 + 63 = 84.$$

Exercice résolu 2.7.

a) Combien y a-t-il de mains de 5 cartes (c'est-à-dire de paquets de 5 cartes) dans un jeu de 32 cartes ?

b) Combien y en a-t-il contenant exactement 2 cœurs ? (il y a 8 cœurs dans un jeu de 32 cartes).

c) Combien y en a-t-il contenant au moins 1 roi ? (il y a 4 rois en tout).

Solution :

a) Une main de 5 cartes est une combinaison de 5 éléments parmi 32. Le nombre de mains de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes est donc C_{32}^5 c'est-à-dire $32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28/(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)$. La réponse est donc : 201376.

b) Pour constituer un paquet de 5 cartes contenant exactement 2 cœurs, on peut procéder ainsi

(1) On choisit d'abord 2 coeurs parmi les huit.

(2) Puis 3 cartes parmi les 24 restantes.

Il y a C_8^2 façons de choisir 2 cœurs parmi 8. Pour chacun de ces choix, il y a C_{24}^3 façons de choisir 3 cartes parmi les 24 restantes.

Important : il convient de s'assurer qu'en procédant ainsi on n'obtient jamais plusieurs fois le même paquet de 5 cartes. Il en est bien ainsi, car une modification de choix dans l'une des étapes (1) ou (2) ci-dessus conduit nécessairement à une modification du paquet de 5 cartes obtenu (car une carte au moins sera différente).

En définitive, le nombre cherché est égal à :

$$C_8^2 \times C_{24}^3 = 123092.$$

Remarque. Pourquoi multiplie-t-on C_8^2 par C_{24}^3 ? (*cf.* aussi Chapitre 1 Paragraphe 1.10).

Pour chacune des C_8^2 façons de choisir 2 cœurs, il y a C_{24}^3 façons de choisir les 3 autres cartes. Le nombre total de choix possibles est donc $C_{24}^3 + C_{24}^3 + \cdots + C_{24}^3$ (C_8^2 fois) c'est-à-dire $C_8^2 \times C_{24}^3$.

c) Notons A l'ensemble des mains de 5 cartes contenant au moins 1 roi. Pour calculer $\operatorname{card}(A)$, il est plus simple ici de calculer d'abord $\operatorname{card}(\overline{A})$, c'est-à-dire le nombre de mains de 5 cartes ne contenant aucun roi (**passage au complémentaire** notamment quand il y a un «au moins»).

Constituer une main de 5 cartes ne contenant aucun roi revient à choisir les 5 cartes parmi les 28 cartes qui ne sont pas des rois.

On a donc : $\operatorname{card} \overline{A} = C_{28}^5$. Or il y a C_{32}^5 mains de 5 cartes possibles. Par suite : $\operatorname{card} A = C_{32}^5 - C_{28}^5$. D'où $\operatorname{card}(A) = 103096$.

Une autre solution pour la question *c)* Notons respectivement B_1, l'ensemble des mains de 5 cartes contenant exactement 1 roi ; B_2 : 2 rois ; B_3 : 3 rois ; B_4 : 4 rois.

Il est clair que les B_i sont 2 à 2 disjoints et que : $A = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$. Donc :

$$\operatorname{card} A = \operatorname{card} B_1 + \operatorname{card} B_2 + \operatorname{card} B_3 + \operatorname{card} B_4.$$

Pour constituer une main de 5 cartes contenant exactement 1 roi, on peut procéder ainsi :

- on choisit 1 roi parmi 4 : $C_4^1 = 4$ choix possibles ;

- on choisit 4 cartes parmi les 28 restantes : C_{28}^4 choix possibles ;

donc $\text{card}(B_1) = C_4^1 \times C_{28}^4$.

De même, on a : $\text{card}(B_2) = C_4^2 \times C_{28}^3$; $\text{card}(B_3) = C_4^3 \times C_{28}^2$ et $\text{card}(B_4) = C_4^4 \times C_{28}^1$. Donc :

$$\text{card}(A) = C_4^1 \times C_{28}^4 + C_4^2 \times C_{28}^3 + C_4^3 \times C_{28}^2 + C_4^4 \times C_{28}^1 = 103096.$$

On retrouve le résultat précédent. La première solution est évidemment plus rapide.

Une erreur «classique». Nous proposons à présent la solution suivante pour cette question. Pour constituer une main de 5 cartes contenant au moins un roi, on peut procéder ainsi :

(1) on choisit d'abord 1 roi : il y a 4 choix possibles ;

(2) puis on choisit 4 cartes parmi les 31 cartes restantes (31 et non pas 28, car la main peut contenir d'autres rois) : il y a C_{31}^4 choix possibles.

Le nombre de mains de 5 cartes contenant au moins 1 roi est donc égal à : $4 \times C_{31}^4 = 125860$.

Cette solution est donc fausse. celà vient du fait que, avec le procédé de dénombrement utilisé, certaines mains ont été comptées plusieurs fois.

Par exemple, la main {roi de pique, roi de trèfle, as de coeur, valet de carreau, sept de coeur} a été comptée : une fois lorsque le roi de pique a été choisi parmi les 4 rois dans l'étape (1) une autre fois lorsque c'est le roi de trèfle qui a été choisi dans l'étape (1).

Exercices avec solution 2.8.

1) Le loto : On tire au hasard 6 boules parmi 49. Combien de tirages possibles ?

2) Le poker : Dans un jeu de 32 cartes, on choisit 5 cartes au hasard (ces 5 cartes s'appellent une «main»).

a) Quel est le nombre de mains total ?

b) Quel est le nombre de nombre de mains qui contiennent exactement 3 as ?

c) Quel est le nombre de nombre de mains qui contiennent au moins 3 as ?

3) Quel est le nombre de types de dominos possibles dans un jeu de dominos (7 numéros) : traiter à part les doubles.

4) Quel est le nombre de comités de 3 personnes que l'on peut élire dans une assemblée de 20 personnes.

5) Tirages simultanés : une urne contient 10 boules numérotées $0, 1, \cdots, 10$. On en tire simultanément trois. Combien de tirages différents ?

Réponse des exercices :

1) C'est le nombre de façons de choisir 6 éléments parmi 49, soit $C_{49}^6 = 13983816$.

2) a) $C_{32}^5 = 201376$.

b) le nombre de façons de choisir 3 as parmi 4 est C_4^3, le nombre de façons de choisir 2 cartes parmi 28 « non as » est $C_{28}^2 = 201376$. On applique le principe multiplicatif, ce qui donne : $C_4^3 \times C_{28}^2 = 1512$.

c) Nombre de mains qui contiennent au moins 3 as : $C_4^3 \times C_{28}^2 + C_4^4 \times C_{28}^1 = 1540$.

3) $C_7^2 + 7$ (doubles) $= 21 + 7 = 28$.

4) $C_{20}^3 = 1140$.

5) Ici l'énoncé sous entend que l'échantillon tiré est non ordonné (extraction simultanée) ; le tirage est fait sans remise : $C_{10}^3 = 120$ tirages.

2.5. Nombre de parties d'un ensemble à n éléments

Considérons l'ensemble à 2 éléments :

$$E_2 = \{a, b\};$$

ses sous-ensembles sont au nombre de 4 :

$$\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a, b\}.$$

Parmi les sous-ensembles de l'ensemble

$$E_3 = \{a, b, c\},$$

distinguons :

- ceux qui ne contiennent pas l'élément c : ce sont les sous-ensembles de E_2 :

$$\{a\},\ \{b\},\ \{a, b\};$$

- et ceux qui contiennent l'élément c : on les obtient en adjoignant l'élément c à chacun des sous-ensembles précédents :

$$\{c\},\ \{a, c\},\ \{b, c\},\ \{a, b, c\};$$

ainsi en ajoutant un élément, c, à E_2 on forme l'ensemble E_3 qui a deux fois plus de sous-ensembles que E_2, soit $8 = 2^3$; le même raisonnement montre que l'ensemble $E_4 = \{a, b, c, d\}$ a deux fois plus de sous-ensembles que E_3, soit $16 = 2^4$. On voit ainsi que, plus généralement, un ensemble de n éléments a 2^n sous-ensembles.

Comment se répartissent ces 2^n sous-ensembles d'après le nombre de leurs éléments ? Rappelons que, par définition, C_n^p est le nombre de sous-ensembles à p

éléments, d'un ensemble de n éléments : cette répartition est donc, donnée par le Tableau 2.3 :

Nombre d'éléments	Fréquence
0	C_n^0
1	C_n^1
2	C_n^2
p	C_n^p
n	C_n^n
	2^n

Tableau 2.3

il en résulte l'identité :

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^p + \cdots + C_n^n = 2^n.$$

On a par exemple (*cf.* Tableau 2.2) :

$$\begin{array}{l} C_0^0 = 1 = 2^0 \\ C_1^0 + C_1^1 = 2 = 2^2 \\ C_2^0 + C_2^1 + C_2^2 = 1 + 2 + 1 = 2^3 \\ C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 1 + 3 + 3 + 1 = 2^4 \end{array}$$

etc.

Proposition 2.5. Formule du binôme. Pour deux réels ou complexes x, y et un entier n on a la relation

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n y^0 + C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \cdots + C_n^p x^{n-p} y^p + \cdots + C_n^n x^0 y^n.$$

Preuve

On montre d'abord en utilisant la combinatoire la formule

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^p x^p + \cdots + C_n^n x^n;$$

le résultat se déduisant alors en écrivant que pour $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= x^n(1+\frac{y}{x})^n \\ &= x^n(C_n^0(\frac{y}{x})^0 + C_n^1(\frac{y}{x})^1 + C_n^2(\frac{y}{x})^2 + \cdots + C_n^p(\frac{y}{x})^p + \cdots + C_n^n(\frac{y}{x})^n),\end{aligned}$$

qui donne le résultat (pour $x = 0$ le résultat est immédiat). On remarque que l'on peut aussi montrer la proposition par récurrence.

Montrons maintenant la formule donnant le développement de $(1+x)^n$.

Le développement (non réduit) du produit :

$$(1+x)(1+x),$$

est la somme des 4 produits obtenus en multipliant chaque terme de la première parenthèse par chaque terme de la seconde :

$$1 \times 1 + x \times 1 + 1 \times x + x \times x;$$

le développement de $(1+x)^2$ s'obtient en multipliant la somme à 4 termes ci-dessus par $(1+x)$ et contient par suite les $4 \times 2 = 2^3$ produits obtenus en multipliant chaque terme de cette somme par chaque terme de la somme $1+x$:

$$1\times1\times1+x\times1\times1+1\times x\times1+x\times x\times1+1\times1\times x+x\times1\times x+1\times x\times x+x\times x\times x.$$

Plus généralement le développement non réduit de $(1+x)^n$ est la somme de 2^n produits, chacun de ces produits étant obtenu en multipliant un terme de la première parenthèse $(1+x)$ par un terme de la deuxième parenthèse $(1+x)\cdots$ par un terme de la $n^{\text{ème}}$ parenthèse $1+x$. La réduction de cette somme se fait en groupant les monômes semblables (ici égaux) : le coefficient de x^p est la fréquence d'apparition dans cette somme, des produits égaux à x^p ; un tel produit est obtenu en choisissant p de ses facteurs égaux à x, et les $n-p$ facteurs restant égaux à 1 ; or il y a C_n^p façons de choisir, parmi les n parenthèses, les p parenthèses où on prend le terme x ; le coefficient de x^p est donc C_n^p , ce qui est résumé au Tableau 2.4.

Nombre d'éléments	Fréquence
x^0	C_n^0
x^1	C_n^1
x^2	C_n^2
x^p	C_n^p
x^n	C_n^n

Tableau 2.4

Le développement réduit est donc :

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^p x^p + \cdots + x^n.$$

Cette identité est aussi appelée formule du binôme de Newton. $\square$

Exemples 2.1

Dans le développement de $(1+x)^3$, les coefficients des monômes 1, x, x^2, x^3 sont C_3^0, C_3^1, C_3^2, C_3^3, c'est-à-dire les nombres de la ligne du Tableau 2.2, qui correspond à $n = 3$: 1, 3, 3, 1 : on a donc :

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3;$$

de même :

$$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4.$$

Exercice 2.9. Donner les développement de

$$(x+y)^4,\ (x+y)^5,\ (x+y)^6,\ (x-y)^4.$$

2.6. Exercices sur le Chapitre 2.

1. Combien existe-t-il d'applications bijectives de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ sur l'ensemble $\{a, b, c, d\}$ (On remarquera qu'à une telle application correspond une permutation de l'ensemble $\{a, b, c, d\}$.)

Généraliser.

2. Combien existe-t-il d'applications injectives de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ dans l'ensemble a, b, c, d, e, f ?

Généraliser.

3. Combien existe-t-il d'applications de l'ensemble $\{a, b\}$ dans l'ensemble $\{c, d, e\}$?

Généraliser.

4. Combien y a-t-il de nombres formés de 4 chiffres différents choisis parmi les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ?

5. Dans une collectivité composée de 5 hommes et de 3 femmes, combien peut-on former de comités composés :

a) de 3 hommes et de 2 femmes ?

b) de 5 personnes dont au moins 3 hommes ?

6. Une boîte contient 5 boules blanches et 3 boules rouges ; de combien de façons peut-on choisir deux boules :

a) blanches ?

b) rouges ?

c) de couleurs différentes ?

7. Quelles identités obtient-on en remplaçant x par 1 puis par -1 dans la formule du binôme ?

8. De combien de façons peut-on choisir 5 cartes dans un jeu de 32 cartes, de manière que ces 5 cartes contiennent

a) les 4 as ?

b) 2 as et 2 rois ?

c) au moins un as ?

9. Une boîte contient 5 boules blanches et 3 boules rouges ;

a) de combien de façons peut-on choisir 3 boules dont deux sont blanches et l'autre rouge ?

b) de combien de façons peut-on extraire successivement de la boîte une boule blanche, une boule rouge et une boule blanche ?

10. On considère $n+1$ points A, B, $\cdots$ K, L, tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés. On dénombre de deux façons les droites joignant ces points deux à deux :

1° On joint A à B, C, $\cdots$, K, L puis B à C, $\cdots$, L, etc. Quel est le nombre de droites obtenues ?

2° On joint successivement chaque point aux n autres points. Quel est le nombre de droites distinctes obtenues ?

3° En déduire l'identité :

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

3. PRINCIPES DU CALCUL DES PROBABILITÉS

3.1. Notion d'expérience aléatoire

Lorsque nous jetons un dé, on ne peut prévoir, à coup sûr, le numéro qui sortira ; on dit que l'expérience «jeter un dé» est une *expérience aléatoire* $\mathcal{E}$; une telle expérience peut être faite un nombre illimité de fois ; on appelle *épreuve* chaque répétition de cette expérience.

Désignons par Ω l'ensemble des six résultats (ou issues) possibles de l'expérience :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

En langage *probabiliste* Ω est appelé *univers de possibles* ou bien *univers*.

3.1.1 Evénements (ou évènement)

Nous pouvons considérer différents *événements* liés à l'expérience $\mathcal{E}$, par exemple :

A : « le numéro est pair » ;

B : « le numéro est supérieur à 3 » ;

C : « le numéro est 5 ».

Une épreuve amène la réalisation ou la non-réalisation d'un tel événement : par exemple, si nous jetons le dé et que le numéro 4 sort, pour cette épreuve, l'événement A est réalisé, l'événement B aussi, l'événement C n'est pas réalisé. Associons à chacun de ces événements l'ensemble des issues qui le réalisent :

- à l'événement A nous associons l'ensemble $E_A = \{2, 4, 6\}$;

- à l'événement B nous associons l'ensemble $E_B = \{4, 5, 6\}$;

- à l'événement C nous associons l'ensemble $E_C = \{5\}$.

A chaque événement lié à l'expérience $\mathcal{E}$ correspond donc un sous-ensemble de Ω et inversement à un sous-ensemble de Ω correspond un événement : au sous-ensemble $\{1, 2, 5\}$, par exemple, correspond l'événement «le numéro est 1 ou 2 ou 5 ».

Dans la suite nous identifierons un événement lié à l'expérience aléatoire (langage probabiliste) avec le sous-ensemble de Ω qui lui correspond.

Ainsi si A est l'événement « le numéro est pair », nous écrirons :

$$A = \{2, 4, 6\}.$$

3.1.2. Evénements certain et événement impossible

A l'ensemble Ω correspond l'événement «le numéro est l'un des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6» ; cet événement particulier est réalisé quel que soit le résultat de l'épreuve : on l'appelle *l'événement certain* ; Au sous-ensemble vide $\emptyset$ correspond l'événement impossible, qui n'est réalisé par aucun résultat de l'épreuve ; résumons :

$$\Omega \text{ est l'événement certain, } \emptyset \text{ est l'événement impossible,}$$

Puisque l'ensemble Ω, formé de 6 éléments, a 2^6 sous-ensembles (*cf.* Ch. 2 Par. 2.5), nous voyons que l'on peut considérer 2^6 événements liés à l'expérience aléatoire « jeter un dé ».

Les événements « le numéro est 1 », « le numéro est 2 », $\cdots$ « le numéro est 6 » qui correspondent aux sous-ensembles de Ω réduits à un élément (*singletons*), sont dits *événements élémentaires.*

3.1.3. Composition des événements

Etant donnés deux événements A et B, on peut considérer les événements suivants

- A ou B : cet événement se réalise si, et seulement si, l'un au moins des événements A et B est réalisé ; par exemple si A est l'événement « le numéro est pair », $A = \{2, 4, 6\}$, B l'événement « le numéro est supérieur à 3 », $B = \{4, 5, 6\}$, l'événement A ou B sera « le numéro est pair ou supérieur à 3 » ; il lui correspond le sous-ensemble $\{2, 4, 5, 6\}$ qui est la *réunion* $A \cup B$. On a :

$$A \text{ ou } B \text{ est l'événement } A \cup B.$$

- A et B : cet événement se réalise si, et seulement si, A et B sont tous deux réalisés ; dans l'exemple ci-dessus, A et B est l'événement « le numéro est pair et supérieur à 3 » ; il lui correspond le sous-ensemble $\{4, 6\}$ qui est l'*intersection* $A \cap B$. On a :

$$A \text{ et } B \text{ est l'événement } A \cap B.$$

L'événement *contraire* d'un événement A est l'événement qui est réalisé si A ne l'est pas et non réalisé si A est réalisé ; l'événement contraire de l'événement A : « le numéro est pair » est « le numéro n'est pas pair »il lui correspond le sous-ensemble $1, 3, 5$ qui est le *complémentaire* de A dans Ω noté $\overline{A}$.

$$\overline{A} \text{ est l'événement contraire de } A.$$

Deux événements A et B tels que l'événement A et B soit impossible, sont dits incompatibles (on dit encore qu'ils s'excluent mutuellement) : ils correspondent à deux sous-ensembles *disjoints* (c'est-à-dire dont l'intersection est vide).

$$\text{Les événements } A \text{ et } B \text{ sont incompatibles } \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset.$$

Par exemple A et C sont incompatibles.

Enfin on dit qu'un événement A *implique* un événement B si la réalisation de A entraîne celle de B ; on a alors $A \subset B$ par exemple l'événement « le numéro est 6 » implique l'événement « le numéro est pair » ; on a $\{6\} \subset \{2, 4, 6\}$.

$$A \text{ implique } B \Leftrightarrow A \subset B.$$

3.1.4. Autre exemple

(i) Considérons l'expérience aléatoire « tirer une carte d'un jeu de 32 cartes » ; elle a 32 issues possibles et l'ensemble Ω (événement certain) est :

$\Omega = \{$as de pique, roi de pique, dame de pique, valet de pique, 10 de pique, 9 de pique, 8 de pique, 7 de pique, as de coeur, $\cdots$, 7 de cœur, as de carreau, $\cdots$, 7 de carreau, as de trèfle, $\cdots$, 7 de trèfle$\}$. Il y a ici 2^{32} événements dont voici quelques-uns :

1° « pique » = l'ensemble des 8 cartes de pique ;

2° « trèfle » = l'ensemble des 8 cartes de trèfle ;

3° « roi » = roi de pique, roi de coeur, roi de carreau, roi de trèfle ;

4° « figure » l'ensemble des rois, dames, valets ;

5 °« pique » ou « trèfle » l'ensemble des 16 cartes noires ;

6° « pique » et « trèfle » = $\emptyset$, événement impossible ;

7° « pique » ou « roi » = $\{$les 8 piques, le roi de trèfle, le roi de cœur et le roi de carreau$\}$;

8° « pique » et « roi » = $\{$roi de pique$\}$: c'est un événement élémentaire ;

9° l'événement contraire de « pique » = « cœur » ou « carreau » ou « trèfle ».

Supposons qu'à la suite d'une épreuve, la carte tirée soit le roi de trèfle : les événements 2° , 3°, 4°, 5°, 7° et 9° sont réalisés, les événements 1°, 6° et 8° ne sont pas réalisés.

Les événements « pique » et « trèfle » par exemple sont incompatibles.

(ii) L'expérience aléatoire « jeter une pièce » a deux issues possibles : pile et face ; il y a $2^2 = 4$ événements liés à cette expérience :

1° $\Omega = \{P, F\}$ = « pile ou face » : c'est l'événement certain.

$$\left.\begin{array}{l} 2^{\circ}\ \{P\} = \text{« pile »} \\ 3^{\circ}\ \{F\} = \text{« face »} \end{array}\right\} \text{ce sont ici les deux événements élémentaires.}$$

4° $\emptyset$ = événement impossible, par exemple l'événement « pile » et « face ».

Si une épreuve amène face, les événements 1° et 3° sont réalisés, les événements 2° et 4° ne le sont pas.

3.2. Probabilité uniforme

Considérons l'expérience aléatoire précédente « tirer une carte d'un jeu de 32 cartes ». Si ce jeu est neuf et battu pour des raisons de symétrie, chaque carte joue le même rôle, on dira qu'elle « a le même nombre de chances » d'être tirée et on traduit cela mathématiquement par le nombre

$$P(\text{« roi de cœur »}) = 1/32.$$

Cette notion P est appelée probabilité. La probabilité de tout événement A est alors donnée par la formule classique :

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}},$$

ou encore en termes d'ensembles et avec les cardinaux :

$$P(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}. \tag{3.1}$$

Ainsi la probabilité de tirer un as est la probabilité de l'événement B = « un as » vaut

$$P(B) = \frac{\text{nombre d'as}}{\text{nombre de cartes}} = \frac{4}{32}.$$

Avec les propriétés du cardinal d'un ensemble, la fonction P définie par la formule (3.1) apparaît comme une fonction sur les parties Ω vérifiant les propriétés suivantes :

P_1 : $0 \leq P(A) \leq 1$, *pour toute partie* A *de* Ω,

P_2 : $P(\Omega) = 1$,

P_3 : *si* A *et* B *sont deux parties de* Ω *telles que* $A \cap B = \emptyset$, *alors* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *(propriété d'additivité).*

Exercice 3.1. Vérifier les trois propriétés P_1, P_2, P_3 ci-dessus.

Cette probabilité est appelée probabilité uniforme car elle donne le même poids à chaque réalisation. C'est celle que l'on sous-entend quand on dit «tirer au hasard»sans autre précision. Par exemple les tirages du Loto sont fait au hasard, c'est à dire suivant une probabilité uniforme.

3.3. Définition de la probabilité dans le cas où l'univers des possibles est un ensemble fini

Définition 3.1. *Soit Ω un ensemble fini et P une fonction définie sur les parties de Ω, alors P est une probabilité sur Ω si P vérifie*

1° Si A est un sous-ensemble de Ω alors $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \subset \Omega$.

2° Si A et B sont deux sous-ensembles disjoints de Ω alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

3° $P(\Omega) = 1$.

Ainsi la probabilité apparaît ainsi comme une application de l'ensemble des événements dans l'intervalle $[0, 1]$, satisfaisant 2° et 3°.

Si ω est un élément de Ω, il est usuel de noter $P(\{\omega\})$ par $P(\omega)$.

On a alors les propriétés suivantes.

3.4. Propriétés d'une probabilité

Ci-dessous A et B sont des parties de Ω. On a

a) $P(\emptyset) = \emptyset$, la probabilité de l'événement impossible et nulle ;

b) Si $A_1, A_2, \cdots, A_p$ sont p événements deux à deux incompatibles alors

$$P(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_p) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_p);$$

c) Si $A_1, A_2, \cdots, A_p$ est une partition de Ω (ces événements sont donc à deux incompatibles, leur réunion certaine) alors

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p) = 1 = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_p);$$

(cette propriété est souvent appelée « propriété des probabilités totales ».)

d) Cas particulier de c) $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ (passage au complémentaire) ;

e) Si $A \subset B$ alors $P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$;

f) En particulier avec e) Si $A \subset B$ (A implique B), alors $P(A) \leq P(B)$;

g) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Montrons les points ci-dessus.

Comme $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$ on a donc

$$1 = P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset) = 1 + P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = 0.$$

ce qui donne *a)*.

La propriété *b)* s'obtient par récurrence en utilisant la propriété d'additivité d'une probabilité (2^o de la Définition 3.1).

La propriété *b)* est vraie pour $p = 2$. Supposons que *b)* soit vraie pour toute suite de $p \geq 2$ événements $A_1, A_2, \cdots, A_p$ deux à deux disjoints. Soient $A_1, A_2, \cdots, A_p$, A_{p+1}, $p+1$ événements incompatibles deux à deux, on a

$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p) \cap A_{p+1} = (A_1 \cap A_{p+1}) \cup (A_2 \cap A_{p+1}) \cup \cdots \cup (A_p \cap A_{p+1}) = \emptyset;$$

d'où

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p \cup A_{p+1}) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p) + P(A_{p+1});$$

qui conduit au résultat.

c) Ce point est une conséquence de *b)* et du fait que la réunion des événements soit égale à Ω.

c) donne ensuite *d*) ;

Pour le point *e)*, soit $A \subset B$, on a alors $B = (B \backslash A) \cup A$ et cette réunion est *disjointe* (*i.e.* c'est une réunion d'ensembles disjoints) on a donc avec la propriété d'additivité de P :

$$P(B) = P((B \backslash A) \cup A) = P(B \backslash A) + P(A) \Rightarrow P(B \backslash A) = P(B) - P(A);$$

ce qui donne *e*) dont *f*) est une conséquence.

Le point *g)* vient de l'égalité

$$(A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A),$$

avec *e)*, le premier membre de cette égalité vaut :

$$P((A \cup B) \backslash (A \cap B)) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$$

et avec la propriété d'additivité d'une probabilité et la propriété *e)* le second membre vaut, la réunion étant disjointe :

$$\begin{aligned} P((A \backslash B) \cup (B \backslash A)) = P(A \backslash B) + P(B \backslash A) &= P(A \backslash (A \cap B)) + P(B \backslash (A \cap B)) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A) \end{aligned}$$

qui conduit au résultat.

La Proposition suivante exprime qu'une probabilité est entièrement définie si on connaît la valeur de la probabilité de chaque événement élémentaire.

Proposition 3.1. *Soit $\Omega = \{e_1, e_1, \cdots, e_p\}$ un ensemble fini alors la donnée d'une probabilité P sur Ω équivaut à la donnée des probabilités des événements élémentaires : $P(e_1) \geq 0$, $P(e_2) \geq 0$, $\cdots$, $P(e_n) \geq 0$ tels que*

$$P(e_1) + P(e_2) + \cdots + P(e_n) = 1.$$

Si par exemple A est l'événement $\{e_1, e_2, e_3\}$, alors sa probabilité pourra se calculer à partir des probabilités des événements élémentaires avec

$$P(A) = P(e_1) + P(e_2) + P(e_3).$$

Définition 3.2. *Soit Ω un ensemble fini, on appelle probabilité uniforme la probabilité P définie pour $A \subset \Omega$ par*

$$P(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}.$$

Exercice résolu 3.2. Vérifier la propriété *g)* sur l'exemple suivant :

$$\Omega = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}, A = \{e_1, e_2, e_3\},\ B = \{e_2, e_4\};$$

en utilisant les valeurs des $P(e_i)$.

Réponse :

On a

$$A \cup B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}\ A \cap B = \{e_2\}.$$

On a ici :

$$P(A) = P(e_1) + P(e_2) + P(e_3),\ P(B) = P(e_2) + P(e_4);$$

$$P(A \cup B) = P(e_1) + P(e_2) + P(e_3) + P(e_4),\ P(A \cap B) = P(e_2),$$

on retrouve alors la relation demandée.

Exercice 3.3.

a) Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ muni de la probabilité uniforme notée P. Calculer les valeurs de $P(\{5\})$, $P(\{1, 4, 6\})$, de $P(\{\text{nombres premiers de }\Omega\})$.

b) Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. On pose

$$P(\{i\}) = C_4^i \Big(\frac{1}{3}\Big)^i \Big(\frac{2}{3}\Big)^{4-i} \text{ (loi de type binomiale).}$$

Montrer que P est une probabilité sur Ω et calculer $P(\{1, 3\})$.

Exercice résolu 3.4. Soit $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

a) On pose Ω l'ensemble des arrangements de 2 éléments de U, muni de la probabilité uniforme. Quelle est la probabilité des ensembles suivants :

$$A = \{(1, 2)\},\ B = \{(2, 1), (6, 1)\},\ C = \{(x, y) \in \Omega,\ x \text{ est pair et } y \text{ est impair}\},$$

$$D = \{(x, y) \in \Omega,\ x \text{ est pair et } y \text{ est pair}\}.$$

Reprendre les calculs avec $\Omega = U \times U$.

b) Ω est l'ensemble des combinaisons de 2 éléments de U, muni de la probabilité uniforme. Quelle est la probabilité des ensembles suivants :

$$A = \{\{1, 2\}\},\ B = \{\{2, 1\}, \{6, 1\}\},$$

$$C = \{c \in \Omega,\ c \text{ contient un terme pair et un terme impair}\},$$

$$D = \{c \in \Omega,\ c \text{ contient deux termes pairs}\}.$$

Réponse :

a) Le cardinal de Ω est $A_6^2 = 6 \times 5 = 30$, la probabilité P étant uniforme, la probabilité d'un événement élémentaire est donc de $1/30$. On a alors $P(A) = 1/30$, $P(B) = 2/30 = 1/15$. Pour C : il y a 3 manières de choisir le premier chiffre parmi les nombres pair et 3 manières de choisir le second chiffre parmi le nombres impairs. On a donc $P(C) = (3 \times 3)/30 = 3/10$. Pour D, comme $(x, y) \in \Omega$, on doit avoir x pair, y pair et $y \neq x$ (arrangement). De manière similaire on trouve $P(D) = (3 \times 2)/30 = 1/5$.

Dans le cas où $\Omega = U \times U$, on a $\text{card}(U) = 6 \times 6 = 36$, on trouve alors $P(A) = 1/36$, $P(B) = 2/36 = 1/18$, $P(C) = (3 \times 3)/36 = 3/12$ et $P(D) = (3 \times 3)/36 = 3/12$.

b) Dans ce cas cardinal de Ω est $C_6^2 = (6 \times 5)/2 = 15$, la probabilité P étant uniforme, la probabilité d'un événement élémentaire est donc de $1/15$. On a alors $P(A) = 1/15$, $P(B) = 2/15$. Pour C : il y a $C_3^1 = 3$ manières de choisir un chiffre parmi les nombres pair et $C_3^1 = 3$ manières de choisir le second chiffre parmi les nombres impairs. On a donc $P(C) = (3 \times 3)/15 = 9/15$. Pour D, ses éléments sont $\{2, 4\}$, $\{2, 6\}$ et $\{4, 6\}$ (si on calcule le nombre d'éléments de D en utilisant la formule $C_3^1 \times C_2^1 = 6$, il faut alors enlever les éléments comptés plusieurs fois) $P(D) = 3/15$.

Nous construisons maintenant des exemples d'espaces muni d'une probabilité à partir de problèmes de jeux.

3.5. Cas des problèmes de jeux

Si nous considérons un dé à jouer de bonne fabrication, nous sommes tentés de penser que, par symétrie, les probabilités des six événements élémentaires sont égales. Cela conduit à la notion de dé parfait.

Un dé (fictif) est dit parfait lorsque l'on suppose que les probabilités des six événements élémentaires sont égales (on dit encore que les événements élémentaires sont équiprobables).

L'expérimentation peut nous montrer si un dé réel est plus ou moins voisin de l'état parfait : si, au cours d'un grand nombre d'épreuves, les fréquences d'apparition des six faces sont très voisines, le dé expérimenté est voisin de l'état parfait. Citons ici, l'expérimentation faite par Buffon sur une pièce de monnaie sur 4040 jets de la pièce, l'événement « face » s'est réalisé 2 028 fois (on pourra effectuer cette expérience avec un ordinateur muni d'un générateur de nombres aléatoires), ce qui donne une fréquence relative égale à 0,502 ; cette valeur approchée de la probabilité de l'événement face est assez voisine de $\frac{1}{2}$, probabilité de l'événement « face » dans le cas d'une pièce parfaite ; la pièce expérimentée peut être considérée comme voisine de l'état parfait.

Les problèmes de jeux (problèmes théoriques où l'expérience aléatoire est : jeter un dé, jeter une pièce, tirer une carte d'un jeu de cartes, tirer une boule d'une urne, *etc.*.) sont basés sur *l'hypothèse que les événements élémentaires sont équiprobables*. Si ces événements élémentaires sont au nombre de n (on les appelle traditionnellement « cas possibles »)

$$\{e_1\}, \{e_2\}, ..., \{e_n\};$$

on a :

$$et \begin{cases} P(e_1) = P(e_2) = \cdots = P(e_n); \\ P(e_1) + P(e_2) + ... + P(e_n) = 1 \end{cases}$$

d'où

$$P(e_1) = P(e_2) = ... = P(e_n) = \frac{1}{n}.$$

Si A est un événement correspondant à un sous-ensemble de j éléments (appelés « cas favorables à l'événement A ») :

$$A = \{e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_j}\};$$

on a :

$$P(A) = P(e_{i_1}) + P(e_{i_1}) + \cdots + P(e_{i_j}) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{j\ fois} = \frac{j}{n}$$

$$= \frac{\text{nombre de cas favorables à l'événement A}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Historiquement, cette relation qui est ici une conséquence de l'hypothèse d'additivité et de l'hypothèse d'événements élémentaires équiprobables a longtemps servi de définition à la probabilité d'un événement.

3.6. Exemples de problèmes de jeux

1° On jette un dé ; quelle est la probabilité d'avoir :

(i) le numéro 2 ;

(ii) un numéro pair ;

(iii) un numéro supérieur à 4 ?

Les événements envisagés sont

(i) $A = \{2\}$; c'est ici un événement élémentaire :

$$P(A) = \frac{1}{6}.$$

(ii) $B = \{2, 4, 6\}$; sur les 6 cas possibles, 3 sont favorables à l'événement B

$$P(B) = P(\{2, 4, 6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

(iii) $C = \{5, 6\}$; 2 cas favorables :

$$P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Modélisation de cette expérience. On prend pour Ω *l'ensemble* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *et pour probabilité, la probabilité uniforme. On a alors, par exemple,* $P(B) = \operatorname{card}(\{2, 4, 6\}) / \operatorname{card}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = 3/6 = 1/2$.

2° On tire une carte d'un jeu de 32 cartes ; quelles sont les probabilités des événements :

(i) $A =$ « as » ;

(ii) $B =$« carreau » ;

(iii) $C =$ « valet de cœur » ?

Il y a ici 32 cas possibles :

(i) cas favorables à l'événement A :

$j(A) = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$;

(ii) $j(B) = 8 \Rightarrow P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$;

(iii) $j(C) = 1 \Rightarrow P(C) = \frac{1}{32}$.

Modélisation de cette expérience. On prend pour Ω *l'ensemble des cartes et pour probabilité, la probabilité uniforme. On a alors, par exemple,* $P(B) = \operatorname{card}(B) / \operatorname{card}(\Omega) = 8/32 = 1/4$, *$B$ étant l'ensemble composé des 8 cartes de carreau.*

3° On tire 3 cartes d'un jeu de 32 cartes ; quelle est la probabilité d'obtenir :

(i) 3 as (événement A) ;

(ii) 2 rois et une dame (B) ;

(iii) au moins un valet (C) ?

Le nombre de cas possibles est le nombre de façons de choisir 3 cartes parmi 32, soit :

$$n = C_{32}^3 = \frac{32 \times 31 \times 30}{1 \times 2 \times 3} = 4960.$$

(i) Cas favorables à l'événement A : $j(A)$ =nombre de façons de choisir 3 cartes parmi les 4 as $= C_4^3 = C_4^1 = 4$;

$$P(A) = \frac{4}{4960} = \frac{1}{1240}.$$

(ii) Il y a $C_4^2 = 6$ façons de choisir 2 rois parmi les 4 rois et $C_4^1 = 4$ façons de choisir une dame parmi les 4 dames ; donc $j(B) = 6 \times 4 = 24$ et :

$$P(B) = \frac{24}{4960} = \frac{3}{620}.$$

(iii) Première façon : considérons les événements :

$C_1 =$ « parmi les 3 cartes il y a exactement un valet » ;

$C_2 =$ « parmi les 3 cartes il y a exactement 2 valets » ;

$C_3 =$ « parmi les 3 cartes il y a exactement 3 valets » ;

ces trois événements sont deux à deux incompatibles et :

$$C = C_1 \text{ ou } C_2 \text{ ou } C_3$$

d'où :

$$P(C) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3);$$

pour $j(C_1)$, il y a 4 façons de choisir un valet parmi les 4 valets et $C_{28}^2 = 378$ façons de choisir les deux autres cartes parmi les 28 cartes qui ne sont pas des valets :

$$j(C_1) = 4 \times 378 \Rightarrow P(C_1) = \frac{4 \times 378}{4960};$$

de même

$$j(C_2) = C_4^2 \times C_{28}^1 = 6 \times 28 \Rightarrow P(C_2) = \frac{6 \times 28}{4960};$$

$$j(C_3) = C_4^3 = C_4^1 = 4 \Rightarrow P(C_3) = \frac{4}{4960};$$

$$P(C) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) = \frac{421}{1240}.$$

- Deuxième façon : il est plus court de considérer l'événement contraire de C $\overline{C}$ soit :

$$\overline{C} = \text{« parmi les 3 cartes, il n'y a aucun valet ».}$$

$j(\overline{C})$ = nombre de façons de choisir les 3 cartes parmi les 28 cartes qui ne sont pas des valets :

$$j(\overline{C}) = C_{28}^3 = \frac{28 \times 27 \times 26}{1 \times 2 \times 3} = 28 \times 9 \times 13;$$

d'où :

$$P(\overline{C}) = \frac{28 \times 9 \times 13}{4960} = \frac{819}{1240}.$$

on en tire :

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = \frac{421}{1240}.$$

Modélisation de cette expérience. On prend pour Ω l'ensemble des combinaisons de trois cartes parmi les 32 cartes du jeu et pour probabilité, la probabilité uniforme. On a alors, par exemple : l'événement A est composé des événements élémentaires suivants :

{ As de cœur, As de carreau, As de pique}
{ As de cœur, As de carreau, As de trèfle}
{ As de cœur, As de trèfle, As de pique}
{ As de carreau, As de pique, As de trèfle}.

et sa probabilité est donnée par $P(A) = \operatorname{card}(A)/\operatorname{card}(\Omega) = 4/C_{32}^3 = 1/1240$.

4° On jette simultanément un dé rouge et un dé blanc ; probabilité d'amener :

(i) un double (deux numéros égaux), événement (A_1) ;

(ii) un 2 et un 5, (A_2) ;

(iii) un 2 rouge et un 5 blanc, (A_3) ;

(iv) une somme égale à 7, (B) ;

(v) une somme au plus égale à 3, (C) ;

(vi) une somme au plus égale à 11, (D).

Chaque résultat du dé rouge peut arriver avec chaque résultat du dé blanc ; il y a donc $6 \times 6 = 36$ cas possibles équiprobables, que nous rangeons dans le tableau 3.1 :

$(1,1)$	$(2,1)$	$(3,1)$	$(4,1)$	$(5,1)$	$(6,1)$
$(1,2)$	$(2,2)$	$(3,2)$	$(4,2)$	$(5,2)$	$(6,2)$
$(1,3)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(4,3)$	$(5,3)$	$(6,3)$
$(1,4)$	$(2,4)$	$(3,4)$	$(4,4)$	$(5,4)$	$(6,4)$
$(1,5)$	$(2,5)$	$(3,5)$	$(4,5)$	$(5,5)$	$(6,5)$
$(1,6)$	$(2,6)$	$(3,6)$	$(4,6)$	$(5,6)$	$(6,6)$

Tableau 3.1

La notation $(2,3)$ par exemple, signifiant : le dé rouge amène le 2 et le dé blanc amène le 3.

(i) Il y a six « doubles » dans ce tableau :

$$j(A_1) = 6 \Rightarrow P(A_1) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

(ii) Deux des 36 cas possibles sont favorables à l'événement A_2 :

$$(2,5) \text{ et } (5,2); A_2 = \{(2,5),(5,2)\}$$

$$j(A_2) = 2 \Rightarrow P(A_2) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

(iii) $A_3 = \{(2,5)\}$ (événement élémentaire) :

$$P(A_3) = \frac{1}{36}.$$

(iv) Les cas favorables à l'événement B sont :

$$(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1);$$

$$j(B) = 6 \Rightarrow P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

(v) On a :

$$C = C_1 \text{ ou } C_2 \ (C_1 \text{ et } C_2 \text{ incompatibles});$$

avec :

$$C_1 = \text{« la somme est égale à 2 »}$$

$$C_2 = \text{« la somme est égale à 3 »}.$$

$$j(C_1) = 1 \Rightarrow P(C_1) = \frac{1}{36};$$

$$j(C_2) = 2 \Rightarrow P(C_2) = \frac{2}{36};$$

$$P(C) = P(C_1) + P(C_2) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

(vi) Il est préférable de considérer l'événement contraire :

$$\overline{D} = \text{« la somme est égale à 12 »}.$$

$$j(\overline{D}) = 1 \Rightarrow P(\overline{D}) = \frac{1}{36};$$

d'où :

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = \frac{35}{36}.$$

Modélisation de cette expérience. On prend pour Ω *l'ensemble des couples formés avec les chiffres allant de 1 à 6 et pour probabilité, la probabilité uniforme. On a alors, par exemple :* $P(A_2) = \operatorname{card}(A_2)/\operatorname{card}(\Omega) = \operatorname{card}(\{(2,5),(5,2)\})/\operatorname{card}(\Omega) = 2/36 = 1/18$.

5° Une urne contient 5 boules blanches et 3 boules rouges :

(i) On tire deux boules ; probabilité d'avoir 2 boules blanches (événement A) ?

(ii) On tire une boule, on observe sa couleur et on la remet dans l'urne, puis on tire de nouveau une boule et on observe sa couleur ; probabilité pour que les deux boules tirées soient blanches (événement B) ?

(iii) On tire successivement deux boules sans remise ; probabilité pour qu'elles soient toutes deux blanches (événement A') ? que le première soit rouge et la seconde blanche (événement B') ? qu'elles soient toutes deux rouges (événement C) ? que le première soit blanche et la seconde rouge (événement D) ? que l'une soit blanche et l'autre rouge (événement E) ?.

(i) Ici, l'enoncé sous-entend un tirage simultané et donc un échantillon non ordonné.

n = nombre de cas possibles=nombre de façons de choisir 2 boules parmi $8 = C_8^2$;

$j(A)$ =nombre de cas favorables = nombre de façons de choisir 2 boules parmi les 5 boules blanches = C_5^2 ;

$$P(A) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{\dfrac{5\times 4}{1\times 2}}{\dfrac{8\times 7}{1\times 2}} = \frac{5}{14}.$$

(ii) Expérience aléatoire différente de la première : il y a 8 façons de choisir la première boule et 8 façons de choisir la deuxième, donc :

$$n = \text{nombre de cas possibles} = 8\times 8 = 64;$$

il y a 5 façons de choisir la première boule parmi les 5 boules blanches et 5 façons de choisir la deuxième boule parmi les 5 boules blanches :

$$j(B) = 5\times 5 \Rightarrow P(B) = \frac{25}{64}.$$

(iii) Expérience aléatoire différente des deux précédentes. Le nombre de façons de choisir de manière ordonnée 2 boules parmi 8 est A_8^2 ; donc :

$$n = \text{nombre de cas possibles} = A_8^2 = 8\times 7 = 56.$$

Il y a $A_5^2 = 5 \times 4 = 20$ façons de sortir deux boules blanches :

$$j(A') = 5 \times 4 \Rightarrow P(A') = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}.$$

On retrouve bien la même probabilité qu'au (*ii*).

Il y a ensuite $3 \times 5 = 15$ façons de sortir un boule rouge et une boule blanche ;

$$j(B') = 3 \times 5 \Rightarrow P(B') = \frac{15}{56}.$$

Un raisonnement similaire donne

$$P(C) = \frac{3 \times 2}{56} = \frac{3}{28} \text{ et } P(D) = \frac{5 \times 3}{56} = \frac{15}{56}.$$

On vérifie que

$$P(A') + P(B') + P(C) + P(D) = 1$$

du au fait que A', B' C et D est un système complet d'événement.

L'événement E est égal à B ou C qui sont des événements disjoints ; donc

$$P(E) = P(B') + P(C) = 2 \times \frac{15}{56} = \frac{15}{28}.$$

L'expérience (i) est modélisée par un tirage d'urne exhaustif (sans remise) d'un échantillon non ordonné de 2 *boules dans une urne contenant* 8 *boules distinctes. Cette modélisation est utilisée lorsque les boules sont tirées simultanément.*

L'expérience (ii) est modélisée par un tirage d'urne non exhaustif (avec remise) d'un échantillon ordonné de 2 *boules dans une urne contenant* 8 *boules distinctes. Cette modélisation avec ordre est souvent utilisée lorsque les boules sont tirées avec remise.*

L'expérience (iii) est modélisée par un tirage d'urne exhaustif (sans remise) d'un échantillon ordonné de 2 *boules dans une urne contenant* 8 *boules distinctes. Cette modélisation est souvent utilisée lorsque les boules sont tirées successivement et sans remise. Toutefois, si l'on s'intéresse à des événement où l'ordre de sortie des couleurs n'intervient pas, comme par exemple l'événement* A'*, alors on peut utiliser la modélisation choisie pour le (i) et raisonner sur les combinaisons par exemple comme au loto où les boules sont tirées successivement et où l'ordre de sortie n'intervient pas.*

3.7. Exercices sur le chapitre 3

11. On tire une carte d'un jeu de 32 cartes ; quelle est la probabilité pour que cette carte soit un as ou une figure ?

12. On jette deux dés ; quelle est la probabilité pour que le premier amène 1 ou 2 et le second, un numéro autre que 6 ?

13. Une loterie comporte l'émission de 100 billets dont 3 gagnants ; on prend 5 billets : quelle est la probabilité de gagner :

(i) un lot ?

(ii) au moins un lot ?

14. On tire successivement trois cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité pour que la deuxième carte tirée, et celle-là seulement, soit un as.

15. On tire 8 cartes d'un jeu de 32 cartes, quelle est la probabilité d'avoir les 4 rois parmi ces huit cartes ?

16. D'un jeu de 32 cartes on en extrait 8, au hasard. Calculer la probabilité :

1° pour qu'on ait extrait 5 cœurs, et 5 seulement ;

2° pour qu'on ait extrait au moins 5 cœurs.

(Bacc. Sces. exp. 1962.)

3.8. Exercice corrigé

Le loto : On tire au hasard 6 boules parmi 49.

a) Quelle est la probabilité de sortir une combinaison de 6 numéros donnée ?

b) La mise pour un combinaison de 6 nombres est de $0,6$ Euros. Quelle doit être la mise pour pouvoir jouer une combinaison à 7 numéros, à 8 numéros ?

c) On joue une combinaison à 8 numéros. Quelle est la probabilité d'avoir les 6 bons numéros ?

d) Résoudre la question précédente en modélisant le jeu par un tirage exhaustif d'un échantillon non ordonné de 8 boules dans une urne de 49 boules distinctes.

e) On joue une combinaison à 6 numéros. Quelle est la probabilité d'avoir exactement 3 bons numéros ? (traiter le cas d'un jeu où il y a ou non le tirage d'une $7^{\text{ème}}$ boule complémentaire).

f) Modéliser l'exercice 13 ci-dessus par une modèle de tirage de boules dans une urne.

Réponse :

a) Il y a C_{49}^6 combinaisons possibles au loto, la probabilité de sortir une combinaison donnée est de

$$\frac{1}{C_{49}^6} = \frac{1}{13983816}.$$

b) Donner une combinaison à 7 numéros revient à donner $C_7^6 = 7$ combinaisons à 6 numéros, il faut donc multiplier la mise par 7 ce qui donne 4.2 Euros. Ensuite pour 8 numéros il faut multiplier la mise par C_8^6 soit 28 fois ce qui donne une mise de $16,80$ Euros

c) La probabilité est donc de

$$\frac{C_8^6}{C_{49}^6} = \frac{A_8^6}{A_{49}^6} = \frac{1}{499422}.$$

d) Soit une combinaison de 6 nombres donnée (obtenue par tirage au sort), jouer une combinaison au loto revient alors à tirer des boules dans une urne et à comparer le résultat obtenu avec la combinaison donnée.

On modélise de la manière suivante. Soit une urne contenant 49 boules distinctes et une combinaison A donnée de 6 boules ; on tire sans remise 8 boules de l'une et on regarde la probabilité d'avoir tous les éléments de A.

Il y a au total C_{49}^8 combinaisons de 8 boules parmi 49. Comptons le nombre de combinaisons de 8 boules parmi 49 boules qui sont favorables, c'est à dire qui contiennent les éléments de A.

Une combinaison de 8 boules contenant les 6 boules de A contient 2 autres boules choisies parmi les 43 restantes.

Il y a donc C_{43}^2 combinaisons de 8 boules contenant une combinaison donnée de 6 boules.

Ainsi sur C_{49}^8 combinaisons de 8 boules parmi 49 il y en a C_{43}^2 qui contiennent la combinaison gagnante.

La probabilité recherchée est donc de

$$\frac{C_{43}^2}{C_{49}^8} = \frac{C_{49-6}^{8-6}}{C_{49}^8} = \frac{A_8^6}{A_{49}^6};$$

avec les propriétés des nombres C_n^p de la Proposition 2.4 ; on retrouve bien le même résultat qu'au *c)*.

e) On modélise de la manière suivante. Soit une urne contenant 49 boules distinctes et une combinaison A donnée de 6 boules ; on tire sans remise 6 boules de l'une et on regarde la probabilité d'avoir 3 éléments de A.

Comptons le nombre de combinaisons qui contiennent 3 des 6 numéros de la combinaison donnée. Il y a C_6^3 manière de choisir 3 numéros parmi les 6 numéros de la combinaison donnée et C_{43}^3 manières de choisir les 3 autres numéros parmi les 43 numéros qui n'appartiennent pas à la combinaison donnée. La probabilité demandée est donc de :

$$p = \frac{C_6^3 C_{43}^3}{C_{49}^6} = \frac{8815}{499422} \simeq \frac{1}{56.65}.$$

On peut généraliser ce résultat à une urne qui contient N boules et dans laquelle on tire n boules (au loto $n \geq 6$, grilles à 6, 7 chiffres etc..) et on compare le résulat *du tirage avec une combinaison de m boules ($m = 6$ au loto, cette combinaison est choisie par tirage).*

Alors, la probabilité de tirer k numéros appartenant à une combinaison donné de m numéros est donnée par la loi hypergéométrique :

$$p = \frac{C_m^k C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n}.$$

- Cas du numéro complémentaire. En fait on considère l'événement avoir exactement trois numéros et ne pas avoir le complémentaire (il faut exclure 1 boule des 43 qui ne sont pas gagnantes), sa probabilité est :

$$p = \frac{C_6^3 C_{42}^3}{C_{49}^6} = \frac{8815}{499422} \simeq \frac{1}{60.91}.$$

f) On modélise l'exercice 13 précédent par un tirage d'urne : 100 boules distinctes dont 3 marquées succès et 97 marquées échec ; et on effectue des tirages exhaustifs d'échantillons non ordonnés de 5 boules parmi 100. Dans une combinaison de 5 boules, il y alors C_3^1 façons de choisir une boule succès parmi les 3 boules succès et C_{97}^4 manières de choisir 4 boules échecs parmi les 97 boules échecs.

La probabilité de tirer exactement une boule succès et donc de

$$\frac{C_3^1 \times C_{97}^4}{C_{100}^5} = \frac{893}{6468} \simeq 0.1381.$$

Ensuite il y a C_{97}^5 manières de tirer 5 boules échecs parmi les 97 boules échecs, la probabilité de tirer au moins une boule succès est donc de

$$1 - \frac{C_{97}^5}{C_{100}^5} = \frac{4657}{32340} \simeq 0.1440.$$

On remarque que ces deux probabilités sont proches de 0.15 qui est 5 fois la probabilité de tirer une boule succès, lorsque l'on tire une seule boule.

4. PROBABILITE CONDITIONNELLE

4.1. Définition de la probabilité conditionnelle

On considère ci-dessous trois expériences aléatoires faisant apparaître une probabilité conditionnelle.

Expérience aléatoire $\mathcal{E}_1$. Une urne contient 8 boules distinctes dont 5 boules blanches et 3 boules rouges ; on tire successivement sans remise deux boules.

On va s'intéresser à la probabilité pour que les deux boules soient toutes deux blanches. Tout d'abord donnons le modèle probabiliste choisi. On considère des tirages ordonnés de deux boules, les boules étant tirées de manière équiprobable.

Modélisation $\mathcal{M}_1$ de l'expérience aléatoire $\mathcal{E}_1$. On pose pour Ω l'ensemble des arrangements de 2 boules parmi les huit boules distinctes, on munit Ω de la probabilité uniforme notée P.

Soit A l'événement « la première boule tirée est blanche » B l'événement « la deuxième boule tirée est blanche » ; l'événement $A \cap B$ est « les deux boules sont blanches ».

Il y a 5 manières de tirer la première boule parmi les 5 boules blanches et 7 manières de tirer la seconde boule parmi les 7 boules restantes ; donc

$$P(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{5 \times 7}{8 \times 7} = \frac{5}{8}.$$

On a ensuite :

$$P(A \cap B) = \frac{5 \times 4}{8 \times 7} = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = P(A) \times \frac{4}{7}.$$

On voit donc que l'on a

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{4}{7}$$

qui est aussi la valeur de la probabilité de tirer de manière équiprobable une boule blanche dans l'urne privée de l'une de ses boules blanches.

Ainsi le rapport $P(A \cap B)/P(A)$ apparaît comme la probabilité de tirer une boule blanche sachant que la première boule tirée est blanche.

Si on note $P(B/A)$ ce rapport, on obtient

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A);$$

qui se lit : la probabilité de A et B est égale au produit de la probabilité de A par la probabilité conditionnelle de B sachant A.

Expérience aléatoire $\mathcal{E}_2$. Une urne contient 26 boules distinctes. Parmi ces boules 12 sont creuses et 14 sont pleines. Ensuite parmi les boules creuses 8 boules *sont blanches et* 4 *boules sont rouges, et parmi les boules pleines,* 9 *boules sont blanches et* 5 *boules sont rouges. On tire une boule de l'urne.*

La modélisation choisie est la suivante :

Modélisation $\mathcal{M}_2$ *de l'expérience aléatoire* $\mathcal{E}_2$*. On pose* Ω *l'ensemble des* 26 *boules muni de la probabilité uniforme.*

On va s'intéresser à l'événement tirer une boule creuse et blanche.

On pose C l'ensemble des boules creuses, P l'ensemble des boules pleines, B l'ensemble des boules blanches et R l'ensemble des boules rouges.

On s'intéresse à la probabilité $P(C \cap B)$ de tirer une boule creuse et blanche. On a

$$P(C) = \frac{\mathrm{card}(C)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{12}{26}.$$

Ensuite

$$\begin{aligned} P(C \cap B) = \frac{\mathrm{card}(C \cap B)}{\mathrm{card}(\Omega)} &= \frac{\mathrm{card}(C)}{\mathrm{card}(\Omega)} \times \frac{\mathrm{card}(C \cap B)}{\mathrm{card}(C)} \\ &= P(C) \times \frac{\mathrm{card}(C \cap B)}{\mathrm{card}(C)} = \frac{12}{26} \times \frac{8}{12} = P(C) \times \frac{8}{12}. \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\frac{P(C \cap B)}{P(C)} = \frac{\mathrm{card}(C \cap B)}{\mathrm{card}(C)} = \frac{8}{12}.$$

Le terme $\dfrac{P(C \cap B)}{P(C)}$ apparaît comme étant la probabilité d'avoir une boule blanche sachant qu'on a tiré une creuse. On obtient encore avec la notation d'une probabilité conditionnelle :

$$P(C \cap B) = P(C) \times P(B/C).$$

Il peut être pratique de schématiser l'urne par un diagramme :

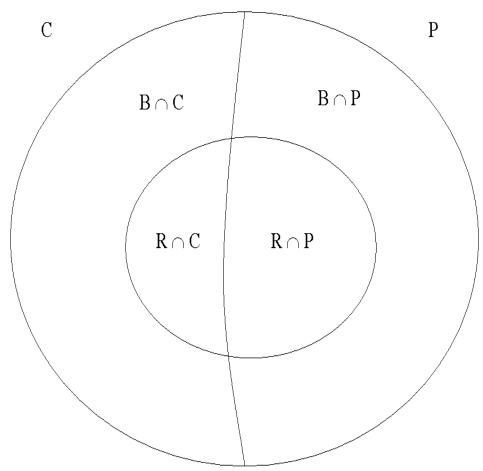

Figure 4.1. Représentation par diagramme des ensembles

ou par un arbre :

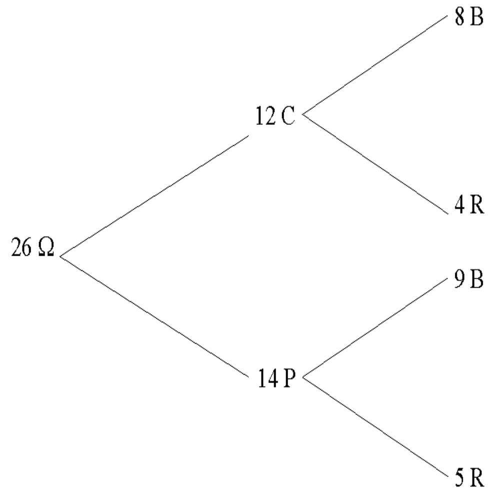

Figure 4.2. Représentation des ensembles : chaque ensemble de l'arbre est inclus dans l'ensemble qui le précède.

Expérience aléatoire $\mathcal{E}_3$. On dispose de 2 urnes U_1, U_2. L'urne U_1 contient 5 boules blanches et 7 boules rouges, l'urne U_2 contient 9 boules blanches et 6 boules rouges. On tire une boule au hasard, le choix de l'une des urnes étant équiprobable.

Les boules de l'urne U_1 (resp. U_2) ont toute la même probabilité d'être tirée, soit p_1 (resp. p_2) cette probabilité. Comme on a

$$P(\text{« la boule appartient à l'urne } U_1 \text{ »}) = \frac{1}{2} = 12 \times p_1$$

car il y a 12 boules dans l'urne U_1, et

$$P(\text{« la boule appartient à l'urne } U_2 \text{ »}) = \frac{1}{2} = 15 \times p_2$$

car il y a 15 boules dans l'une U_2, on en déduit que $p_1 = 1/24$ est la probabilité de tirer une boule de l'urne 1 et $p_2 = 1/30$ la probabilité de tirer une boule de l'urne 2.

Pour modéliser le tirage on munit alors Ω l'ensemble des boules de la probabilité P définie par la probabilités des événements élémentaires : $P(\omega) = 1/24$ si ω est une boule de l'urne 1 et $P(\omega) = 1/30$ si ω est une boule de l'urne 2.

La modélisation choisie est la suivante :

Modélisation $\mathcal{M}_3$ de l'expérience aléatoire $\mathcal{E}_3$. On pose Ω l'ensemble des 27 boules muni de la probabilité définie ci-dessus.

On pose U_1 l'ensemble des boules de l'urne 1, U_2 l'ensemble des boules de l'urne 2, B l'ensemble des boules blanches et R l'ensemble des boules rouges ; on va s'intéresser ici à $P(U_1 \cap B)$ la probabilité de tirer une boule blanche dans l'urne U_1.

On a alors :

$$P(U_1) = p_1 \times \mathrm{card}(U_1) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.$$

On a ensuite :

$$\begin{aligned} P(U_1 \cap B) = P(U_1) \times \frac{P(U_1 \cap B)}{P(U_1)} &= P(U_1) \times \frac{5 \times p_1}{P(U_1)} \\ &= P(U_1) \times \frac{\frac{5}{24}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{12} = P(U_1) \times \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

Le terme $\dfrac{P(U_1 \cap B)}{P(U_1)} = \dfrac{5}{12}$ apparaît comme étant la probabilité d'avoir une boule blanche sachant qu'on la tire dans l'urne 1. On obtient encore avec la notation d'une probabilité conditionnelle :

$$P(U_1 \cap B) = P(U_1) \times P(B/U_1).$$

Ceci nous amène à la notion de probabilité conditionnelle.

Proposition et définition 4.1.

Soit P une probabilité définie sur les parties d'un ensemble Ω et A une partie de Ω avec $P(A) \neq 0$. Alors l'application P_A définie sur les parties de Ω par

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{pour } B \subset \Omega$$

est une probabilité sur Ω.

On appelle probabilité conditionnelle de l'événement B par rapport à l'événement A le nombre $P_A(B)$ que l'on note aussi

$$P(B/A).$$

On dira aussi probabilité conditionnelle de B sachant A, ou probabilité conditionnelle de B sous la condition A ou probabilité de B si A.

Preuve

L'ensemble A restant fixé, on vérifie aisément que l'application qui à tout événement $B \subset \Omega$ fait correspondre le nombre :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},$$

satisfait à la définition d'une probabilité :

1° $0 \leq P(B/A) \leq 1$.

En effet :

- d'une part, $P(B/A)$ est visiblement ≥ 0 ;

- d'autre part $A \cap B \subset A$ d'où $P(A \cap B) \leq P(A)$, d'où $P(B/A) \leq 1$.

2° On a

$$A \cap (B_1 \cup B_2) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2);$$

de plus, si B_1 et B_2 sont incompatibles, il en est de même de $A \cap B_1$ et de $A \cap B_2$; par suite

$$P(A \cap (B_1 \cup B_2)) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2);$$

et en divisant les deux membres par $P(A)$

$$P(B_1 \cup B_2/A) = P(B_1/A) + P(B_2/A).$$

3° $A \cap \Omega = A$ d'où :

$$P(\Omega/A) = \frac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1.$$

4.2. Utilisation des probabilités conditionnelles

4.2.1 Probabilités composés

De la définition, nous déduisons lorsque $P(A) \neq 0$, l'égalité :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A).$$

Dans de nombreux cas, comme ceux vus au Paragraphe 4.1, lorsqu'on sait évaluer directement la probabilité d'un événement A et la probabilité conditionnelle d'un événement B par rapport à un événement A, on peut alors en déduire $P(A \cap B)$ en utilisant l'égalité

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A),$$

et on dit que $P(A \cap B)$ a été obtenue par probabilités composées.

Exemple 4.1 : On reprend l'expérience 1 : une urne contient 5 boules blanches et 3 boules rouges ; on tire successivement deux boules ; probabilité pour qu'elles soient toutes deux blanches ?

Pour résoudre ce type d'exercice, on peut écrire que

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A).$$

puis

- $P(A) = \dfrac{5}{8}$ (8 cas possibles, 5 favorables à A) ;

$P(B/A)$ est la probabilité que la deuxième boule soit blanche sachant que la première boule tirée est blanche : une boule blanche ayant été tirée, il reste dans l'urne 4 boules blanches et 3 boules rouges donc

$$P(B/A) = \frac{4}{7},$$

on a donc

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{5}{14},$$

et on retrouve le résultat du Paragraphe 3.6, 5^{o}, *(iii)* obtenu par dénombrement.

On peut facilement vérifier (cf. Paragraphe 4.1) que la probabilité par dénombrement redonne bien les valeurs de la probabilité conditionnelle ci-dessus ainsi que les propriétés d'uniformité.

4.2.2. Exemples de calcul de probabilités conditionnelles

On s'intéresse aux calculs de probabilités conditionnelles dans les cas des 2 modèles d'urne du Paragraphe 4.1. Tout d'abord, on reprend l'expérience 2 du Paragraphe 4.1.

Exemple 4.2 : *Une urne contient* 26 *boules distinctes. Parmi ces boules* 12 *sont creuses et* 14 *sont pleines. Ensuite parmi les boules creuses* 8 *boules sont blanches et* 4 *boules sont rouges, et parmi les boules pleines,* 9 *boules sont blanches et* 5 *boules sont rouges. On tire une boule de l'urne.*

Avec les notations de l'expérience $\mathcal{E}_2$ du Paragraphe 4.1 pour les événements B, R, C, P, on s'intéresse aux probabilité suivantes :

a) $P(B/C)$ (probabilité que la boule tirée soit blanche sachant qu'elle est creuse) ainsi que

$$P(R/C),\ P(B/P),\ P(R/P).$$

Ensuite on s'intéresse aux probabilités du type suivante : probabilité que la boule soit creuse sachant qu'elle est blanche, *etc.* Soit calculer :

b) - $P(C/B)$ (probabilité que la boule tirée soit creuse sachant qu'elle est blanche) et

$$P(P/B),\ P(C/R),\ P(P/R).$$

a) Il y a 8 boules blanches parmi les boules creuses, la probabilité d'avoir une boule blanche sachant qu'elle est creuse est de 8/12. De la même manière on obtient :

$$P(R/C) = 4/12,\ P(B/P) = 9/14,\ P(R/C) = 5/14.$$

Ici aussi, on peut facilement vérifier que la probabilité par dénombrement redonne bien les valeurs des probabilités conditionnelle ci-dessus ainsi que les propriétés d'uniformité ; par exemple on a vu au Paragraphe 4.1, en utilisant, les cardinaux que $P(B/C) = 8/12$.

On remarque que le résultat s'obtient en regardant chacune des quatre branches de l'arbre de la figure 4.2 ; par exemple la branche $26\Omega - 14P - 5R$ donne les probabilités suivantes :

$$\text{« } 26\Omega - 14P - 5R \text{ » donne : } P(R/P) = 5/14,\ P(P/\Omega) = 14/26.$$

b) Une manière simple de répondre à la question est d'écrire qu'il y a 17 boules blanches dont 8 creuses et 9 pleines et qu'il y aussi 9 boules rouges dont 4 creuses et 5 pleines ce qui donne :

$$P(C/B) = 8/17,\ P(P/B) = 9/17,\ P(C/R) = 4/9,\ P(P/R) = 5/9.$$

Le nouvel arbre est le suivant :

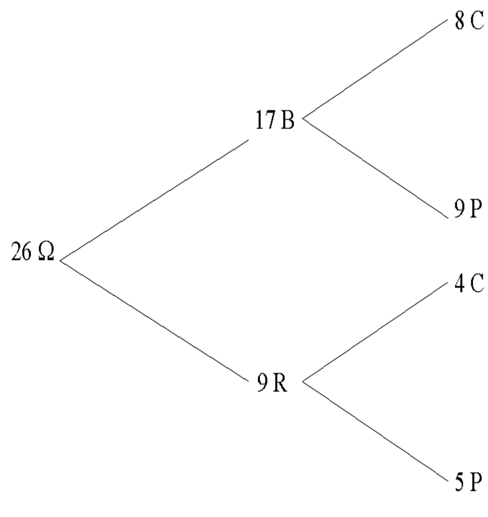

Figure 4.3.

Voici une autre façon de répondre à la question qui ne fait intervenir que les probabilités calculées au *a)* ainsi que $P(C)$ et $P(P)$.

On a

$$P(C/B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)},$$

pour la calcul de $P(B)$ on va utiliser la « propriété des probabilités totales » : on a

$$P(B) = P(B \cap C) + P(B \cap P)$$

on en déduit que

$$P(B) = P(B \cap C) + P(B \cap P) = \\ P(B/C) \times P(C) + P(B/P) \times P(P) = \frac{8}{12} \times \frac{12}{26} + \frac{9}{14} \times \frac{14}{26} = \frac{8+9}{26} = \frac{17}{26}.$$

La ligne précédente fait apparaître la valeur de $P(B \cap C) = 8/26$ et on trouve finalement

$$P(C/B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{8}{26}}{\frac{8+9}{26}} = \frac{8}{17}.$$

Voici un arbre issu de la figure 4.2 et des calculs du point *a)* précédent et qui permet de résumer les calculs ci-dessus :

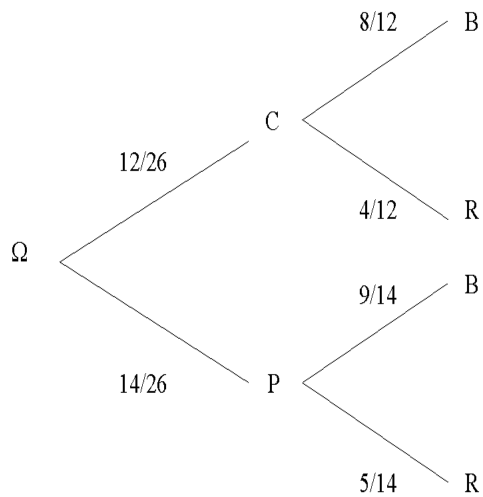

Figure 4.4.

Avec sa signification :

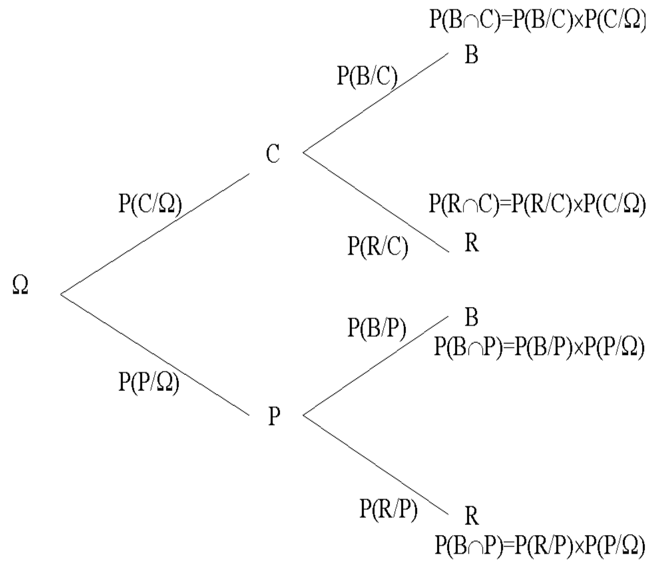

Figure 4.5.

Exemple d'utilisation de l'arbre :

$$
\begin{aligned}
&P(B/C) = \frac{8}{12},\\
&P(B/P) = \frac{9}{14},\\
&P(C) = P(C/\Omega) = \frac{12}{26},\\
&P(P) = P(P/\Omega) = \frac{14}{26},\\
&P(B \cap C) = P(B/C) \times P(B) = \frac{8}{12} \times \frac{12}{26} = \frac{8}{26},\\
&P(B) = P(B \cap C) + P(B \cap P) = P(B/C) \times P(C) + P(B/P) \times P(P)\\
&= \frac{8}{12} \times \frac{12}{26} + \frac{9}{14} \times \frac{14}{26} = \frac{17}{26}.
\end{aligned}
$$

Ci-dessus, on a utilisé la formule

$$P(B) = P(B \cap C) + P(B \cap P) = P(B/C) \times P(C) + P(B/P) \times P(P)$$

qui est un cas particulier de la formule des probabilités totales :

Proposition 4.2. *Soit Ω un ensemble fini muni d'une probabilité P, soient A_1, $A_2, \cdots, A_p$ une partition de Ω (on dit aussi que $\{A_i\}_{1 \leq i \leq n}$ un système complet d'événements), tous de probabilité non nulle. Soit $B \subset \Omega$. Alors :*

$$P(B) = P(B/A_1) \times P(A_1) + P(B/A_2) \times P(A_2) + \cdots + P(B/A_p) \times P(A_p).$$

Cette formule est une conséquence immédiate de la propriété des probabilités totales.

Exercice résolu 4.1. On dispose de 3 urnes U_1, U_2, U_3, chacune contient 10 boules ; parmi elles, U_1 contient 1 boule blanche, U_2 contient 2 boules blanches et U_3 contient 6 boules blanches. On tire au hasard une boule. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

Solution

On note B l'événement « la boule obtenue blanche » et A_i l'événement « la boule obtenue provient de l'urne U_i », $\{A_1, A_2, A_3\}$ forme alors système complet d'événements et :

$$\begin{aligned} P(B) = P(B/A_1) \times P(A_1) + P(B/A_2) \times P(A_2) + P(B/A_3) \times P(A_3) \\ = \frac{1}{3} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{6}{10} = \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

On remarque que, comme toutes les urnes sont équiprobables et contiennent le **même** nombre de boules, le problème est alors équivalent au problème du tirage d'une boule dans urne contenant 30 boules dont 9 boules blanches, problème qui redonne alors la probabilité demandée.

Nous considérons maintenant une variante de l'expérience aléatoire 3.

$\mathcal{E}'_3$ *expérience aléatoire 3'. On dispose d'un dé tétraédrique équilibré avec* 1 *face marquée* 1 *et* 3 *faces marquées* 2*, on dispose aussi de* 2 *urnes* U_1, U_2*. L'urne* U_1 *contient* 5 *boules blanches et* 7 *boules rouges, l'urne* U_2 *contient* 9 *boules blanches et* 6 *boules rouges. On tire le dé hasard, si on sort le* 1 *(l'as) on tire une boule au hasard dans l'urne* 1*, si c'est le* 2 *qui sort la boule est tirée dans l'urne* 2*. On s'intéresse aux probabilité suivantes : probabilité de tirer une boule blanche, probabilité que la boule provienne de l'urne* 1 *sachant qu'elle est blanche.*

On modélise cette expérience de la manière suivante. On pose Ω égal à l'ensemble des 27 boules et on pose U_1 l'ensemble des boules de l'urne 1, U_2 l'ensemble des boules de l'urne 2, B l'ensemble des boules blanches et R l'ensemble des boules rouges.

La probabilité P sur Ω vérifie alors

$$P(U_1) = \frac{1}{4},\ P(U_2) = \frac{3}{4} \text{ (jet du dé)};$$

ainsi que

$$P(B/U_1) = \frac{5}{12},\ P(R/U_1) = \frac{7}{12},\ P(B/U_2) = \frac{9}{15},\ P(R/U_1) = \frac{6}{15};$$

ce qui se résume sur l'arbre suivant :

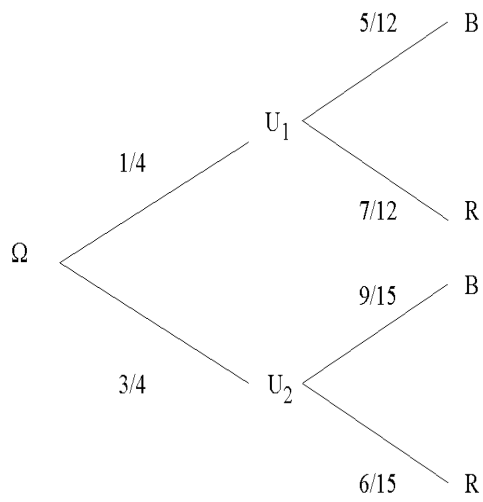

Figure 4.6

Ici aussi, on peut facilement vérifier que la probabilité définie par

$$P(\omega) = \frac{1}{4\,\mathrm{card}(U_1)}$$

pour un événement élémentaire ω appartenant à U_1 et

$$P(\omega) = \frac{3}{4\,\mathrm{card}(U_2)}$$

pour un événement élémentaire ω appartenant à U_2 redonne bien les valeurs des probabilités conditionnelles ci-dessus, les propriétés d'uniformité pour le tirage d'une boule connaissant l'urne d'où elle est tirée ainsi que les valeurs de $P(U_1)$ et $P(U_2)$ (la définition de cette probabilité est analoque à celle définie dans la modélisation $\mathcal{M}_3$).

En s'aidant éventuellement de l'arbre ci-dessus, il vient avec le théorème des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(B) = P(B\cap U_1) + P(B \cap U_1) &= P(U_1)\times P(B/U_1) + P(U_2)\times P(B/U_2) \\ &= \frac{1}{4}\times\frac{5}{12}+\frac{3}{4}\times\frac{9}{15} = \frac{5}{48}+\frac{9}{20} = \frac{133}{240}. \end{aligned}$$

Ensuite, pour $P(U_1/B)$ on trouve

$$P(U_1/B) = \frac{P(U_1\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/U_1)\times P(U_1)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{12}\times\frac{1}{4}}{\frac{133}{240}} = \frac{\frac{5\times 240}{12\times 4}}{133} = \frac{25}{133}.$$

Remarque. La formule utilisé pour ce calcul se généralise à une partition de Ω et s'appelle alors théorème de Bayes appellé aussi théorème «de probabilité des causes» : la cause étant ici le lancer de dé qui détermine le choix de l'urne.

On peut retrouver ces résultats en modélisant l'expérience précédente par une expérience ou l'on peut résoudre le problème par les cardinaux. Considérons une urne remplie avec l'équivalent de 5 urnes U_1, soit 60 boules marquées U_1 dont 25 boules blanches et 35 boules rouges et l'équivalent de 12 fois l'urne U_2, soit 180 boules marquées U_2 dont 108 boules blanches et 72 boules rouges. On tire une boule de l'urne. La modélisation de ce problème va donner la même probabilité que précédemment car dans cette urne le rapport

$$\frac{\text{proportion de boules de l'urne 1}}{\text{proportion de boules de l'urne 2}} = \frac{60}{180} = \frac{1}{3}$$

est aussi le rapport

$$\frac{\text{probabilité de tirer un as}}{\text{probabilité de tirer un 2}} = \frac{P(U_1)}{P(U_2)}.$$

Le nombre de boules blanches est alors de $25+108$ et le nombre total de boules de 240, soit une probabilité de $133/240$ de tirer une boule blanche suivant la loi uniforme. Ensuite comme le nombre de boules blanches marquées U_1 est de 25, on trouve que la probabilité qu'une boule vienne de U_1 sachant qu'elle est blanche vaut :

$$\frac{\text{nombre de boules blanches marquées } U_1}{\text{nombres total de boules blanches}} = \frac{25}{133} = P(U_1/B).$$

Il peut être assez « fastidieux », dans la résolution d'un problème de probabilités, de préciser l'univers Ω.

Il pourra suffire de décrire les événements A et B dans le langage usuel et « d'oublier» que ce sont des sous-ensembles de Ω.

On a vu que l'événement $A \cap B$ est alors décrit comme l'événement « A et B », l'événement $A \cup B$ est décrit comme l'événement « A ou B », l'événement $\overline{A}$ comme l'événement « non A ».

Cette remarque est illustrée par l'exercice résolu qui suit.

Exercice résolu 4.2. On tire au hasard successivement sans remise 2 cartes dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité pour que la première carte tirée soit un pique et la deuxième, un cœur ?

Solution commentée

Rappelons qu'il y a 8 piques et 8 cœurs dans un jeu de 32 cartes. Notons A l'événement : « la première carte tirée est un pique » et B l'événement : « la seconde carte tirée est un cœur ».

Il s'agit de calculer $P(A \cap B)$. Pour cela, nous utilisons l'égalité :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A).$$

Les tirages sont effectués au hasard, donc les événements élémentaires sont équiprobables, et donc : $P(A) = \dfrac{8}{32}$.

Ensuite $P(B/A)$ est la probabilité de tirer un cœur sachant que la première carte tirée est un pique. Lorsque la première carte tirée est un pique, il reste 31 cartes dans le paquet dont 8 cœurs. Donc : $P(B/A) = \dfrac{8}{31}$.

D'où la probabilité cherchée :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A) = \frac{8}{32} \times \frac{8}{31} = \frac{2}{31}.$$

Commentaire :

Autre solution, sans probabilité conditionnelle : à un tirage sans remise de deux cartes, on peut associer un couple (x, y), où x désigne la première carte et y la seconde, avec $x \neq y$. Ainsi, un tirage de deux cartes peut être considéré comme un couple d'éléments distincts de l'ensemble E des 32 cartes ; c'est donc un arrangement de 32 éléments 2 à 2. Nous pouvons donc choisir comme univers Ω des éventualités l'ensemble de ces arrangements. Le cardinal de Ω est alors : 32×31.

Les arrangements qui donnent un cas favorable sont les couples (x, y) où x est un pique et y un cœur. Leur nombre est donc : 8×8.

D'où la probabilité cherchée : $\dfrac{8 \times 8}{32 \times 31} = \dfrac{2}{31}$.

La solution que nous avons donnée en premier peut apparaître plus « simple », car elle résulte immédiatement de l'application d'une formule, et sous la forme où elle est proposée, elle nécessite moins d'efforts de modélisation et de calculs de dénombrement.

Ici aussi, on peut facilement vérifier que la probabilité par dénombrement redonne bien les valeurs de la probabilité conditionnelle ci-dessus ainsi que les propriétés d'uniformité.

Exercice corrigé 4.3.

a) Chaque jour dans une usine, 3 machines A, B et C produisent respectivement 40%, 50% et 10% des pièces dont 2% de pièces défectueuses pour A, 1% pour B et 1% pour C. On prélève une pièce qui s'avère défectueuse. Quelle est la probabilité pour que cette pièce ait été fabriquée par la machine A ?

Indication : dans un premier temps on pourra considérer le problème équivalent :

b) Chaque jour dans une usine, 3 machines A, B et C produisent respectivement 400, 500 et 100 pièces dont 8 pièces défectueuses pour A, 5 pour B et 1 pour C. On prélève une pièce qui s'avère défectueuse. Quelle est la probabilité pour que cette pièce ait été fabriquée par la machine A ?

Solution

On note respectivement A, B, C l'ensemble des pièces fabriquées par les machines A, B et C et D et $M = \overline{D}$ l'ensemble des pièces défectueuses et celui des pièces non défectueuses.

La répartition des pièces fabriquées par l'usine est schématisée par l'arbre suivant :

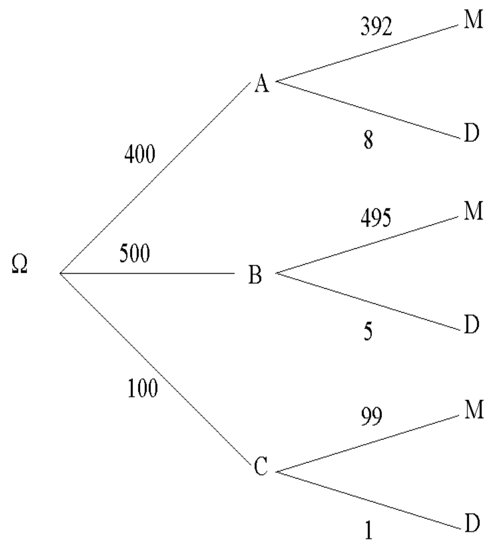

Figure 4.7.

La répartition des pièces en partant des pièces correctes ou défectueuses est décrite par l'arbre :

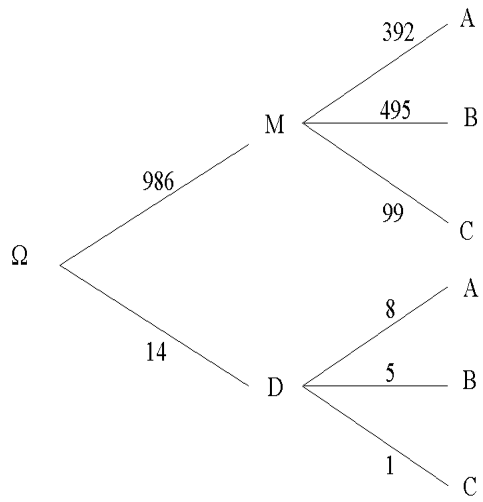

Figure 4.8.

On voit que la machine fabrique 14 pièces défectueuses, dont 8 proviennent de A ; la probabilité demandée est donc

$$P(A/D) = \frac{P(A\cap D)}{P(D)} = \frac{\mathrm{card}(A\cap D)}{\mathrm{card}(D)} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}.$$

On peut aussi résoudre le problème directement avec les probabilités. On a l'arbre suivant :

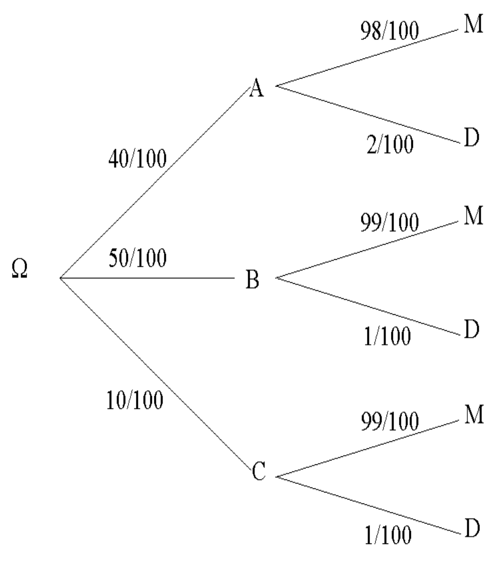

Figure 4.9

D'où :

$$\begin{aligned}
P(A/D) = \frac{P(A\cap D)}{P(D)} &= \frac{P(D\cap A)}{P(D\cap A)+P(D\cap B)+P(D\cap C)}\\
&= \frac{P(D/A)P(A)}{P(D/A)P(A)+P(D/B)P(B)+P(D/C)P(C)}\\
&= \frac{\frac{2}{100}\times\frac{40}{100}}{\frac{2}{100}\times\frac{40}{100}+\frac{1}{100}\times\frac{50}{100}+\frac{1}{100}\times\frac{10}{100}} = \frac{8}{8+5+1} = \frac{4}{7}.
\end{aligned}$$

4.3. Evénements indépendants

Deux événements A et B sont dits indépendants si on a :

$$P(A\cap B) = P(A)\times P(B);$$

alors si $P(A) > 0$ on a

$$P(B/A) = P(B)$$

et réciproquement ; autrement dit que le fait que A soit réalisé ne modifie pas la probabilité de B. Ainsi la probabilité d'obtenir B sachant que A est réalisé, est égale à la probabilité d'obtenir B. Intuitivement, cela signifie que B ne dépend pas de A.

De la même manière si $P(B) \neq 0$ alors l'indépendance de A et B montre que

$$P(A/B) = P(A);$$

ce qui signifie que la réalisation de A ne dépend pas de celle B.

Remarque : événements incompatibles et événements indépendants. Il ne faut pas confondre « événements indépendants » et « événements incompatibles ». Rappelons que, par définition, deux événements A et B sont dits incompatibles lorsque $A\cap B = \emptyset$. Il en résulte que : $P(A\cap B) = P(\emptyset) = 0$, et donc dans ce cas l'égalité $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$ est impossible si $P(A)\neq 0$ et $P(B)\neq 0$. Donc deux événements A et B *incompatibles* et tels que $P(A)\neq 0$, $P(B)\neq 0$ ne sont **jamais** *indépendants.*

On a la définition suivante.

Définition 4.2. *Soit Ω un ensemble fini muni d'une probabilité P, soient A_1, $A_2, \cdots, A_p$, p événements,*

a) on dit que ces événement sont totalement indépendants si pour toute partie $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ de $\{1, \cdots, p\}$ on a

$$P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})\times P(A_{i_2})\times\cdots\times P(A_{i_k}),$$

b) on dit que ces événements sont deux à deux indépendants si on a :

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j), \ \forall 1 \leq i \neq j \leq p.$$

Exemples 4.3

1° On tire une carte d'un jeu de 32 cartes ; soient les événements :

$$A = \text{« roi »};$$
$$B = \text{« cœur »}.$$
$$P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}; \ P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4};$$

évaluons directement $P(B/A)$ sans passer par sa définition : lorsque l'on sait que la carte tirée est un roi, la probabilité pour qu'elle soit aussi un cœur est $\frac{1}{4}$ (quatre cas possibles, un cas favorable), on a donc :

$$P(B/A) = P(B);$$

d'où :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32},$$

c'est bien la probabilité de l'événement élémentaire « roi de cœur »= « roi « et » «cœur ».

2° Une urne contient 5 boules blanches et 3 boules rouges ; on tire une première boule dont on note la couleur, puis, après remise de la première boule dans l'urne, on tire une deuxième boule. Considérons les événements :

$$A = \text{« la première boule tirée est blanche »};$$

$$B = \text{« la deuxième boule tirée est blanche »}.$$

La réalisation de A ne modifie pas la probabilité de B : les événements A et B sont indépendants ; donc la probabilité $P(A \cap B)$ pour que les deux boules tirées soient blanches vaut :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{25}{64},$$

on retrouve le résultat du Paragraphe 3.6, 5°, *(ii)*.

Exercice résolu 4.4.

Dans l'urne ci-dessus, on tire deux boules (sans remise) ; probabilité de l'événement

$$A : \text{« les deux boules sont de couleurs différentes »?}$$

Soit :

$B =$ « la première boule est blanche » et « la deuxième est rouge » $= B_1$ et B_2;

et :

$C =$ « la première boule est rouge » et « la deuxième blanche » $= C_1$ et C_2.

B et C sont incompatibles et $A = B$ ou C d'où :

$$P(A) = P(B) + P(C).$$

$$B = B_1 \text{ et } B_2 \Rightarrow P(B) = P(B_1) \times P(B_2/B_1) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56};$$

$$C = C_1 \text{ et } C_2 \Rightarrow P(C) = P(C_1) \times P(C_2/C_1) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56};$$

d'où

$$P(A) = P(B) + P(C) = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{15}{28}.$$

Retrouver ce résultat par dénombrement direct. Décrire l'univers des possibles. On pourra utiliser des arrangements et aussi, ici, des combinaisons, la question ne fait pas appel à un ordre de sortie.

Exercice résolu 4.5.

On jette une pièce de monnaie 4 fois de suite ; probabilité pour que, au cours des quatre épreuves, l'événement $A =$ « face », se réalise :

(i) 0 fois (B_0) ;

(ii) 1 fois (B_1) ;

(iii) 2 fois (B_2) ;

(iv) 3 fois (B_3) ;

(v) 4 fois (B_4).

On pourra traiter cette exercice en notant les événements élémentaires par des mots de quatre lettres composés de F et P de la manière suivante : par exemple $FFPP$ sera l'événement « face au jet n° 1, « face au jet n° 2 », « pile au jet n° 3 », « pile au jet n° 4 », etc.

Notons A_i l'événement : au i^{e} jet l'événement A se réalise et $\overline{A}_i$ l'événement : au i^{e} jet l'événement contraire de A se réalise.

Lors d'un jet $P(A) = \dfrac{1}{2}$ et $P(\overline{A}) = \dfrac{1}{2}$.

(i) $B_0 = \overline{A}_1$ et $\overline{A}_2$ et $\overline{A}_2$ et $\overline{A}_4$ *représenté aussi par* $B_0 = PPPP$.

Ces événements sont totalement indépendants (le résultat d'un jet ne modifie la probabilité d'un événement relatif à un autre jet) :

$$P(B_0) = P(\overline{A}_1) \times P(\overline{A}_2) \times P(\overline{A}_3) \times P(\overline{A}_4) = \left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

(ii) L'événement B_1 peut se réaliser de quatre façons incompatibles : l'apparition de « face » peut avoir lieu au premier, deuxième, troisième ou quatrième jet :

$B_1 = (A_1$ et $\overline{A}_2$ et $\overline{A}_3$ et $\overline{A}_4)$ ou $(\overline{A}_1$ et A_2 et $\overline{A}_3$ et $\overline{A}_4)$ ou $(\overline{A}_1$ et $\overline{A}_2$ et A_3 et $\overline{A}_4)$ ou $(\overline{A}_1$ et $\overline{A}_2$ et $\overline{A}_3$ et $A_4)$.

Cet événement est représenté par l'événement

$$B_1 = \{FPPP, PFPP, PPFP, PPPF\}.$$

Les quatre événements entre parenthèses ont la même probabilité

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4;$$

d'où :

$$P(B_1) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

(iii) De combien de façons incompatibles peut se réaliser B_2 ? C'est le nombre de façons de choisir les 2 jets où l'événement A se produira parmi 4 jets $= C_4^2 = 6$.

$$B_2 = (A_1 \text{ et } A_2 \text{ et } \overline{A}_3 \text{ et } \overline{A}_4) \text{ ou } \cdots \text{ ou } (\overline{A}_1 \text{ et } \overline{A}_2 \text{ et } A_3 \text{ et } A_4).$$

Cet événement est représenté par l'événement

$$B_2 = \{FFPP, FPFP, FPPF, PFFP, PFPF, PPFF\}.$$

Les six événements entre parenthèses ont des probabilités égales : c'est la probabilité pour que dans un ordre imposé A se réalise 2 fois et $\overline{A}$ 2 fois $= \left(\frac{1}{2}\right)^4$; d'où :

$$P(B_2) = C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 6\left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

(iv) et *(v)* Un raisonnement analogue donne *avec*

$$B_3 = \{FFFP, FFPF, FPFF, PFFF\} :$$

$$P(B_3) = C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^4;$$

et *avec* $B_4 = \{FFFF\}$:

$$P(B_4) = \left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

Remarquons que l'événement :

$$B_0 \text{ ou } B_1 \text{ ou } B_2 \text{ ou } B_3 \text{ ou } B_4,$$

est un événement certain et que $B_0, \cdots, B_4$ sont deux à deux incompatibles ; on doit donc avoir :

$$1 = P(B_0) + P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4),$$

ce qui se vérifie aisément : le second membre vaut

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right) + 6\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^4 = 1.$$

La variable nombre de faces obtenues en jetant la pièce quatre fois de suite peut donc prendre les valeurs

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

avec les probabilités respectives :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \; 4\left(\frac{1}{2}\right)^4 \; 6\left(\frac{1}{2}\right)^4 \; 4\left(\frac{1}{2}\right)^4 \; \left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

Ce qui précède est un exemple de loi binomiale pour le jeu de pile ou face, il se généralise à un nombre quelconque de lancer d'une pièce de probabilité p $(0 \leq p \leq 1)$ de retomber sur pile.

Ici on remarque que B_i est la réunion d'événements de la forme $MMMM$ où F figure i fois et P figure $4-i$ fois. Les i positions de F sont choisies dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$; il y a C_4^i manières de choisir les emplacements pour F ; d'où :

$$P(B_i) = C_4^i\left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

Exercice résolu 4.6.

Une urne contient 6 boules : 4 blanches et 2 noires. On effectue au hasard deux tirages avec remise. Quelle est la probabilité pour que la première boule tirée soit blanche, et la seconde noire ?

Solution commentée

Notons A l'événement : « la première boule tirée est blanche »,

et B l'événement : « la seconde boule tirée est noire ».

Il s'agit de calculer $P(A \text{ et } B)$. Les tirages sont indépendants, donc :

$$P(A \text{ et } B) = P(A) \times P(B).$$

Or $P(A) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$; $P(B) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$. Donc :

$$P(A \text{ et } B) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}.$$

On remarque que dans cette résolution, nous n'avons pas explicité l'ensemble Ω et sa probabilité.

Soit U l'ensemble des 6 boules distinctes. Comme les tirages se font avec avec remise, on peut modéliser le problème en prenant pour Ω l'ensemble des couples formés à partir des boules de l'urne. Comme le tirage se fait avec remise on peut supposer que la probabilité P sur Ω est la probabilité uniforme :

$$P(\{e_1, e_2\}) = \frac{1}{36}.$$

ainsi P est donc la probabilité uniforme sur Ω. Cette probabilité par dénombrement redonne bien les valeurs des probabilités des événements indépendants ainsi que les propriétés d'indépendance utilisées ci-dessus.

4.4. Exercices sur les chapitres 3 et 4

On traitera les exercices 12, 13 et 14 vus au Chapitre précédent en utilisant les probabilités composées ou l'indépendance.

12. On jette deux dés ; quelle est la probabilité pour que le premier amène 1 ou 2 et le second, un numéro autre que 6 ?

13. Une loterie comporte l'émission de 100 billets dont 3 gagnants ; on prend 5 billets : quelle est la probabilité de gagner :

(i) un lot ?

(ii) au moins un lot ?

14. On tire successivement trois cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité pour que la deuxième carte tirée, et celle-là seulement, soit un as.

17. Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules rouges ; on tire successivement trois boules ; quelle est la probabilité pour que :

(i) la première soit blanche, la deuxième rouge, la troisième blanche ?

(ii) parmi les trois boules tirées, il y ait 2 blanches et une rouge ?

18. On tire successivement trois cartes d'un jeu de 32 cartes, probabilité pour que ces cartes soient, dans l'ordre où on les tire, l'as de cœur, le roi de cœur, la dame de pique ?

19. Une urne contient 6 boules blanches et 3 boules rouges ; on tire successivement trois boules avec remise (on tire la première boule, on la remet dans l'urne avant de tirer la deuxième, etc.), probabilité que deux des boules tirées soient blanches (et l'autre rouge) ?

20. 1° A et B étant deux événements liés à une expérience aléatoire $\mathcal{E}$, montrer que l'on a :

$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ et } B).$$

2° La probabilité pour qu'un élève résolve un problème est $\frac{1}{2}$ et la probabilité pour qu'un autre élève résolve le même problème est $\frac{2}{3}$; quelle est la probabilité pour que ce problème soit résolu par l'un ou l'autre de ces deux élèves (travaillant indépendamment l'un de l'autre) ?

21. Une urne A contient 6 boules blanches et 5 noires, une urne B contient 9 boules blanches et 4 noires.

On tire une boule de chacune ; quelle est la probabilité pour qu'on obtienne deux boules de la même couleur ? Même question pour deux boules de couleurs différentes.

(Bacc. T.E. 1960.)

22. On jette trois dés. Quelle est la probabilité pour que :

(i) les 3 numéros soient des 6 ?

(ii) les 3 numéros soient égaux ?

(iii) 2 numéros soient des 6 et le troisième soit différent de 6 ?

(iv) 2 des trois numéros soient égaux ?

23. On jette, quatre fois de suite, 2 dés ; quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois au moins, une somme égale à 8 ?

24. Dans un lot de pièces fabriquées par une machine, on sait qu'une pièce sur 10 est défectueuse ; on examine successivement 4 pièces tirées au hasard avec remise ; quelle est la probabilité pour que parmi les 4 pièces il y ait :

(i) aucune pièce défectueuse ?

(ii) une pièce défectueuse ?

(iii) plus d'une pièce défectueuse ?

25. Un étudiant doit subir un examen dont le programme comporte 10 sujets. Il n'en a appris que 5. Sachant que l'examinateur lui posera 3 questions, calculer :

1° la probabilité pour que ces questions soient, toutes trois, parmi les sujets qu'il a appris ;

2° combien il aurait dû, au minimum, apprendre de sujets pour que cette probabilité soit au moins égale à $\frac{1}{2}$. (Bacc. Sces. exp. 1962.)

26. Chaque domino, d'un jeu de dominos est partagé en deux parties marquées de 0 à 6 points, les deux parties pouvant ou non porter le même nombre de points. Tous les dominos sont différents.

1° Montrer que le nombre des dominos du jeu est nécessairement 28. (On aura intérêt à dénombrer séparément les « doubles » et les non doubles.)

Quatre joueurs prennent chacun six dominos.

2^{o} Quelle est, pour chacun des joueurs, la probabilité d'avoir trois doubles ?

3^{o} Quelle est la probabilité pour qu'aucun joueur n'ait ni le double six, ni le double cinq, ni le double quatre ?

4^{o} Reprendre la question 1^{o} en supposant un jeu de dominos, composé suivant la même loi, les numéros marqués sur chaque moitié pouvant prendre toutes les valeurs de 0 à 7. (Bacc. Sces. exp. 1962.)

27. 1^{o} Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher, mais numérotées de 0 à 9. On tire au hasard une boule. Quelles sont les probabilités pour que la boule tirée porte un numéro divisible par 2 ; par 3 ; par 6 ?

2^{o} Deux urnes A et B, semblables à l'urne du paragraphe 1^{o}, sont placées côte à côte ; on tire une boule de A, puis une boule de B et l'on forme le nombre dont le chiffre des dizaines est le numéro tiré de A et celui des unités, le numéro tiré de B. Quelle est la probabilité pour que le nombre ainsi obtenu soit divisible par 3 ? (Bacc. Sces. exp. 1962.)

TIRAGE D'UN ÉCHANTILLON DANS UNE URNE.

Ce schéma combinatoire est d'un emploi courant surtout dans la théorie des probabilités, celui du tirage d'un échantillon de p boules dans une urne qui en contient n. On peut considérer les cas où les boules sont distinctes ou non, les tirages pouvant être exhaustifs (la boule tirée n'est pas remise dans l'urne) ou non exhaustifs (la boule tirée est immédiatement remise dans l'urne) ; on peut considérer les cas où les échantillons sont ordonnés ou non.

Nous nous intéresserons dans ce qui suit à quelques cas importants.

Tirage non exhaustif d'un échantillon non ordonné de p boules dans une urne contenant n boules distinctes.

Modélise un tirage successif d'un échantilon non ordonné de p boules avec remise.

Le nombre de tirages distincts est donné par le nombre de «p-uples non ordonnés avec répétition» soit :

(1) $$N(p,n) = C_{n+p-1}^{p}.$$

Tirage non exhaustif d'un échantillon ordonné de p boules dans une urne contenant n boules distinctes.

Modélise un tirage successif de p boules avec remise, avec des événements où l'ordre intervient ou non.

Le nombre de tirages distincts est donné par le nombre de p-uples d'une ensemble à n éléments :

(2) $$N(p,n) = n^p.$$

Tirage exhaustif d'un échantillon non ordonné de p boules dans une urne contenant n boules distinctes.

Modélise par exemple un tirage simultané de p boules ou un tirage successif de p boules sans remise où l'ordre n'intervient pas (type loto).

On doit avoir évidemment $p \leq n$; le nombre de cas distincts est donné par le nombre de combinaisons de p boules parmi n (on dit aussi parfois «p-uples non ordonnés sans répétition»).

Ainsi :

(3) $$N(p,n) = C_n^p.$$

Tirage exhaustif d'un échantillon ordonné de p boules dans une urne contenant n boules distinctes.

Modélise un tirage successif de p boules sans remise, où l'ordre intervient ou non (type loto).

On doit aussi avoir $p \leq n$; le nombre de cas distincts est donné par le nombre d'arrangements de p éléments parmi n. Ainsi :

$$N(p,n) = A_n^p. \tag{4}$$

Exercices résolus

1. On tire un échantillon non ordonné de 7 boules dans une urne contenant 11 boules distinctes. Dénombrer les tirages distincts : *a)* cas de tirages exhaustifs ; *b)* cas de tirages non exhaustifs.

2. On tire un échantillon ordonné de 6 boules dans une urne contenant 10 boules distinctes. Dénombrer les tirages distincts : *a)* cas de tirages exhaustifs ; *b)* cas de tirages non exhaustifs.

Réponse

1. *a)* En nous rapportant aux résultats sur les tirages d'urne on voit que le nombre de tirages exhaustifs de boules distinctes est donné pour un échantillon non ordonné par C_n^p :

On aura donc

$$C_{11}^7 = \frac{11!}{7!4!} = 330 \text{ tirages.}$$

b) Dans le cas de tirages non exhaustifs ce nombre devient : C_{n+p-1}^p soit :

$$C_{17}^7 = \frac{17!}{7!10!} = \frac{17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$
$$= 17 \times 8 \times 13 \times 11 = 19448 \text{ tirages.}$$

2. En nous rapportant aux résultats sur les tirages d'urne, nous aurons :

a)

$$A_{10}^6 = \frac{10!}{4!} = 151200 \text{ tirages;}$$

b)

$$10^6 = 1000000 \text{ tirages.}$$

Ce dernier résultat ne doit pas surprendre il peut en effet découler d'une méthode de génération des nombres entiers de 6 chiffres en utilisant les 10 chiffres $0, 1, \cdots, 9$ et en constituant des échantillons ordonnés.

Tirage d'un échantillon de n boules dans une urne de N boules distinctes marquées succès ou bien échec. Exemples sous forme d'exercices

On considère le tirage d'un échantillon de n boules distinctes (par exemple numérotées) dans une urne qui en contient N. On suppose que s boules sont marquées S (succès) et que les $e = N - s$ boules restantes sont marquées E (échec).

On regarde $N(p)$ le nombre de tirages comportants p boules succès (et donc $q = n - p$ boules échec). Avant de traiter le cas général, on donne un exemple sous forme d'exercice.

Exercice corrigé

Soit une urne contenant 5 boules dont 3 marquées succès et 2 échec.

1. On tire avec remise un échantillon ordonné de 3 boules dans l'urne, combien y a-t-il de tirages comportant 2 boules succès ? On pourra dénombrer les cas avec un arbre en posant avec des notations évidentes $U = \{S_1, S_2, S_3, E_2, E_2\}$, l'ensemble qui représente l'urne.

Réponse

Les ordres d'apparition possibles pour les boules succès et échec sont : succès au premier tirage, succès au deuxième tirage, succès au troisième tirage, noté SSE, puis avec cette notation SES, SSE. On remarque qu'il y a $C_3^2 = 3$ ordre possibles : c'est le nombre de manière de choisir 2 nombres dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ des positions possibles pour un tirage succès.

Par exemple pour le cas SSE il y a $3 \times 3 \times 2 = 18$ tirages qui donnent donc une boule S en 1, une boule S en 2 et une boule E en 3.
Au total on a donc

$$3 \times 18 = 54 \text{ tirages possibles.}$$

2. On tire sans remise un échantillon ordonné de 3 boules de l'urne. Combien y a-t-il d'échantillons ordonnés comportant 2 boules succès ?

Réponse

a) On raisonne comme précédemment : Pour le cas SSE il y a $3 \times 2 \times 2 = 12$ tirages possibles pour une avoir une boule. Au total on obtient

$$3 \times 12 = 36 \text{ tirages possibles.}$$

3. On tire sans remise un échantillon non ordonné de 3 boules de l'urne. Combien y a-t-il d'échantillons non ordonnés comportant 2 boules succès ?

Réponse

b) Il y a C_3^2 manières de choisir les 2 boules S parmi 3 et $C_2^1 = 1$ manière de choisir une boules E parmi 2, soit au total

$$C_3^2 \times C_2^1 = 3 \times 2 = 6 \text{ tirages.}$$

(principe multiplicatif de dénombrement).

Tirage d'un échantillon de n boules dans une urne de N boules distinctes marquées succès ou bien échec.

Tirages successifs de n boules avec remise (échantillon ordonné).

A ce tirage on associe la n-liste correspondante. On considère le nombre de n-listes comportant p boules marquées succès. Dans une n-liste, il y a C_n^p manières de choisir l'emplacement des boules S : c'est le nombre de combinaisons de p élément parmi $\{1, 2, \cdots, n\}$.

Ensuite, il y a s^p manières de choisir les boules « succès» et e^q manière de tirer les boules marquées E.

Le nombre de tirages distincts est donné par le nombre de p-uples non ordonnés avec répétition soit :

$$N(p) = C_n^p \times s^p \times e^{n-p} \tag{5}$$

(principe qui conduit en divisant par N^n, le nombre de tirages ordonnés avec remise possibles, à la loi de probabilité dite loi binomiale).

Tirages successifs de $n \leq N$ boules sans remise (échantillon ordonné).

A ce tirage on associe la n-liste correspondante. On considère le nombre de n-listes comportant p boules S. En raisonnant de manière analogue au cas précédent, le nombre de tirages distincts est donné par

$$N(p) = C_n^p \times A_s^p \times A_e^{n-p} = n! C_s^p \times C_e^{n-p}. \tag{6}$$

(principe qui conduit en divisant par A_N^n le nombre d'arrangements de n éléments parmi N, à la loi de probabilité dite loi hypergéométrique).

Tirage simultané de $n \leq N$ boules (sans remise échantillon non ordonné).

A ce tirage on associe la combinaison de n éléments correspondante. Le nombre de combinaisons de p boules comportant s boules marquées succès est donné par

$$N(p) = C_s^p \times C_e^{n-p}. \tag{7}$$

(principe qui conduit aussi en divisant par C_N^n le nombre de combinaisons de n éléments parmi N, à la loi de probabilité hypergéométrique).

Exercices résolus

1. On tire simultanément 7 boules dans une urne contenant 11 boules dont 6 boules blanches et 5 boules rouges. Dénombrer le nombre de tirages distincts comprenant 4 boules blanches.

2. On tire successivement 6 boules dans une urne contenant 10 boules distinctes dont 6 boules blanches et 4 boules rouges. Dénombrer les tirages distincts (ordonnés) comportant 4 boules blanches :

a) tirage sans remise ;

b) tirage avec remise ;

Réponse

1. Tirage sans remise sans ordre :

On dénombre les combinaisons de 7 éléments parmi 11 comprenant 4 boules blanches. Il y a C_6^4 manières de choisir 4 boules blanches parmi 6 et C_5^3 manières de choisir 3 boules rouges parmi 5, soit :

$$C_6^4 \times C_5^3 = \frac{6!}{4!3!} \times \frac{5!}{3!2!} = 5 \times 10 = 50 \text{ tirages.}$$

2. On dénombre les 6-listes comportant 4 boules blanches.

a) Sans remise. Il y a C_6^4 manières de choisir l'emplacement des 4 boules blanches parmi les 6 tirées (ou $C_6^2 = C_6^4$ manières de choisir l'emplacement des 2 rouges). Il y a ensuite A_6^4 manières de choisir 4 boules blanches parmi 6 et A_4^2 manières de choisir 2 boules rouges parmi 4. D'où

$$C_6^4 \times A_6^4 \times A_4^2 = \frac{6!}{4!2!} \times \frac{6!}{2!} \times \frac{4!}{2!} = 15 \times 360 \times 12 = 64800 \text{ tirages possibles}$$

b) Avec remise on obtient

$$C_6^4 \times 6^4 \times 4^2 = 15 \times 1296 \times 16 = 311040 \text{ tirages possibles.}$$