

ETUDE DE FONCTIONS

Objectifs :

Ensemble de définition, limites, nombre dérivé, fonction dérivée, sens de variation, courbe représentative, asymptotes, ... sont des notions que vous avez déjà rencontrées.

Vous allez approfondir ces notions afin de mener à bien l'étude d'une fonction. Mais ce n'est pas le seul objectif visé. En effet, souvent, on étudie une fonction pour résoudre un problème.

Pré-requis :

Le cours de MA1 intitulé : « Fonctions ».

Problèmes cibles :

A- On dispose d'une plaque de 6dm de côté. A chaque coin de la plaque, on découpe un carré de x dm. On obtient alors le patron d'une boîte ouverte.

1- Existe-t-il des boîtes de 8dm^3 ? Si oui, indiquer les hauteurs.

2- Comment choisir x pour que la boîte ait un volume maximum ?

B- Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

Soit C la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.

Représenter C et sa tangente T au point d'abscisse 1.

I. DÉRIVÉE ET SENS DE VARIATION.

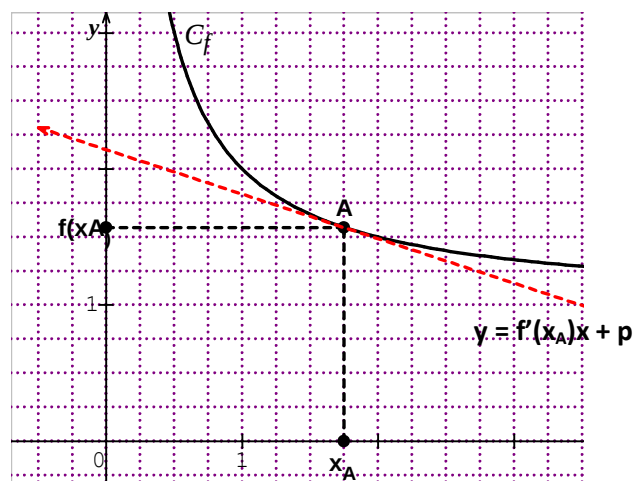
1- Sens de variation :

Rappel :

Le **nombre dérivé** d'une fonction f en x_A , noté $f'(x_A)$, est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_A .

Attention :

ne pas confondre $f(x_A)$ et $f'(x_A)$.



Une fonction f est **dérivable sur un intervalle I** lorsqu'elle admet pour tout x de I un nombre dérivé noté $f'(x)$.

On appelle alors **fonction dérivée de f** (ou **dérivée de f**), la fonction notée f' et qui à tout x de I associe le nombre dérivé de f en x .

Conséquence :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Si f est **croissante sur I** alors pour tout x de I , **$f'(x) \geq 0$** .

Si f est **décroissante sur I** alors pour tout x de I , **$f'(x) \leq 0$** .

Si f est **constante sur I** alors pour tout x de I , **$f'(x) = 0$** .

Remarque :

Cette propriété est pratique à condition de connaître les variations de la fonction f . Or, dans la plupart des cas, vous serez amenés à établir les variations de la fonction donnée d'où le résultat suivant.

Théorème fondamental :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Si, pour tout x de I , **$f'(x) \geq 0$** alors **f est croissante sur I** .

Si, pour tout x de I , **$f'(x) \leq 0$** alors **f est décroissante sur I** .

Si, pour tout x de I , **$f'(x) = 0$** alors **f est constante sur I** .

Remarque :

Ce théorème est particulièrement intéressant et sous entend que vous devez savoir calculer parfaitement des dérivées !

2- Dérivées des fonctions usuelles :

	$f(x) =$	$f'(x) =$	Validité
Fonction constante	C	0	$\mathbb{R}$
Fonction affine	$mx + p$	m	$\mathbb{R}$
Fonction carré	x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
Fonction cube	x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$
Fonction puissance	x^n (n entier positif)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
Fonction inverse	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
	$\frac{1}{x^n}$ (n entier positif)	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
Fonction racine carrée	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0 ; +\infty[$

3- Opérations sur les dérivées :

Dans ce qui suit, u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Dérivée d'une somme :	$(u + v)' = u' + v'$
Dérivée du produit par une constante :	$(ku)' = ku'$
Dérivée d'un produit :	$(uv)' = u'v + uv'$
	$(u^n)' = nu' \times u^{n-1}$
	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
Dérivée d'un inverse :	$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$ avec $v(x) \neq 0$
	$\left(\frac{1}{v^n}\right)' = \frac{-nv'}{v^{n+1}}$ avec $v(x) \neq 0$
Dérivée d'un quotient :	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $v(x) \neq 0$

Exercice 1 :

Pour chacune des fonctions suivantes, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée :

a) $f(x) = -3x + \sqrt{2}$	b) $f(x) = 5x^3 - 4x + 1$	c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$
d) $f(x) = (x + 1) \sqrt{x}$	e) $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$	f) $f(x) = 7x^3 - x^2 - \frac{7}{2x + 1}$
g) $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$	h) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$	i) $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3x + 2}$

Exercice 2 :

Etudier le sens de variation des fonctions suivantes sur leur domaine de définition :

a) $f(x) = 6x^3 + 3x^2 - 12x + 6$	b) $f(x) = \frac{3x - 1}{x - 3}$
c) $f(x) = x + 3 - \frac{1}{x - 1}$	d) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5}$

4- Recherche d'un extremum local :**Théorème :**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe alors $f(x_0)$ est un extremum local de f sur I .

Remarque : la condition f' s'annule est nécessaire mais ne suffit pas !

En effet, la fonction cube définie par $f(x) = x^3$ a pour dérivée $f'(x) = 3x^2$. Cette dérivée s'annule en $x = 0$ mais ne change pas de signe...

Dans cet exemple, la fonction n'admet donc pas d'extremums.

Exercice 3 : Préciser les extremums des fonctions de l'exercice précédent.

5- Equation de la tangente :

Suite au rappel du début de paragraphe et au formule donnant les dérivées, on a le résultat suivant :

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit $a \in I$.

Alors l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2$.

On note C_f sa courbe représentative.

Déterminer l'équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 2.

6- Position d'une courbe par rapport à sa tangente :

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2$.

L'équation de la tangente T au point d'abscisse 2 est $y = 4x - 4$.

$$f(x) - (4x - 4) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \geq 0.$$

Ainsi, pour tout x , $f(x) \geq 4x - 4$.

Ainsi, C_f est situé au dessus de T .

Méthode :

Pour étudier la position relative entre une courbe et sa tangente, on étudie le signe de la différence entre $f(x)$ et l'équation de la tangente.

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^4 - 6x^2 + 12x + 12$.

1- Montrer que l'équation de la tangente au point d'abscisse -1 est $y = 20x + 15$.

2- a) Montrer que $x^4 - 6x^2 - 8x - 3 = (x + 1)^3(x - 3)$.

b) En déduire la position entre la courbe et la tangente.

II. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE.

1- Calcul de limites :

Rappel : Cas particulier des fonctions polynômes et rationnelles à l'infini

- La limite en l'infini d'une fonction polynôme est celle de son terme de plus haut degré.
- La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est celle du quotient de ses termes de plus haut degré.

Attention :

Dans tous les autres cas, surtout on n'invente rien, on se souvient des formes indéterminées et on réfléchit !

Exercice 6 :

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1}$	b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x - 1}{x^2 + 2}$	c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \frac{1}{x}$
d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 1}{(x-3)^2}$	e) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 4x + 4}$	f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 7x + 1}{(2x-1)^2}$

2- Asymptote verticale : ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = + \text{ ou } -\infty$)

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty ; a[$ ou $]a ; +\infty[$ (autrement dit, a est une valeur interdite).

Lorsque la fonction f admet une limite infinie quand x tend vers a alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f .

3- Asymptote horizontale : ($\lim_{x \rightarrow +\text{ou}-\infty} f(x) = b$)

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty ; a[$ ou $]a ; +\infty[$.

Lorsque la fonction f admet une limite finie b quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ alors on dit que la droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f .

Exercice 7 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x) = \frac{2x - 1}{3 - x}$.

Etudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition et préciser les éventuelles asymptotes.

4- Asymptote oblique :

Exemple :

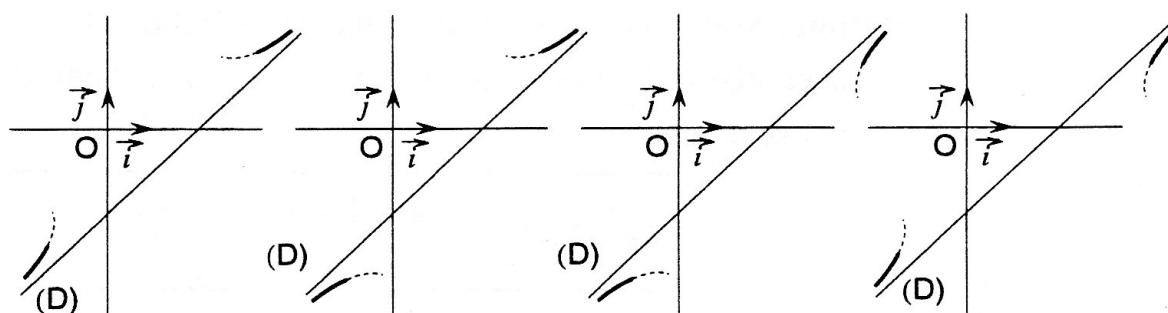
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = x - 2 + \frac{1}{x + 1}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x + 1} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty.$$

$$\text{De même, } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + 1} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty.$$

Ces résultats indiquent que lorsque x tend vers l'infini, la différence $[f(x) - (x - 2)]$ tend vers 0, donc $f(x)$ devient de plus en plus proche de $(x - 2)$. Graphiquement, lorsque x tend vers l'infini, la courbe représentative de la fonction f se rapproche de plus en plus de la droite D d'équation $y = x - 2$. On dit que D est une **asymptote oblique** à la courbe représentative de la fonction f .

Cette situation pourrait correspondre à l'une des représentations graphiques suivantes :



Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ayant au moins une borne infinie. La droite D d'équation $y = mx + p$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + p)] = 0 \text{ ou } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + p)] = 0$$

Remarque :

Dans ce cas, on peut écrire la fonction f sous la forme $f(x) = mx + p + \varphi(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$.

Exercice 8 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x - 2}$.

Montrer que la droite D d'équation $y = 2x + 4$ est une asymptote oblique à la courbe représentant f .

Exercice 9 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2 ; 2\}$ par $f(x) = \frac{-x^3 + x^2 + 2x - 4}{x^2 - 4}$.

a) Déterminer trois réels a , b et c tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 2\}$,

$$f(x) = ax + b + \frac{cx}{x^2 - 4}.$$

b) En déduire que la courbe représentant f admet une asymptote oblique D dont on précisera une équation.

Position de la courbe par rapport à son asymptote oblique :

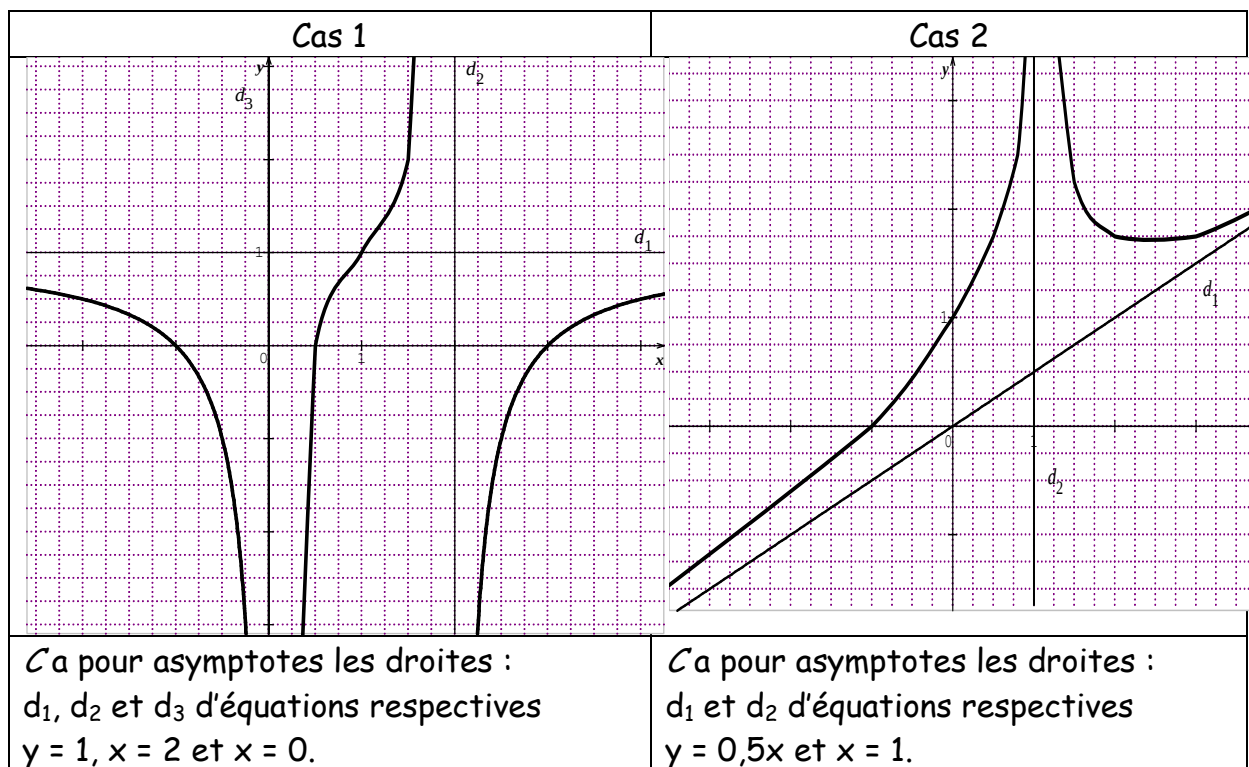
On étudie le signe de la différence $f(x) - (mx + p)$.

Exercice 10 :

Reprendre l'exercice précédent et déterminer la position de la courbe par rapport à D .

Exercice 11 :

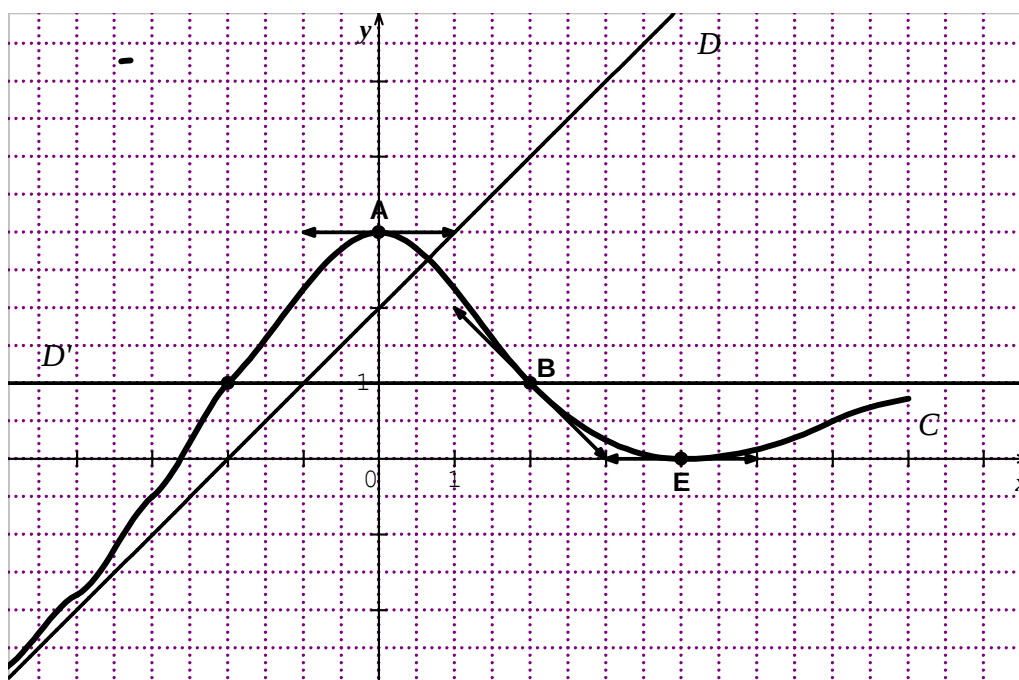
Dans chaque cas, C est la courbe représentative d'une fonction f dans un repère. Des informations données concernant les asymptotes, donner le domaine de définition de la fonction et les limites de f aux bornes de cet ensemble.



III. PROBLÈMES TYPES.

Exercice 12 :

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f .



- 1- Donner le tableau de variation de f .
- 2- Donner les équations des asymptotes à $\mathcal{C}$.
- 3- Donner les équations des tangentes à $\mathcal{C}$ en A, B, et E.
- 4- Résoudre graphiquement :
 - a) $f(x) \leq 1$
 - b) $f(x) \geq 0$
 - c) $f'(x) \geq 0$

Exercice 13 :

L'étude d'une fonction f a conduit au tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-6	-2	$+\infty$
f'(x)	-	0	+	+
f(x)	$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$
		1		$-\infty$

On sait de plus que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x + 4 = 0^-$.

Tracer une courbe correspondant à ces contraintes.

Exercice 14 :

Soit f la fonction définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$.

- 1- a) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
b) En déduire les éventuelles asymptotes ainsi que leurs équations.
- 2- a) Calculer la dérivée de f .
b) Etudier le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f .
- 3- a) Montrer que la droite D d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$.
b) Etudier la position relative entre D et $\mathcal{C}_f$.
- 4- Dans un repère orthonormé, tracer $\mathcal{C}_f$ et ses asymptotes.

Exercice 15 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \frac{2x^2 + 7x + 8}{x + 2}$.

- 1- Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout $x \neq -2$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}$.
- 2- a) Montrer que la droite D d'équation $y = 2x + 3$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$.
b) Etudier la position relative entre $\mathcal{C}_f$ et D .
- 3- Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition et en déduire d'éventuelles asymptotes et leurs équations.
- 4- Etudier les variations de f et établir son tableau de variations.
- 5- Dans un repère orthonormé, tracer $\mathcal{C}_f$ et ses asymptotes.

Exercice 16 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

- 1- Donner le domaine de définition de f .
- 2- On appelle f' la fonction dérivée de f .
 - a) Calculer $f'(x)$.
 - b) Etudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x .
 - c) Dresser le tableau des variations de f .
- 3- a) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
b) Etudier la position relative entre $\mathcal{C}$ et T .
- 4- Dans un repère du plan, tracer $\mathcal{C}$ et T et faire apparaître les éventuelles tangentes horizontales.

Exercice 17 :

Faire l'étude complète de la fonction f définie pour tout $x \neq 1$ par $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$.

(On pourra s'aider après l'avoir justifié que pour tout $x \neq 1$, $f(x) = x + 1 - \frac{3}{x - 1}$)

Exercice 18 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation

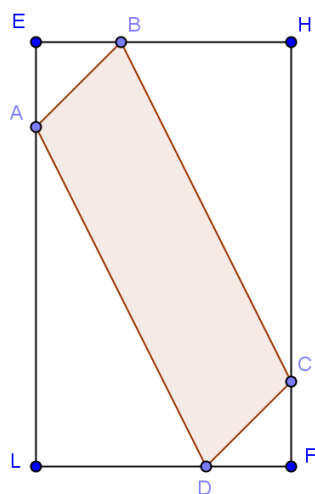
$$y = \frac{2x^3 - 1}{x^2} \text{ et la droite } D \text{ d'équation } y = 4x - 3.$$

- 1- Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ et D .
- 2- Quel est le rôle de D par rapport à $\mathcal{C}$? Justifier.

Exercice 19 :

Les courbes d'équations $y = \frac{x^2 - 4}{x^2}$ et $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ ont-elles une tangente commune ? Si oui, préciser et donner une équation de cette tangente.

Exercice 20 :



Sur une affiche rectangulaire de 3m sur 5m, on veut peindre une surface ABCD telle que $EA = EB = FC = FD$.

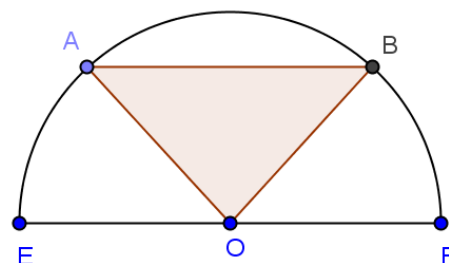
Déterminer la position de A pour que l'aire de ABCD soit maximale.

Exercice 21 :

C'est un demi-cercle de rayon 4cm et de centre O.

[AB] est une corde parallèle au diamètre [EF].

Déterminer la position du point A pour que l'aire du triangle OAB soit maximale.



Exercice 22 :

Le coût total de fabrication d'une quantité q d'un objet, exprimée en centaines d'unités, est défini sur $[10 ; 100]$ par $C(q) = 2q^2 + 80q + 1800$. $C(q)$ étant exprimé en milliers d'euros.

Le coût moyen de fabrication par centaines d'objets est $C_M(q) = \frac{C(q)}{q}$.

- 1- a) Déterminer l'expression de $C_M(q)$ en fonction de q .
b) Etudier les variations de C_M sur $[10 ; 100]$.
c) En déduire la quantité d'objets à fabriquer pour avoir un coût moyen minimal.
- 2- On suppose que le prix de vente d'une centaine d'objets est égal à 210 000€.
Ainsi, l'expression de la recette R en fonction de la quantité q est $R(q) = 210q$.
 $R(q)$ étant exprimée en milliers d'euros.
 - a) Justifier que l'expression du bénéfice B en fonction de q est :
$$B(q) = -2q^2 + 130q - 1800.$$
 - b) Déterminer le nombre d'objets à fabriquer et à vendre afin que l'entreprise soit rentable.
 - c) Déterminer le nombre d'objets à fabriquer et à vendre afin que l'entreprise réalise un bénéfice maximal.