Pascal Lainé

NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1 :

Effectuer les calculs suivants :

1. $(3+2i)(1-3i)$
2. Produit du nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-\frac{5\pi}{6}$.
3. Quotient du nombre complexe de modulo 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-\frac{5\pi}{6}$.

Allez à : Correction exercice 1 :

Exercice 2 :

Soit

$$u = 1+i \quad \text{et} \quad v = -1+i\sqrt{3}$$

1. Déterminer les modules de u et v.
2. Déterminer un argument de u et un argument de v.
3. En déduire le module et un argument pour chacune des racines cubiques de u.
4. Déterminer le module et un argument de $\frac{u}{v}$.
5. En déduire les valeurs de

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$$

Allez à : Correction exercice 2 :

Exercice 3 :

Calculer le module et un argument de

$$u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad v = 1-i$$

En déduire le module et un argument de $\frac{u}{v}$.

Allez à : Correction exercice 3 :

Exercice 4 :

Calculer les racines carrées des nombres suivants.

$$z_1 = -1; z_2 = i; z_3 = 1+i; z_4 = -1-i; z_5 = 1+i\sqrt{3};$$
$$z_6 = 3+4i; z_7 = 7+24i; z_8 = 3-4i; z_9 = 24-10i$$

Allez à : Correction exercice 4 :

Exercice 5 :

1. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
2. Calculer les racines carrées de $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Allez à : Correction exercice 5 :

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2+z+1=0$.
2. $z^2-(5i+14)z+2(5i+12)=0$.

3. $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$.
4. $z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0$.
5. $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$.
6. $4z^2 - 2z + 1 = 0$.
7. $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$.
8. $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$.
9. $x^4 - 30x^2 + 289 = 0$.
10. $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 15 = 0$.
11. $z^3 + 3z - 2i = 0$.
12. $z^2 - (1 + a)(1 + i)z + (1 + a^2)i = 0$.
13. $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$.
14. $(1 + i)z^2 - (3 + i)z - 6 + 4i = 0$.
15. $(1 + 2i)z^2 - (9 + 3i)z - 5i + 10 = 0$.
16. $(1 + 3i)z^2 - (6i + 2)z + 11i - 23 = 0$.

Allez à : Correction exercice 6 :

Exercice 7 :

Résoudre l'équation :

$$Z^4 + (3 - 6i)Z^2 - 8 - 6i = 0$$

Allez à : Correction exercice 7 :

Exercice 8 :

$$(1 - i)X^3 - (5 + i)X^2 + (4 + 6i)X - 4i = 0$$

1. Montrer que cette équation admet une racine réelle.
2. Résoudre cette équation.

Allez à : Correction exercice 8 :

Exercice 9 :

1. Montrer que

$$X^3 + (1 - 2i)X^2 - 3(1 + i)X - 2 + 2i = 0 \quad (E)$$

Admet une ou plusieurs racines réelles.

2. Résoudre (E)

Allez à : Correction exercice 9 :

Exercice 10 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^6 - iz^3 - 1 - i = 0$$

Indication : Poser $Z = z^3$ et résoudre d'abord $Z^2 - iZ - 1 - i = 0$.

Allez à : Correction exercice 10 :

Exercice 11 :

Soit (E) l'équation

$$X^4 - 3X^3 + (2 - i)X^2 + 3X - 3 + i = 0$$

1. Montrer que (E) admet des racines réelles.
2. Résoudre (E).

Allez à : Correction exercice 11 :

Exercice 12 :

1. Résoudre $X^3 = -2 + 2i$
2. Résoudre $Z^3 = -8i$
3. Résoudre
$$\frac{1}{2}Z^6 + (1 + 3i)Z^3 + 8 + 8i = 0$$
On rappelle que $\sqrt{676} = 26$.

Allez à : Correction exercice 12 :

Exercice 13 :

Soit l'équation $z^3 - iz + 1 - i = 0$ $\quad (E)$

1. Montrer que (E) admet une racine réelle.
2. Déterminer les solutions de (E).

Allez à : Correction exercice 13 :

Exercice 14 :

Soit (E) l'équation
$$X^4 - (3 + \sqrt{3})X^3 + (2 + 3\sqrt{3} - i)X^2 + (-2\sqrt{3} + 3i)X - 2i = 0$$

1. Montrer que (E) admet des racines réelles.
2. Résoudre (E).

Allez à : Correction exercice 14 :

Exercice 15 :

Soit $z = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

1. Calculer z^2, puis déterminer le module et un argument de z^2, puis écrire z^2 sous forme trigonométrique.
2. En déduire le module et un argument de z.
3. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Allez à : Correction exercice 15 :

Exercice 16 :

1. Donner les solutions de :
$$u^4 = -4$$
Sous forme algébrique et trigonométrique.
2. Donner les solutions de :
$$(z + 1)^4 + 4(z - 1)^4 = 0$$
Sous forme algébrique.

Allez à : Correction exercice 16 :

Exercice 17 :

1. Résoudre
$$X^3 = -2\sqrt{2}$$
On donnera les solutions sous forme algébrique.
2.
Trouver les solutions de
$$(z + i)^3 + 2\sqrt{2}(z - i)^3 = 0$$
On donnera les solutions (et sous forme algébrique en bonus).

Allez à : Correction exercice 17 :

Exercice 18 :

1. Donner les solutions complexes de $X^4 = 1$.
2. Résoudre $X^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. Résoudre $X^8 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)X^4 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

Allez à : Correction exercice 18 :

Exercice 19 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$$

Allez à : Correction exercice 19 :

Exercice 20 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^4 = \left(\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^4$$

Allez à : Correction exercice 20 :

Exercice 21 :

1. Déterminer les deux solutions complexes de $u^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$.
2. Résoudre

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$$

On explicitera les solutions sous forme algébrique.

Allez à : Correction exercice 21 :

Exercice 22 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$

$$\left(\frac{z-1}{z-i}\right)^3 = -8$$

On donnera les solutions sous forme algébrique.

Allez à : Correction exercice 22 :

Exercice 23 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 = \frac{1}{4}(-1+i)$$

Et montrer qu'une seule de ces solutions a une puissance quatrième réelle.

Allez à : Correction exercice 23 :

Exercice 24 :

1. Donner les solutions complexes de $X^4 = 1$.
2. Résoudre $X^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. Résoudre $X^8 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)X^4 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

Allez à : Correction exercice 24 :

Exercice 25 :

Trouver les racines quatrième de 81 et de -81.

Allez à : Correction exercice 25 :

Exercice 26 :

Résoudre les équations suivantes :

$$z^6=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}};\quad z^4=\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}};\quad z^6+27=0;\ \ 27(z-1)^6+(z+1)^6=0$$

Allez à : Correction exercice 26 :

Exercice 27 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $z^5=1$
2. $z^5=1-i$
3. $z^3=2-2i$
4. $z^5=\overline{z}$

Allez à : Correction exercice 27 :

Exercice 28 :

1. Montrer que $(1+i)^6=-8i$
2. En déduire une solution de l'équation $(E)\ z^2=-8i$.
3. Ecrire les deux solutions de (E) sous forme algébrique, et sous forme exponentielle.
4. Déduire de la première question une solution de l'équation $(E_0)\ z^3=-8i$.

Allez à : Correction exercice 28 :

CORRECTIONS

Correction exercice 1 :

1. $(3+2i)(1-3i)=3-9i+2i-6i^2=3-7i+6=9-7i$
2.
$$2e^{i\frac{\pi}{3}}\times 3e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}=6e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)}=6\,e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=-6i$$
3.
$$\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{3e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}}=\frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}e^{\frac{5i\pi}{6}}=\frac{2}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)}=\frac{2}{3}e^{\frac{7i\pi}{6}}$$

Allez à : Exercice 1 :

Correction exercice 2 :

1. $|u|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ et $|v|=\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}=2$
2.

$$u=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Donc un argument de u est $\frac{\pi}{4}$.

$$v=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Donc un argument de v est $\frac{2\pi}{3}$.

3. On cherche les solutions complexes de $z^3=u$

$$z^3=u\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|z^3|=\sqrt{2}\\ \arg(z^3)=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|z|^3=2^{\frac{1}{2}}\\ 3\arg(z)=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|z|=2^{\frac{1}{6}}\\ \arg(z)=\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3},\ \ k\in\{0,1,2\}\end{array}\right.$$

u admet trois racines cubiques

$$z_0=2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}};\quad z_1=2^{\frac{1}{6}}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)}=2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{9\pi}{12}}=2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{3i\pi}{4}}\quad et\quad z_2=2^{\frac{1}{6}}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)}=2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{17i\pi}{12}}$$

4.

$$\frac{u}{v}=\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{\frac{2i\pi}{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5i\pi}{12}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$$

Et

$$\frac{u}{v}=\frac{1+i}{-1+i\sqrt{3}}=\frac{(1+i)\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{4}=\frac{-1+\sqrt{3}+i\left(-1-\sqrt{3}\right)}{4}$$

Par conséquent

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-1+\sqrt{3}}{4}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-1-\sqrt{3}}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\\ \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\end{array}\right.$$

Allez à : Exercice 2 :

Correction exercice 3 :

$$|u|=\frac{\left|\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right|}{2}=\frac{\sqrt{6+2}}{2}=\frac{\sqrt{8}}{2}=\frac{\sqrt{4\times 2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

$$u=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2\times 3}-i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}-i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

Donc $|u|=\sqrt{2}$ et un argument de u est $-\frac{\pi}{6}$.

$$|v|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

$$v=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Donc $|v|=\sqrt{2}$ et un argument de v est $-\frac{\pi}{4}$.

$$\frac{u}{v}=\frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)}=e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Donc $\left|\frac{u}{v}\right|=1$ et un argument de $\frac{u}{v}$ est $\frac{\pi}{12}$.

Allez à : Exercice 3 :

Correction exercice 4 :

On cherche les nombres complexes tels que $z^2=-1$

$$Z_1=-i \quad \text{et} \quad Z_2=i$$

On cherche les nombres complexes tels que $z^2=i=e^{\frac{i\pi}{2}}$

$$z_1=-e^{i\frac{\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad z_2=e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On cherche les nombres complexes tels que $z^2=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i\pi}{4}}$

$$Z_1=-2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{i\pi}{8}} \quad \text{et} \quad Z_2=2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{i\pi}{8}}$$

C'est un peu insuffisant parce que l'on ne connait pas les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Autre méthode, on cherche $a,b\in\mathbb{R}$ tels que

$$(a+ib)^2=1+i\Leftrightarrow a^2-b^2+2iab=1+i\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{cases} a^2-b^2=1 \\ 2ab=1 \end{cases}$$

On rajoute l'équation L_3

$$|(a+ib)^2|=|1+i|\Leftrightarrow |a+ib|^2=\sqrt{1^2+1^2}\Leftrightarrow\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=\sqrt{2}\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{2}$$

En faisant la somme de L_1 et de L_3

$$2a^2=1+\sqrt{2}\Leftrightarrow a^2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow a=\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{2+2\sqrt{2}}{4}}=\pm\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}$$

En faisant la différence de L_3 et de L_1

$$2b^2=-1+\sqrt{2}\Leftrightarrow b^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow b=\pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{-2+2\sqrt{2}}{4}}=\pm\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}$$

D'après L_2 a et b sont de même signe donc les deux solutions de $z^2=1+i$ sont

$$Z_1=\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2} \quad \text{et} \quad Z_2=-\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}-i\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}$$

On cherche les nombres complexes tels que $z^2=-1-i=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2^{\frac{1}{2}}e^{\frac{5i\pi}{4}}$

$$Z_1=-2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{5i\pi}{8}} \quad \text{et} \quad Z_2=2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{5i\pi}{8}}$$

C'est un peu insuffisant parce que l'on ne connait pas les valeurs de $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)$ et de $\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)$

Autre méthode, on cherche $a,b\in\mathbb{R}$ tels que

$$(a+ib)^2=-1-i\Leftrightarrow a^2-b^2+2iab=-1-i\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{cases} a^2-b^2=-1 \\ 2ab=-1 \end{cases}$$

On rajoute l'équation L_3

$$|(a+ib)^2|=|-1-i|\Leftrightarrow |a+ib|^2=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}\Leftrightarrow\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=\sqrt{2}\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{2}$$

En faisant la somme de L_1 et de L_3

$$2a^2=-1+\sqrt{2}\Leftrightarrow a^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow a=\pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{-2+2\sqrt{2}}{4}}\pm\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}$$

En faisant la différence de L_3 et de L_1

$$2b^2=1+\sqrt{2}\Leftrightarrow b^2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow b=\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{2+2\sqrt{2}}{4}}\pm\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}$$

D'après L_2 a et b sont de signes opposés donc les deux solutions de $z^2=-1-i$ sont

$$Z_1=\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}-i\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2} \quad \text{et} \quad Z_2=-\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}$$

On cherche les nombres complexes tels que $z^2=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$Z_1=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\quad \text{et}\quad Z_2=-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-\frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On cherche les nombres complexes tels que $Z^2=3+4i$

On pose $Z=a+ib$, $Z^2\Leftrightarrow 3+4i=(a+ib)^2\Leftrightarrow 3+4i=a^2-b^2+2iab\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}a^2-b^2=3\\2ab=4\end{cases}$

On rajoute l'équation $|Z^2|\Leftrightarrow |3+4i|=a^2+b^2\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{3^2+4^2}\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{25}=5\ \ L_3$

Avec le système $\begin{cases}a^2-b^2=3\\a^2+b^2=5\end{cases}$, en faisant la somme des deux équations L_1 et L_3, on trouve $2a^2=8\Leftrightarrow a^2=4$, d'où l'on tire $b^2=1$. Les valeurs possibles de a sont ± 2 et les valeurs possibles de b sont ± 1, d'après l'équation $2ab=4\Leftrightarrow ab=2$, on en déduit que $ab>0$ et que donc a et b sont de même signe.

Si $a=2$ alors $b=1$ et $Z_1=2+i$ et si $a=-2$ alors $b=-1$ et $Z_2=-2-i$

Deuxième méthode

$3+4i=4+4i-1=(2+i)^2$ et on retrouve le même résultat.

Troisième méthode

On reprend le système

$$\begin{cases}a^2-b^2=3\\2ab=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-\left(\frac{2}{a}\right)^2=3\\ b=\frac{2}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-\frac{4}{a^2}=3\\ b=\frac{2}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^4-4=3a^2\\ b=\frac{2}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^4-3a^2-4=0\\ b=\frac{2}{a}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}A^2-3A-4=0\\ b=\frac{2}{a}\end{cases}$$

Les solutions de $A^2-3A-4=0$ sont $A_1=-1<0$ et $A_2=4$, donc $a^2=4$,

Si $a=-2$ alors $b=\frac{2}{a}=-1$ et alors $Z_2=-2-i$, si $a=2$ alors $b=\frac{2}{a}=1$ et alors $Z_1=2+i$.

On cherche les nombres complexes tels que $Z^2=-7-24i$

On pose $Z=a+ib$, $Z^2\Leftrightarrow -7-24i=(a+ib)^2\Leftrightarrow -7-24i=a^2-b^2+2iab\Leftrightarrow$
$\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}a^2-b^2=-7\\2ab=-24\end{cases}$

On rajoute l'équation

$$|Z^2|\Leftrightarrow |3+4i|=a^2+b^2\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{(-7)^2+(-24)^2}\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{49+576}=\sqrt{625}=25\ \ L_3$$

Avec le système $\begin{cases}a^2-b^2=-7\\a^2+b^2=25\end{cases}$, en faisant la somme des deux équations L_1 et L_3, on trouve $2a^2=18\Leftrightarrow a^2=9$, d'où l'on tire $b^2=16$. Les valeurs possibles de a sont ± 3 et les valeurs possibles de b sont ± 4, d'après l'équation $2ab=-24\Leftrightarrow ab=-12$, on en déduit que $ab<0$ et que donc a et b sont de signe opposé.

Si $a=3$ alors $b=-4$ et $Z_1=3-4i$ et si $a=-3$ alors $b=4$ et $Z_2=-3+4i$

Deuxième méthode

$-7-24i=9-24i-16=(3-4i)^2$ et on retrouve le même résultat.

Troisième méthode

On reprend le système

$$\begin{cases}a^2-b^2=-7\\2ab=-24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-\left(\frac{-12}{a}\right)^2=-7\\ b=-\frac{12}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-\frac{144}{a^2}=-7\\ b=-\frac{12}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^4-144=-7a^2\\ b=-\frac{12}{a}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^4+7a^2-144=0\\ b=-\frac{12}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A^2+7A-144=0\\ b=-\frac{12}{a}\end{cases}$$

Les solutions de $A^2+7A-144=0$ sont $A_1=-16<0$ et $A_2=9$, donc $a^2=9$, Si $a=3$ alors $b=-\frac{12}{a}=-4$ et alors $Z_2=3-4i$, si $a=3$ alors $b=-\frac{12}{a}=-4$ et alors $Z_1=-3+4i$.

On cherche les nombres complexes tels que $Z^2=3-4i=z_8$, on peut refaire comme précédemment mais on va prendre la méthode la plus simple

$$Z^2=3-4i=4-4i-1=(2-i)^2$$

Il y a deux solutions

$$Z_1=2-i \quad \text{et} \quad Z_2=-2+i$$

On cherche les complexes Z tels que $Z^2=z_9=24-10i$

Là encore, on va aller au plus simple

$$24-10i=25-10i-1=(5-i)^2$$

Donc il y a deux solutions

$$Z_1=5-i \quad \text{et} \quad Z_2=-5+i$$

Allez à : Exercice 4 :

Correction exercice 5 :

1. On cherche les complexes Z tels que

$$Z^2=\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On pose $Z=a+ib$,

$$Z^2=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=(a+ib)^2\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=a^2-b^2+2iab\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}a^2-b^2=\frac{\sqrt{2}}{2}\\2ab=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

On rajoute l'équation

$$|Z^2|\Leftrightarrow\left|\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=a^2+b^2\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1\ \ L_3$$

Avec le système $\begin{cases}a^2-b^2=\frac{\sqrt{2}}{2}\\a^2+b^2=1\end{cases}$, en faisant la somme des deux équations L_1 et L_3, on trouve

$$2a^2=1+\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow a^2=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

En faisant la différence de L_3 et de L_1

$$2b^2=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow b^2=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

Les valeurs possibles de a sont $\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et les valeurs possibles de b sont $\pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, d'après l'équation $2ab=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow ab=\frac{\sqrt{2}}{4}$, on en déduit que $ab>0$ et que donc a et b sont de même signe.

Si $a=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ alors $b=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $Z_1=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Et si $a=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ alors $b=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $Z_2=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}-i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

D'autre part

$$Z^2=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Admet deux solutions $Z_3=e^{i\frac{\pi}{8}}=\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $z_4=-e^{i\frac{\pi}{8}}=-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)>0$ et que $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)>0$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\end{cases}$$

2. On cherche les complexes Z tels que

$$Z^2=\frac{\sqrt{3}+i}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

On pose $Z=a+ib$,

$$Z^2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=(a+ib)^2\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=a^2-b^2+2iab\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}a^2-b^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 2ab=\frac{1}{2}\end{cases}$$

On rajoute l'équation

$$|Z^2|\Leftrightarrow\left|\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right|=a^2+b^2\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1\ \ L_3$$

Avec le système $\begin{cases}a^2-b^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\\a^2+b^2=1\end{cases}$, en faisant la somme des deux équations L_1 et L_3, on trouve

$$2a^2=1+\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow a^2=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

En faisant la différence de L_3 et de L_1

$$2b^2=1-\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow b^2=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

Les valeurs possibles de a sont $\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ et les valeurs possibles de b sont $\pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$, d'après l'équation $2ab=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow ab=\frac{\sqrt{3}}{4}$, on en déduit que $ab>0$ et que donc a et b sont de même signe.

Si $a=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ alors $b=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ et $Z_1=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

Et si $a=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ alors $b=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ et $Z_2=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}-i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

D'autre part

$$Z^2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Admet deux solutions $Z_3=e^{i\frac{\pi}{12}}=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $Z_4=-e^{i\frac{\pi}{12}}=-\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)>0$ et que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)>0$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\end{cases}$$

Allez à : Exercice 5 :

Correction exercice 6 :

1. $z^2+z+1=0$

$$\Delta=1^2-4=-3=\left(i\sqrt{3}\right)^2$$

$$z_1=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=\bar{j}=j^2$$

$$z_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=j$$

Allez à : Exercice 6 :

2. $z^2-(5i+14)z+2(5i+12)=0$

$$\Delta=\left(-(5i+14)\right)^2-4\times 2(5i+12)=(-25+140i+196)-40i-96=75+100i=25(3+4i)$$
$$=5^2(3+4i)$$

On cherche $a,b\in\mathbb{R}$ tels que

$$(a+ib)^2=5-4i\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1\\ L_2\\ L_3\end{matrix}\left\{\begin{matrix} a^2-b^2=3\\ 2ab=4\\ a^2+b^2=\sqrt{3^2+4^2}=5\end{matrix}\right.$$

En faisant L_1+L_3 on trouve que $2a^2=8\Leftrightarrow a^2=4\Leftrightarrow a=\pm 2$

En faisant L_3-L_2 on trouve que $2b^2=2\Leftrightarrow b^2=1\Leftrightarrow b=\pm 1$

D'après L_2 a et b sont de même signe donc $a+ib=2+i$ ou $a+ib=-2-i$

Autre méthode $3+4i=4+4i-1=(2+i)^2$

et alors

$$\Delta=5^2(2+i)^2=(10+5i)^2$$

Les solutions de l'équation sont

$$z_1=\frac{5i+14-(10+5i)}{2}=\frac{4}{2}=2$$
$$z_1=\frac{5i+14+(10+5i)}{2}=\frac{24+10i}{2}=12+5i$$

Allez à : Exercice 6 :

3. $z^2-\sqrt{3}z-i=0$

$$\Delta=3+4i=(2+i)^2$$
$$z_1=\frac{\sqrt{3}+2+i}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{1}{2}i=1-i\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1-ij$$
$$z_2=\frac{\sqrt{3}-2-i}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}-1-\frac{1}{2}i=-1+i\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1+ij^2$$

Allez à : Exercice 6 :

4. $z^2-(1+2i)z+i-1=0$

$$\Delta=(1+2i)^2-4(i-1)=1+4i-4-4i+4=1$$
$$z_1=\frac{1+2i-1}{2}=i$$
$$z_2=\frac{1+2i+1}{2}=1+i$$

Allez à : Exercice 6 :

5. $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$

Le discriminant vaut

$$\Delta=\left(-(3+4i)\right)^2-4(-1+5i)=9+24i-16+4-20i=-3-4i=(1-2i)^2$$

Il y a deux solutions

$$z_1=\frac{3+4i-(1-2i)}{2}=2+3i$$
$$z_2=\frac{3+4i+1-2i}{2}=2+i$$

Allez à : Exercice 6 :

6. $4z^2-2z+1=0$

Soit on résout « normalement », soit on ruse, rusons

$$4z^2-2z+1=0\Leftrightarrow Z^2+Z+1=0$$

Avec $Z=-2z$. Les solutions de $Z^2+Z+1=0$ sont connues (et puis on vient de les revoir dans 1°))

$$Z_1=j \quad \text{et} \quad Z_2=j^2$$

Par conséquent

$$z_1=-\frac{1}{2}j \quad \text{et} \quad z_2=-\frac{1}{2}j^2$$

Allez à : Exercice 6 :

7. $z^4+10z^2+169=0$

On pose $Z=z^2$, $Z^2+10Z+169=0$ a pour discriminant

$$\Delta=10^2-4\times 169=10^2-(2\times 13)^2=(10-26)(10+26)=-16\times 36=-4^2\times 6^2=(24i)^2$$

$$Z_1=\frac{-10+24i}{2}=-5+12i$$

$$Z_2=\frac{-10-24i}{2}=-5-12i$$

On cherche $z=a+ib$ tel que

$$z^2=Z_1\Leftrightarrow (a+ib)^2=-5+12i\Leftrightarrow a^2-b^2+2iab=-5+12i$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\left\{\begin{array}{c} a^2-b^2=-5 \\ 2ab=12 \\ a^2+b^2=\sqrt{(-5)^2+12^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13 \end{array}\right.$$

En faisant la somme de L_1 et de L_3, on trouve que $2a^2=8\Leftrightarrow a^2=4\Leftrightarrow a=\pm 2$,

En faisant la différence de L_3 et de L_1, on trouve que $2b^2=18\Leftrightarrow b^2=9\Leftrightarrow b=\pm 3$,

D'après L_2, a et b sont de même signe donc $z^2=Z_1$ a deux solutions

$$z_1=2+3i \quad et \quad z_2=-2-3i$$

On peut résoudre de la même façon $Z_2=z^2$ ou dire que $z^4+10z^2+169=0$ est une équation à coefficients réels et que donc si une racine complexe est solution alors son conjugué est aussi solution, par conséquent $\overline{z_1}=2-3i$ et $\overline{z_2}=-2+3i$ sont aussi solution, ce qui donne 4 solutions pour une équation de degré 4, il n'y en a pas plus, on les a toutes.

Allez à : Exercice 6 :

8. $z^4+2z^2+4=0$

On peut faire comme dans le 7°), mais rusons :

$$z^4+2z^2+4=0\Leftrightarrow \frac{z^4}{4}+\frac{z^2}{2}+1=0\Leftrightarrow \left(\frac{z^2}{2}\right)^2+\left(\frac{z^2}{2}\right)+1=0\Leftrightarrow \left[\left(\frac{z^2}{2}\right)-j\right]\left[\left(\frac{z^2}{2}\right)-j^2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2-j^4\right]\left[\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2-j^2\right]=0\Leftrightarrow \left(\frac{z}{\sqrt{2}}-j^2\right)\left(\frac{z}{\sqrt{2}}+j^2\right)\left(\frac{z}{\sqrt{2}}-j\right)\left(\frac{z}{\sqrt{2}}+j\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(z-\sqrt{2}j^2\right)\left(z+\sqrt{2}j^2\right)\left(z-\sqrt{2}j\right)\left(z+\sqrt{2}j\right)=0$$

Les solutions sont

$$\{\sqrt{2}j^2,-\sqrt{2}j^2,\sqrt{2}j,-\sqrt{2}j\}$$

Allez à : Exercice 6 :

9. $x^4-30x^2+289=0$

On pose $X=x^2$

$$X^2-30X+289=0$$

$$\Delta=30^2-4\times 289=900-1156=-256=-16^2=(16i)^2$$

$$X_1=\frac{30-16i}{2}=15-8i$$

$$X_2=15+8i$$

On cherche x tel que $x^2=15-8i=16-8i-1=(4-i)^2$

Il y a donc deux solutions $x_1=4-i$ et $x_2=-(4-i)=-4+i$.

De même on cherche x tel que $x^2=15+8i=16+8i-1=(4+i)^2$

Il y a donc deux solutions $x_3=4+i$ et $x_4=-(4+i)=-4-i$.

Les solutions sont

$$\{4-i,-4+i,4+i,-4-i\}$$

Allez à : Exercice 6 :

10. $x^4+4x^3+6x^2+4x-15=0$

Il faudrait trouver des solutions (réelles ou complexes).

$x=1$ est solution évidente, mais ensuite cela ne vient pas, mais en regardant mieux on s'aperçoit que 4 premiers termes ressemblent fort au développement de $(x+1)^4=x^4+4x^3+6x^2+4x+1$ donc

$$x^4+4x^3+6x^2+4x-15=0\Leftrightarrow(x+1)^4-1-15=0\Leftrightarrow(x+1)^4=16$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|(x+1)^4|=16\\ \arg((x+1)^4)=\arg(16)+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x+1|^4=2^4\\ 4\arg(x+1)=0+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|x+1|=2\\ \arg(x+1)=\dfrac{2k\pi}{4},\ \ k\in\{0,1,2,3\}\end{cases}\Leftrightarrow x_k+1=2e^{\frac{ik\pi}{2}},$$

$$k\in\{0,1,2,3\}\Leftrightarrow x_k=-1+2e^{\frac{ik\pi}{2}},\qquad k\in\{0,1,2,3\}$$

$$x_0=-1+2=1;\ \ x_1=-1+2e^{i\frac{\pi}{2}}=-1+2i;$$

$$x_2=-1+2e^{i\pi}=-1-2=-3;\ \ x_3=-1+2e^{\frac{3i\pi}{2}}=-1-2i$$

Sont les solutions.

Allez à : Exercice 6 :

11. $z^3+3z-2i=0$

On voit que i est une solution évidente (car $i^3+3i-2i=0$) donc on peut mettre $z-i$ en facteur.

$$z^3+3z-2i=(z-i)(az^2+bz+c)\Leftrightarrow z^3+3z-2i=az^3+(-ia+b)z^2+(-ib+c)z-ic$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ -ia+b=0\\ -ib+c=3\\ -ic=-2i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=ia=i\\ c=3+ib=2\\ c=2\end{cases}$$

$$z^3+3z-2i=(z-i)(z^2+iz+2)$$

Le discriminant de z^2+iz+2 est $\Delta=i^2-4\times2=-9=(3i)^2$

Il y a deux solutions

$$z=\frac{-i-3i}{2}=-2i\quad\text{ et }\quad z=\frac{-i+3i}{2}=i$$

Il y a donc deux solutions, $z_1=i$ et $z_2=-2i$.

Allez à : Exercice 6 :

12.

$$\Delta=(1+a)^2(1+i)^2-4(1+a^2)i=(1+2a+a^2)(1+2i-1)-4i-4ia^2$$
$$=2i+4ia+2ia^2-4i-4ia^2=-2i+4ia-2ia^2=-2i(1-2a+a^2)$$
$$=(1-i)^2(1-a)^2=\big((1-i)(1-a)\big)^2$$

$$z_1=\frac{(1+a)(1+i)-(1-i)(1-a)}{2}=\frac{1+i+a+ia-(1-a-i+ia)}{2}=a+i$$

$$z_1=\frac{(1+a)(1+i)+(1-i)(1-a)}{2}=\frac{1+i+a+ia+1-a-i+ia}{2}=1+ia$$

Allez à : Exercice 6 :

13. $\Delta=(1-5i)^2-4i(6i-2)=1-25-10i+24+8i=-2i$

Il faut trouver δ tel que $\Delta=\delta^2$

Première méthode :

$-2i=1-2i-1=(1-i)^2$ c'est une identité remarquable. Donc $\delta_1=1-i$ ou $\delta_2=-1+i$

Deuxième méthode

On pose $\delta=a+ib$, $\Delta=\delta^2\Leftrightarrow-2i=(a+ib)^2\Leftrightarrow-2i=a^2-b^2+2iab\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=0\\ 2ab=-2\end{cases}$

On rajoute l'équation $|\Delta| = |\delta^2| \Leftrightarrow |-2i| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 2 = a^2 + b^2$

Avec le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations, on trouve $2a^2 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 1$, d'où l'on tire $b^2 = 1$. Les valeurs possibles de a sont ± 1 et les valeurs possibles de b sont ± 1, d'après l'équation $2ab = -2 \Leftrightarrow ab = -1$, on en déduit que $ab < 0$ et que donc a et b sont de signe opposé.

Si $a = 1$ alors $b = -1$ et $\delta = 1 - i$ et si $a = -1$ alors $b = 1$ et $\delta = -1 + i$. Ce sont bien les mêmes solutions qu'avec la première méthode.

Troisième méthode

$\Delta = -2i = 2e^{\frac{3i\pi}{2}}$, donc les racines deuxièmes de Δ sont $\delta = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + i$ et $\delta = -\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}} = 1 - i$.

Pour résoudre $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$, on n'a besoin que d'une racine deuxième, on prend, par exemple $\delta = 1 - i$.

Les deux solutions sont :

$$z_1 = \frac{-(1-5i) - (1-i)}{2i} = \frac{-2+6i}{2i} = \frac{-1+3i}{i} = \frac{(-1+3i)(-i)}{i(-i)} = 3 + i$$

$$z_2 = \frac{-(1-5i) + (1-i)}{2i} = \frac{4i}{2i} = 2$$

Allez à : Exercice 6 :

14.

$$\Delta = \left(-(3+i)\right)^2 - 4(1+i)(-6+4i) = (3+i)^2 - 4(-6+4i-6i-4)$$
$$= 9 - 1 + 6i - 4(-10 - 2i) = 8 + 6i + 40 + 8i = 48 + 14i$$

On pose $\delta = a + ib$, $\Delta = \delta^2 \Leftrightarrow 48 + 14i = (a+ib)^2 \Leftrightarrow 48 + 14i = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 48 \\ 2ab = 14 \end{cases}$

On rajoute l'équation

$$|\Delta| = |\delta^2| \Leftrightarrow |48 + 14i| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 2|24 + 7i| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2\sqrt{24^2 + 7^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2\sqrt{576 + 49} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2\sqrt{625} = 2 \times 25 = 50$$

Avec le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = 48 \\ a^2 + b^2 = 50 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations, on trouve $2a^2 = 98 \Leftrightarrow a^2 = 49$, d'où l'on tire $b^2 = 1$. Les valeurs possibles de a sont ± 7 et les valeurs possibles de b sont ± 1, d'après l'équation $2ab = 14 \Leftrightarrow ab = 7$, on en déduit que $ab > 0$ et que donc a et b sont de même signe.

Si $a = 7$ alors $b = 1$ et $\delta = 7 + i$ et si $a = -7$ alors $b = -1$ et $\delta = -7 - i$

Deuxième méthode

$\Delta = 48 + 14i = 49 + 2 \times 7i - 1 = (7 + i)^2$ donc $\delta = 7 + i$ ou $\delta = -7 - i$.

Troisième méthode

On reprend le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = 48 \\ 2ab = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \left(\frac{7}{a}\right)^2 = 48 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{49}{a^2} = 48 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 49 = 48a^2 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 48a^2 - 49 = 0 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 - 48A - 49 = 0 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases}$, le discriminant de $A^2 - 48A - 49 = 0$ est $\Delta' = 48^2 + 4 \times 49 = 2500 = 50^2$ donc ses solutions sont $A_1 = \frac{48-50}{2} = -1$ et $A_2 = \frac{48+50}{2} = 49$, $A_1 < 0$ donc il n'y a pas de solution de $a^2 = -1$, par contre $a^2 = 49$ admet deux solutions $a = -7$ et $a = 7$.

Si $a = -7$ alors $b = \frac{7}{a} = -1$ et si $a = 7$ alors $b = \frac{7}{a} = 1$, on retrouve les mêmes solutions.

Les solutions de $(1 + i)z^2 - (3 + i)z - 6 + 4i = 0$ sont :

$$z_1=\frac{(3+i)-(7+i)}{2(1+i)}=-\frac{4}{2(1+i)}=-\frac{2}{1+i}=-\frac{2(1-i)}{1^2+1^2}=-1+i$$
$$z_2=\frac{(3+i)+(7+i)}{2(1+i)}=\frac{10+2i}{2(1+i)}=\frac{5+i}{1+i}=\frac{(5+i)(1-i)}{1^2+1^2}=\frac{5-5i+i+1}{1^2+1^2}=\frac{6-4i}{2}=3-2i$$

Allez à : Exercice 6 :

15.

$$\Delta=\left(-(9+3i)\right)^2-4(1+2i)(-5i+10)=(3(3+i)^2)-4(-5i+10+10+20i)$$
$$=9(9-1+6i)-4(-25)=9(8+6i)-4(20+15i)=72+54i-80-60i$$
$$=-8-6i$$

On pose $\delta=a+ib$, $\Delta=\delta^2\Leftrightarrow -8-6i=(a+ib)^2\Leftrightarrow -8-6i=a^2-b^2+2iab\Leftrightarrow$
$\begin{cases}a^2-b^2=-8\\ 2ab=-6\end{cases}$

On rajoute l'équation $|\Delta|=|\delta^2|\Leftrightarrow|-8-6i|=a^2+b^2\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{(-8)^2+(-6)^2}\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{64+36}\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{100}=10$

Avec le système $\begin{cases}a^2-b^2=-8\\ a^2+b^2=10\end{cases}$, en faisant la somme des deux équations, on trouve $2a^2=2\Leftrightarrow a^2=1$, d'où l'on tire $b^2=9$. Les valeurs possibles de a sont ±1 et les valeurs possibles de b sont ±3, d'après l'équation $2ab=-6\Leftrightarrow ab=-3$, on en déduit que $ab<0$ et que donc a et b sont de signe opposé.

Si $a=1$ alors $b=-3$ et $\delta=1-3i$ et si $a=-1$ alors $b=3$ et $\delta=-1+3i$

Deuxième méthode

On reprend le système $\begin{cases}a^2-b^2=-8\\ 2ab=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-\left(\frac{-3}{a}\right)^2=-8\\ b=\frac{-3}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-\frac{9}{a^2}=-8\\ b=\frac{-3}{a}\end{cases}\Leftrightarrow$
$\begin{cases}a^4-9=-8a^2\\ b=\frac{-3}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^4+8a^2-9=0\\ b=\frac{-3}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A^2+8A-9=0\\ b=\frac{-3}{a}\end{cases}$, le discriminant de $A^2+8A-9=0$ est $\Delta'=8^2+4\times9=100=10^2$ donc ses solutions sont $A_1=\frac{-8-10}{2}=-9$ et $A_2=\frac{-8+10}{2}=1$, $A_2<0$ donc il n'y a pas de solution de $a^2=-9$, par contre $a^2=1$ admet deux solutions $a=-1$ et $a=1$.

Si $a=-1$ alors $b=\frac{-3}{a}=3$ et si $a=1$ alors $b=\frac{-3}{a}=-1$, on retrouve les mêmes solutions.

Troisième méthode

$\Delta=-8-6i=1-6i-9=(1-3i)^2$ donc $\delta=1-3i$ et $\delta=-1+3i$

Les solutions de $(1+2i)z^2-(9+3i)z-5i+10=0$ sont :

$$z_1=\frac{(9+3i)-(1-3i)}{2(1+2i)}=\frac{8+6i}{2(1+2i)}=\frac{4+3i}{1+2i}=\frac{(4+3i)(1-2i)}{1^2+2^2}=\frac{4-8i+3i+6}{10}=2-i$$
$$z_2=\frac{(9+3i)+(1-3i)}{2(1+2i)}=\frac{10}{2(1+2i)}=\frac{5}{1+2i}=\frac{5(1-2i)}{1^2+2^2}=1-2i$$

Allez à : Exercice 6 :

16. $\Delta=(-(6i+2)^2)-4(1+3i)(11i-23)=(6i+2)^2-4(11i-23-33-69i)=-36+24i+4-4(-56-58i)=-32+24i+224+232i=192+256i=64(3+4i)$

Si j'ai mis 64 en facteur, c'est que maintenant il suffit de trouver une racine deuxième de $3+4i$, ce qui est beaucoup plus facile que de trouver une racine deuxième de $192+256i$.

On pose $\delta=a+ib$, $\Delta=\delta^2\Leftrightarrow 3+4i=(a+ib)^2\Leftrightarrow 3+4i=a^2-b^2+2iab\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=3\\ 2ab=4\end{cases}$

On rajoute l'équation $|\Delta|=|\delta^2|\Leftrightarrow|3+4i|=a^2+b^2\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{3^2+4^2}\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{25}=5$

Avec le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations, on trouve $2a^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 = 4$, d'où l'on tire $b^2 = 1$. Les valeurs possibles de a sont ± 2 et les valeurs possibles de b sont ± 1, d'après l'équation $2ab = 4 \Leftrightarrow ab = 2$, on en déduit que $ab > 0$ et que donc a et b sont de même signe.

Si $a = 2$ alors $b = 1$ et $\delta = 2 + i$ et si $a = -2$ alors $b = -1$ et $\delta = -2 - i$

Donc $(2+i)^2 = 3 + 4i$ entraine que $\Delta = 64(3+4i) = 8^2(2+i)^2 = \big(8(2+i)\big)^2 = (16+8i)^2$

Deuxième méthode

$3 + 4i = 4 + 4i - 1 = (2+i)^2$ et on retrouve le même résultat.

Troisième méthode

On reprend le système

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \left(\dfrac{2}{a}\right)^2 = 3 \\ b = \dfrac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \dfrac{4}{a^2} = 3 \\ b = \dfrac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 4 = 3a^2 \\ b = \dfrac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 3a^2 - 4 = 0 \\ b = \dfrac{2}{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A^2 - 3A - 4 = 0 \\ b = \dfrac{2}{a} \end{cases}$$

Les solutions de $A^2 - 3A - 4 = 0$ sont $A_1 = -1 < 0$ et $A_2 = 4$, donc $a^2 = 4$,

Si $a = -2$ alors $b = \frac{2}{a} = -1$ et alors $\delta = -2 - i$, si $a = 2$ alors $b = \frac{2}{a} = 1$ et alors $\delta = 2 + i$.

Les solutions de $(1+3i)z^2 - (6i+2)z + 11i - 23 = 0$ sont

$$z_1 = \frac{6i + 2 - (16+8i)}{2(1+3i)} = \frac{-14-2i}{2(1+3i)} = \frac{-7-i}{1+3i} = \frac{(-7-i)(1-3i)}{1^2+3^2} = \frac{-7+21i-i-3}{10} = -1+2i$$

$$z_2 = \frac{6i + 2 + (16+8i)}{2(1+3i)} = \frac{18+14i}{2(1+3i)} = \frac{9+7i}{1+3i} = \frac{(9+7i)(1-3i)}{1^2+3^2} = \frac{9-27i+7i+21}{10} = 3-2i$$

Allez à : Exercice 6 :

Correction exercice 7 :

On pose $X = Z^2$,

$$Z^4 + (3-6i)Z^2 - 8 - 6i = 0 \Leftrightarrow X^2 + (3-6i)X - 8 - 6i = 0$$

Le discriminant est

$$\Delta = (3-6i)^2 - 4(-8-6i) = 9 - 36i - 36 + 32 + 24i = 5 - 12i$$

Les racines carrés de $5 - 12i$:

$$(a+ib)^2 = 5 - 12i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab = 5 - 12i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ 2ab = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ ab = 6 \end{cases}$$

On rajoute l'égalité des modules

$$a^2 + b^2 = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \quad L_3$$

En additionnant L_1 et L_3, on trouve $2a^2 = 18$ donc $a^2 = 9$, c'est-à-dire $a = \pm 3$.

En soustrayant L_1 à L_3, on trouve $2b^2 = 8$ donc $b^2 = 4$, c'est-à-dire $b = \pm 2$.

D'après L_2, a et b ont le même signe donc les deux racines carrés de $5 - 12i$ sont : $3 + 2i$ et $-3 - 2i$.

Les solutions de $X^2 + (3-6i)X - 8 - 6i = 0$ sont :

$$X_1 = \frac{-(3-6i) - (3+2i)}{2} = -3 + 4i$$

Et

$$X_2 = \frac{-(3-6i) + (3+2i)}{2} = 2i$$

Or $X_1 = -3 + 4i = 4 + 4i - 1 = (2+i)^2$ donc $Z^2 = -3 + 4i$ a deux solutions :

$$Z_1 = 2 + i$$

Et

$$Z_2 = -2 - i$$

De plus $X_2 = 2i = (1+i)^2$ donc $Z^2 = 2i$ a deux solutions :

$$Z_3 = 1 + i$$

Et

$$Z_4 = -1 - i$$

Allez à : Exercice 7 :

Correction exercice 8 :

1. On pose $X = a \in \mathbb{R}$

$$(1-i)a^3 - (5+i)a^2 + (4+6i)a - 4i = 0 \Leftrightarrow a^3 - 5a^2 + 4a + i(-a^3 - a^2 + 6a - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 5a^2 + 4a = 0 \\ -a^3 - a^2 + 6a - 4 = 0 \end{cases}$$

$$a^3 - 5a^2 + 4a = 0 \Leftrightarrow a(a^2 - 5a^2 + 4) = 0$$

Donc cette équation admet 0, 1 et 4 comme racine. Seul 1 est solution de $-a^3 - a^2 + 6a - 4 = 0$ donc il existe une unique solution réelle $a = 1$.

2. On factorise $(1-i)X^3 - (5+i)X^2 + (4+6i)X - 4i$ par $X - 1$. Il existe alors α, β et γ telle que :

$$(1-i)X^3 - (5+i)X^2 + (4+6i)X - 4i = (X-1)(\alpha X^2 + \beta X + \gamma)$$

Or $(X-1)(\alpha X^2 + \beta X + \gamma) = \alpha X^3 + (\beta - \alpha)X^2 + (\gamma - \beta)X - \gamma$

On en déduit que : $\begin{cases} \alpha = 1 - i \\ \beta - \alpha = -(5+i) \\ \gamma - \beta = 4 + 6i \\ -\gamma = -4i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - i \\ \beta = -(5+i) + 1 - i = -4 - 2i \\ \gamma = 4 + 6i - 4 - 2i = 4i \\ \gamma = 4i \end{cases}$

D'où

$$(1-i)X^3 - (5+i)X^2 + (4+6i)X - 4i = 0 \Leftrightarrow (X-1)\big((1-i)X^2 - (4+2i)X + 4i\big) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ (1-i)X^2 - (4+2i)X + 4i = 0 \end{cases}$$

Le discriminant de l'équation du second degré est :

$$\Delta = (4+2i)^2 - 4(1-i) \times 4i = 16 + 16i - 4 - 16i - 16 = -4 = (2i)^2$$

Les deux racines sont alors

$$X_1 = \frac{4 + 2i - 2i}{2(1-i)} = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{1^2 + 1^2} = 1 + i$$

$$X_2 = \frac{4 + 2i + 2i}{2(1-i)} = \frac{2 + 2i}{1 - i} = \frac{2(1+i)^2}{1^2 + 1^2} = 2i$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{1, 1+i, 2i\}$.

Allez à : Exercice 8 :

Correction exercice 9 :

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$a^3 + (1-2i)a^2 - 3(1+i)a - 2 + 2i = 0 \Leftrightarrow a^3 + a^2 - 3a - 2 + i(-2a^2 - 3a + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + a^2 - 3a - 2 = 0 \\ -2a^2 - 3a + 2 = 0 \end{cases}$$

Les solutions de l'équation $-2a^2 - 3a + 2 = 0$ sont $a_1 = -2$ et $a_2 = \frac{1}{2}$

$$(-2)^3 + (-2)^2 - 3(-2) - 2 = -8 + 4 + 6 - 2 = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 2 = \frac{1 + 2 - 12 - 16}{8} = -\frac{25}{8} \neq 0$$

Donc seul -2 est solution de (E)

2. On peut diviser $X^3 + (1-2i)X^2 - 3(1+i)X - 2 + 2i$ par $X + 2$

$$
\begin{array}{r|l}
X^3+(1-2i)X^2-3(1+i)X-2+2i & X+2 \\
\hline
X^3+2X^2 & X^2+(-1-2i)X-1+i \\
\cline{2-2}
(-1-2i)X^2-3(1+i)X-2+2i & \\
(-1-2i)X^2+2(-1-2i)X & \\
\hline
(-1+i)X-2+2i & \\
(-1+i)X-2+2i & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Par conséquent

$$X^3+(1-2i)X^2-3(1+i)X-2+2i=(X+2)(X^2+(-1-2i)X-1+i)$$
$$=(X+2)(X^2-(1+2i)X-1+i)$$

Les solutions de (E) sont donc

$$X^2-(1+2i)X+i-1=0$$
$$\Delta=(1+2i)^2-4(i-1)=1+4i-4-4i+4=1$$
$$X_1=\frac{1+2i-1}{2}=i$$
$$X_2=\frac{1+2i+1}{2}=1+i$$

Allez à : Exercice 9 :

Correction exercice 10 :

$$\Delta=(-i)^2+4(1+i)=4+4i-1=(2+i)^2$$

Les solutions de $Z^2-iZ-1-i=0$ sont

$$Z_1=\frac{i+2+i}{2}=1+i$$
$$Z_2=\frac{i-(2+i)}{2}=-1$$

Les solutions de $z^6-iz^3-1-i=0$ vérifient

$$z^3=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\Leftrightarrow\begin{cases}|z^3|=\sqrt{2}\\ \arg(z^3)=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^3=2^{\frac{1}{2}}\\ 3\arg(z)=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=2^{\frac{1}{6}}\\ \arg(z)=\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3},\quad k\in\{0,1,2\}\end{cases}\Leftrightarrow z\in\left\{2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}};\ 2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{3i\pi}{4}};\ 2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{17i\pi}{12}}\right\}$$

Ou

$$z^3=-1\Leftrightarrow\begin{cases}|z^3|=1\\ \arg(z^3)=\pi+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^3=1\\ 3\arg(z)=\pi+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=1\\ \arg(z)=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3},\quad k\in\{0,1,2\}\end{cases}$$

Il y a donc trois solutions

$$z_0=e^{\frac{i\pi}{3}};\quad z_1=e^{\frac{3i\pi}{3}}=e^{i\pi}=-1;\ z_2=e^{\frac{5i\pi}{3}}=e^{-\frac{i\pi}{3}}$$

Finalement il y a six solutions

$$\left\{2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}};\ 2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{3i\pi}{4}};\ 2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{17i\pi}{12}};e^{\frac{i\pi}{3}};-1;e^{-\frac{i\pi}{3}}\right\}$$

Allez à : Exercice 10 :

Correction exercice 11 :

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ une solution de (E)

$$a^4 - 3a^3 + (2 - i)a^2 - 3 + i = 0 \Leftrightarrow a^4 - 3a^3 + 2a^2 + 3a - 3 + i(-a^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 3a^3 + 2a^2 + 3a - 3 = 0 \\ -a^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$a_1 = -1$ est solution de $a^4 - 3a^3 + 2a^2 - 3 = 0$ et $a_2 = 1$ est solution de $a^4 - 3a^3 + 2a^2 + 3a - 3 = 0$, donc (E) admet deux solutions réelles, on peut mettre $(X-1)(X+1) = X^2 - 1$ en facteur.

2. Il existe $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que

$$X^4 - 3X^3 + (2 - i)X^2 + 3X - 3 + i = (X^2 - 1)(aX^2 + bX + c)$$

On développe

$$(X^2 - 1)(aX^2 + bX + c) = aX^4 + bX^3 + (c - a)X^2 - bX - c$$

Par conséquent

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c - a = 2 - i \\ -b = 3 \\ -c = -3 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 3 - i \end{cases}$$

$$X^4 - 3X^3 + (2 - i)X^2 + 3X - 3 + i = (X^2 - 1)(X^2 - 3X + 3 - i) = 0$$

Il reste à trouver les solutions de $X^2 - 3X + 3 - i = 0$

$$\Delta = 9 - 4(3 - i) = -3 + 4i = 1 + 4i - 4 = (1 + 2i)^2$$

Les racines carrées du discriminant sont $\delta = \pm(1 - 2i)$

Il y a deux solutions

$$X_1 = \frac{3 - (1 + 2i)}{2} = 1 - i$$

$$X_2 = \frac{3 + 1 + 2i}{2} = 2 + i$$

L'ensemble des solutions de (E) est

$$S = \{-1, 1, 1 - i, 2 + i\}$$

Allez à : Exercice 11 :

Correction exercice 12 :

1. $X^3 = 2\sqrt{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3i\pi}{4}}$

Donc

$$X^3 = 2\sqrt{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3i\pi}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} |X^3| = 2^{\frac{3}{2}} \\ \arg(X^3) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |X|^3 = 2^{\frac{3}{2}} \\ 3\arg(X) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 2^{\frac{1}{2}} \\ \arg(X) = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}, \ \ k \in \{0,1,2\} \end{cases} \Leftrightarrow X_k$$

$$= \sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, \qquad k \in k \in \{0,1,2\}$$

$$X_0 = \sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i$$

$$X_1 = \sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt{2} e^{\frac{11i\pi}{12}}$$

$$X_2 = \sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right)} = \sqrt{2} e^{\frac{19i\pi}{12}}$$

2.

$$X^3=-8i=2^3e^{\frac{3i\pi}{2}}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|X^3|=2^3\\ \arg(X^3)=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|X|^3=2^3\\ 3\arg(X)=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|X|=2\\ \arg(X)=\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3},\ \ k\in\{0,1,2\}\end{array}\right.\Leftrightarrow X_k=2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3}\right)},\qquad k\in k\in\{0,1,2\}$$

$$X_0=2e^{\frac{i\pi}{2}}=2i$$

$$X_1=2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)}=2e^{\frac{7i\pi}{6}}=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-\sqrt{3}-i$$

$$X_2=2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)}=2e^{\frac{11i\pi}{6}}=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}-i$$

3. On pose $X=Z^3$

$$\frac{1}{2}Z^6+(1+3i)Z^3+8+8i=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}X^2+(1+3i)X+8+8i=0$$

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta=(1+3i)^2-4\times\frac{1}{2}(8+8i)=1+6i-9-16-16i=-24-10i$$

Les racines carrés de $-24-10i$:

$$(a+ib)^2=-24-10i\Leftrightarrow a^2-b^2+2iab=-24-10i\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}a^2-b^2=-24\\ 2ab=-10\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{array}{c}L_1\\ L_2\end{array}\left\{\begin{array}{c}a^2-b^2=-24\\ ab=-5\end{array}\right.$$

On rajoute l'égalité des modules

$$a^2+b^2=\sqrt{24^2+10^2}=\sqrt{576+100}=\sqrt{676}=26\quad L_3$$

En additionnant L_1 et L_3, on trouve $2a^2=2$ donc $a^2=1$, c'est-à-dire $a=\pm1$.
En soustrayant L_1 à L_3, on trouve $2b^2=50$ donc $b^2=25$, c'est-à-dire $b=\pm5$.
D'après L_2, a et b sont de signes différents donc les deux racines carrés de $-24-10i$ sont : $1-5i$ et $-1+5i$.
L'équation du second degré a pour racine :

$$X_1=\frac{-(1+3i)-(1-5i)}{2\times\frac{1}{2}}=-2-2i$$

Et

$$X_2=\frac{-(1+3i)+(1-5i)}{2\times\frac{1}{2}}=-2i$$

Les six racines de

$$\frac{1}{2}Z^6+(1+3i)Z^3+8+8i=0$$

Sont les six complexes trouvés en 1°) et 2°).

Allez à : Exercice 12 :

Correction exercice 13 :

1. Posons $z=a\in\mathbb{R}$, $(E)\Leftrightarrow a^3+1-i(a+1)=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}a^3+1=0\\ a+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow a=-1$
2. On peut diviser $z^3-iz+1-i=0$ par $z+1$

$$\begin{array}{c|l} z^3-iz+1-i & z+1\\ \cline{2-2} z^3+z^2 & z^2-z+1-i\\ \hline -z^2-iz+1-i & \\ -z^2-z & \\ \hline (1-i)z+1-i & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|}
(1-i)z+1-i \\
\hline
0
\end{array}$$

$z^2-z+1-i$ a pour discriminant $\Delta = 1-4(1-i) = -3+4i = 1+4i-4 = (1+2i)^2$

Les racines de ce polynôme sont :

$z_1 = \frac{1-(1+2i)}{2} = -i$ et $z_2 = \frac{1+(1+2i)}{2} = 1+i$

Les solutions de (E) sont -1, $1+i$ et $-i$.

Allez à : Exercice 13 :

Correction exercice 14 :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ une racine de (E)

$$x^4-(3+\sqrt{3})x^3+(2+3\sqrt{3}-i)x^2+(-2\sqrt{3}+3i)x-2i = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4-(3+\sqrt{3})x^3+(2+3\sqrt{3})x^2-2\sqrt{3}x+i(-x^2+3x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4-(3+\sqrt{3})x^3+(2+3\sqrt{3})x^2-2\sqrt{3}x = 0 \quad (*) \\ -x^2+3x-2 = 0 \end{cases}$$

Les racines de $-x^2+3x-2=0$ sont après un petit calcul $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$

$$1^4-(3+\sqrt{3})1^3+(2+3\sqrt{3})1^2-2\sqrt{3}\times 1 = 1-3-\sqrt{3}+2+3\sqrt{3}-2\sqrt{3} = 0$$

Donc 1 est racine de $(*)$

$$2^4-(3+\sqrt{3})2^3+(2+3\sqrt{3})2^2-2\sqrt{3}\times 2 = 16-3\times 8-8\sqrt{3}+8+12\sqrt{3}-4\sqrt{3} = 0$$

Donc 2 est racine de $(*)$

2. On peut diviser le polynôme par $(X-1)(X-2) = X^2-3X+2$

$$\begin{array}{llll|l}
X^4 & -(3+\sqrt{3})X^3 & +(2+3\sqrt{3}-i)X^2 & +(-2\sqrt{3}+3i)X-2i & X^2-3X+2 \\
\cline{5-5}
X^4 & -3X^3 & +2X^2 & & X^2-\sqrt{3}X-i \\
\cline{1-4}
 & -\sqrt{3}X^3 & +(3\sqrt{3}-i)X^2 & +(-2\sqrt{3}+3i)X-2i & \\
 & -\sqrt{3}X^3 & +3\sqrt{3}X^2 & -2\sqrt{3}X & \\
\cline{1-4}
 & & -iX^2 & +3iX-2i & \\
 & & -iX^2 & +3iX-2i & \\
\cline{1-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Il reste à déterminer les racines de $X^2-\sqrt{3}X-i = 0$

$$\Delta = 3+4i = (2+i)^2$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}+2+i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{1}{2}i = 1-i\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{i}{2}$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{3}-2-i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}-1-\frac{1}{2}i = -1+i\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}-1-\frac{i}{2}$$

$$S = \left\{1,2,\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{i}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}-1-\frac{i}{2}\right\}$$

Allez à : Exercice 14 :

Correction exercice 15 :

1.

$$z^2 = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 = 2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})+2i\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$= 2\sqrt{3}+2i\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2\sqrt{3}+2i\sqrt{2^2-3} = 2\sqrt{3}+2i$$

$$|z^2| = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{4 \times 3 + 4} = \sqrt{16} = 4$$

Si on pose $\theta = \arg(z^2)$, $\cos(\theta) = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ donc $\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Autre méthode :

$z^2 = 2\sqrt{3} + 2i = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$, donc $\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$.

2.

On déduit de la première question que $|z^2| = 4$ donc $|z|^2 = 4$ et que $|z| = 2$. Et que les arguments possible de z sont $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) = \frac{\pi}{12} + k\pi$, $k \in \{0,1\}$, donc $z = 2e^{\frac{i\pi}{12}}$ ou $z = -2e^{\frac{i\pi}{12}}$. Mais $z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$ entraine que le cosinus et le sinus de ses arguments sont positifs, donc $z = 2e^{\frac{i\pi}{12}}$.

3. D'après la question précédente

$$2e^{\frac{i\pi}{12}} = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \end{cases}$$

Allez à : Exercice 15 :

Correction exercice 16 :

1.

$$u^4 = -4 \Leftrightarrow \begin{cases} |u^4| = |-4| \\ \arg(u^4) = \arg(-4) + 2k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |u|^4 = 4 \\ 4\arg(u) = \pi + 2k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |u| = 4^{\frac{1}{4}} = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \\ \arg(u) = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \ \ k \in \{0,1,2,3\} \end{cases}$$

Il y a quatre solutions

$$u_0 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i$$

$$u_1 = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + i$$

$$u_2 = \sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = -1 - i = \overline{u_1}$$

$$u_3 = \sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - i = \overline{u_0}$$

2.

$$(z+1)^4 + 4(z-1)^4 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^4 = -4(z-1)^4 \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^4 = -4$$

On pose $u = \frac{z+1}{z-1}$, il y a donc 4 solutions que l'on trouve en exprimant z en fonction de u.

$$u = \frac{z+1}{z-1} \Leftrightarrow u(z-1) = z+1 \Leftrightarrow zu - u = z + 1 \Leftrightarrow zu - z = u + 1 \Leftrightarrow z(u-1) = u+1 \Leftrightarrow z = \frac{u+1}{u-1}$$

$$z_0 = \frac{u_0+1}{u_0-1} = \frac{1+i+1}{1+i-1} = \frac{2+i}{i} = 1 - 2i$$

$$z_1=\frac{u_1+1}{u_1-1}=\frac{-1+i+1}{-1+i-1}=\frac{i}{-2+i}=\frac{i(-2-i)}{(-2)^2+1^2}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$$
$$z_2=\frac{u_2+1}{u_2-1}=\frac{\overline{u_1}+1}{\overline{u_1}-1}=\overline{z_1}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$$
$$z_3=\frac{u_3+1}{u_3-1}=\frac{\overline{u_0}+1}{\overline{u_0}-1}=\overline{z_0}=1+2i$$

Allez à : Exercice 16 :

Correction exercice 17 :

1.

$$X^3=-2\sqrt{2}\Leftrightarrow\begin{cases}|X^3|=2\sqrt{2}\\ \arg(X^3)=\arg\left(-2\sqrt{2}\right)+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|X|^3=\left(\sqrt{2}\right)^2\\ 3\arg(X)=\pi+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}|X|=\sqrt{2}\\ \arg(X)=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3},\ \ k\in\{0,1,2\}\end{cases}$$

Les trois solutions sont

$$X_k=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{(2k+1)\pi}{3}},\ \ k\in\{0,1,2\}$$

Soit

$$X_0=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{3}}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$$
$$X_1=\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{3}}=-\sqrt{2}$$
$$X_2=\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{3}}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

2.

$$(z+i)^3+2\sqrt{2}(z-i)^3=0\Leftrightarrow(z+i)^3=-2\sqrt{2}(z-i)^3\Leftrightarrow\frac{(z+i)^3}{(z-i)^3}=-2\sqrt{2}\Leftrightarrow\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3=-2\sqrt{2}$$

On pose

$$X=\frac{z+i}{z-i}$$

Il faut trouver z en fonction de X

$$X=\frac{z+i}{z-i}\Leftrightarrow X(z-i)=z+i\Leftrightarrow Xz-iX=z+i\Leftrightarrow Xz-z=iX+i\Leftrightarrow z(X-1)=i(X+1)\Leftrightarrow z=i\frac{X+1}{X-1}$$

Il y a donc trois solutions

$$z_0=i\frac{X_0+1}{X_0-1}=i\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}+1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}-1}=i\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1+i\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}-1+i\frac{\sqrt{6}}{2}}=i\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1-i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}$$
$$=i\frac{\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(1+\frac{i\sqrt{6}}{2}\right)^2\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=i\frac{\left(\frac{1}{2}-\left(1-\frac{6}{4}+i\sqrt{6}\right)\right)}{\frac{1}{2}-\sqrt{2}+1+\frac{6}{4}}=i\frac{1-i\sqrt{6}}{3-\sqrt{2}}$$
$$=-\frac{\sqrt{6}}{3-\sqrt{2}}+i\frac{1}{3-\sqrt{2}}$$

$$z_1 = i\frac{X_1+1}{X_1-1} = i\frac{-\sqrt{2}+1}{-\sqrt{2}-1} = i\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = i\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = i(\sqrt{2}-1)^2 = i(2-2\sqrt{2}+1)$$
$$= i(3-2\sqrt{2})$$
$$z_2 = i\frac{X_2+1}{X_2-1} = i\frac{\overline{X_0}+1}{\overline{X_0}-1} = i\overline{\left(\frac{X_0+1}{X_0-1}\right)} = -\overline{\left(i\left(\frac{X_0+1}{X_0-1}\right)\right)} = -\overline{z_0} = - -\frac{\sqrt{6}}{3-\sqrt{2}} - i\frac{1}{3-\sqrt{2}}$$

Allez à : Exercice 17 :

Correction exercice 18 :

1. Les racines quatrième de l'unité sont $\{1, i, -1, -i\}$.
2. $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$ donc

$$X^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow X^4 = e^{\frac{4i\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} |X^4| = \left|e^{\frac{4i\pi}{3}}\right| \\ \arg(X^4) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X|^4 = 1 \\ 4\arg(X) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 1 \\ \arg(X) = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \{0,1,2,3\} \end{cases} \Leftrightarrow X_k = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\right)}, k \in \{0,1,2,3\}$$

Il y a quatre solutions :

$$X_0 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$X_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{\frac{5i\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$
$$X_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$X_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right)} = e^{\frac{11i\pi}{6}} = e^{-\frac{i\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

Autre solution

$-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = j^2$. Donc $X^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = j^2 \Leftrightarrow X^4 - j^2 = 0$. Or

$$X^4 - j^2 = (X^2 - j)(X^2 + j) = (X^2 - j^4)(X^2 - i^2 j^4) = (X - j^2)(X + j^2)(X - ij^2)(X + ij^2)$$

D'où les solutions :

$X = j^2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $X = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $X = i\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ et $X = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

3. On pose $Y = X^4$, l'équation est alors du second degré.

$$Y^2 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Y - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

Le discriminant est

$$\Delta = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 + 2i\sqrt{3} = \frac{3}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2} = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= 3e^{\frac{i\pi}{3}}$$

Donc les solutions de $\delta^2 = \Delta$ sont

$$\delta = \sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \delta = -\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}} = -\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

L'équation du second degré a alors deux solutions :

$$Y_1=\frac{-\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Et

$$Y_2=\frac{-\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=1$$

L'équation du huitième degré a pour solution :

$$\left\{1,\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},i,-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},-i,\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right\}$$

Autre solution

$$Y^2+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Y-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=0\Leftrightarrow Y^2+jY+j^2=0\Leftrightarrow\left(\frac{Y}{j}\right)^2+\frac{Y}{j}+1=0$$

Les solutions de $T^2+T+1=0$ sont $T_1=j$ et $T_2=j^2$

Donc $\frac{Y_1}{j}=j\Leftrightarrow Y_1=j^2$ et $\frac{Y_2}{j}=j^2\Leftrightarrow Y_2=j^3=1$

Et on termine de la même façon.

Allez à : Exercice 18 :

Correction exercice 19 :

On pose $Z=\frac{2z+1}{z-1}$, les solutions de $Z^4=1$ sont $1,i,-1$ et $-i$ (ce sont les racines quatrième de l'unité)

$$Z=\frac{2z+1}{z-1}\Leftrightarrow(z-1)Z=2z+1\Leftrightarrow zZ-Z=2z+1\Leftrightarrow zZ-2z=Z+1\Leftrightarrow z(Z-2)=Z+1$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{Z+1}{Z-2}$$

Il y a 4 solutions

$$z_0=\frac{1+1}{1-2}=-2$$
$$z_1=\frac{i+1}{i-2}=\frac{(i+1)(-i-2)}{1^2+(-2)^2}=\frac{1-2i-i-2}{5}=-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$$
$$z_2=\frac{-1+1}{-1-2}=0$$
$$z_3=\frac{-i+1}{-i-2}=\frac{(-i+1)(i-2)}{(-2)^2+(-1)^2}=\frac{1+2i+i-2}{5}=-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$$

Allez à : Exercice 19 :

Correction exercice 20 :

Il faut d'abord écrire $\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}$ sous forme trigonométrique

$$\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\sqrt{2}\right)}{2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\sqrt{2}\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}}=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Première méthode

$$z^4=\left(\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^4 \Leftrightarrow z^4=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^4=4e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z^4|=\left|4e^{i\frac{\pi}{3}}\right| \\ \arg(z^4)=\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}|z|^4=4 \\ 4\arg(z)=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|z|=\sqrt{2}\\ \arg(z)=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}, k\in\{0,1,2,3\}\end{cases}$$

Il y a quatre solutions

$$z_0=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}; z_1=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right)}=\sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{12}}; z_2=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right)}=\sqrt{2}e^{\frac{13i\pi}{12}}; z_3=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{3\pi}{2}\right)}=\sqrt{2}e^{\frac{19i\pi}{12}}$$

Deuxième méthode

On pose $a=\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}=\frac{(1-i)(1+i\sqrt{3})}{1^2+(-\sqrt{3})^2}=\frac{1+i\sqrt{3}-i+\sqrt{3}}{4}=\frac{1+\sqrt{3}}{4}+i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

$$z^4=\left(\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^4 \Leftrightarrow z^4=a^4 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{a}\right)^4=1 \Leftrightarrow \frac{z}{a}\in\{1,i,-1,-i\} \Leftrightarrow z\in\{a,ia,-a,-ia\}$$

$$ia=i\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}+i\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}-1}{4}+i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

$$-a=-\frac{1+\sqrt{3}}{4}-i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

$$-ia=\frac{\sqrt{3}-1}{4}-i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

Remarque :

En réunissant ces deux méthodes on pourrait en déduire les valeurs de $e^{i\left(\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}\right)}, k\in\{0,1,2,3\}$.

Allez à : Exercice 20 :

Correction exercice 21 :

1.

$$u^2=4\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=4e^{\frac{2i\pi}{3}} \Leftrightarrow u=\pm 2e^{\frac{i\pi}{3}}=\pm 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pm\left(1+i\sqrt{3}\right)$$

2. On pose $u=\frac{z+i}{z-i}$

$$u=\frac{z+i}{z-i} \Leftrightarrow u(z-i)=z+i \Leftrightarrow uz-iu=z+i \Leftrightarrow uz-z=iu+i \Leftrightarrow z(u-1)=i(u+1) \Leftrightarrow z=i\frac{u+1}{u-1}$$

Il y a deux solutions

$$z_1=i\frac{1+i\sqrt{3}+1}{1+i\sqrt{3}-1}=i\frac{2+i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}+i$$

$$z_2=i\frac{-1-i\sqrt{3}+1}{-1-i\sqrt{3}-1}=i\frac{-i\sqrt{3}}{-2-i\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}(2-i\sqrt{3})}{2^2+(\sqrt{3})^2}=-\frac{2\sqrt{3}}{7}+\frac{3}{7}i$$

Allez à : Correction exercice 21 :

Correction exercice 22 :

On pose $u=\frac{z-1}{z-i}$ et on cherche les solutions de $u^3=-8$

$$u^3=-8 \Leftrightarrow \begin{cases}|u^3|=|-8| \\ \arg(u^3)=\arg(-8)+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|u|^3=8 \\ 3\arg(u)=\pi+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}|u|=2 \\ \arg(u)=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3},\ \ k\in\{0,1,2\}\end{cases}$$

Il y a 3 solutions

$$u_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3};\quad u_1 = 2e^{i\pi} = -2 \quad \text{et} \quad u_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}$$

$$u = \frac{z-1}{z-i} \Leftrightarrow u(z-i) = z-1 \Leftrightarrow uz - iu = z-1 \Leftrightarrow uz - z = -1 + iu \Leftrightarrow z(u-1) = -1 + iu \Leftrightarrow z = \frac{-1+iu}{u-1}$$

$$z_0 = \frac{-1+iu_0}{u_0-1} = \frac{-1+i(1+i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}-1} = \frac{-1-\sqrt{3}+i}{i\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} + i\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$z_1 = \frac{-1+iu_1}{u_1-1} = \frac{-1-2i}{-3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$$

$$z_2 = \frac{1+iu_2}{u_2-1} = \frac{-1+i(1-i\sqrt{3})}{1-i\sqrt{3}-1} = \frac{-1+\sqrt{3}+i}{-i\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} + i\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

Allez à : Exercice 22 :

Correction exercice 23 :

$$z^3 = \frac{1}{4}(-1+i) \Leftrightarrow z^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow z^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} |z^3| = \left|\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^3}e^{\frac{3i\pi}{4}}\right| \\ \arg(z^3) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} |z|^3 = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^3} \\ 3\arg(z) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} |z| = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \arg(z) = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \{0,1,2\}\end{array}\right.$$

Il y a trois solutions $z_k = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)},\ k \in \{0,1,2\}$

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}};\ z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{11i\pi}{12}};\ z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{19i\pi}{12}}$$

$$(z_k)^4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)}\right)^4 = \frac{1}{4}e^{i\left(\pi+\frac{8k\pi}{3}\right)} = \frac{1}{4}e^{i\frac{(8k+3)\pi}{3}}$$

$$(z_0)^4 = \frac{1}{4}e^{i\pi} = -\frac{1}{4} \in \mathbb{R};\ (z_1)^4 = \frac{1}{4}e^{i\frac{11\pi}{3}} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{3}} \notin \mathbb{R};\ (z_2)^4 = \frac{1}{4}e^{i\frac{19\pi}{3}} = \frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{3}} = \notin \mathbb{R}$$

Il n'y a que z_0 dont la puissance quatrième est dans $\mathbb{R}$.

Allez à : Exercice 23 :

Correction exercice 24 :

1. Les racines quatrième de l'unité sont $\{1, i, -1, -i\}$.
2. $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$ donc

3.

$$X^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow X^4 = e^{\frac{4i\pi}{3}} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} |X^4| = \left|e^{\frac{4i\pi}{3}}\right| \\ \arg(X^4) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} |X|^4 = 1 \\ 4\arg(X) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} |X| = 1 \\ \arg(X) = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \{0,1,2,3\}\end{array}\right. \Leftrightarrow X_k = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\right)}, k \in \{0,1,2,3\}$$

Il y a quatre solutions :

$$X_0 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$X_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{\frac{5i\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$
$$X_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$X_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right)} = e^{\frac{11i\pi}{6}} = e^{-\frac{i\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

Autre solution

$$-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = j^2. \text{ Donc } X^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = j^2 \Leftrightarrow X^4 - j^2 = 0. \text{ Or}$$
$$X^4 - j^2 = (X^2 - j)(X^2 + j) = (X^2 - j^4)(X^2 - i^2 j^4) = (X - j^2)(X + j^2)(X - ij^2)(X + ij^2)$$

D'où les solutions :

$$X = j^2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, X = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, X = i\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \text{ et } X = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

On pose $Y = X^4$, l'équation est alors du second degré.

$$Y^2 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Y - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

Le discriminant est

$$\Delta = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 + 2i\sqrt{3} = \frac{3}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2} = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3e^{\frac{i\pi}{3}}$$

Donc les solutions de $\delta^2 = \Delta$ sont $\delta = \sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\delta = -\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}} = -(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$

L'équation du second degré a alors deux solutions :

$$Y_1 = \frac{-\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Et

$$Y_2 = \frac{-\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 1$$

L'équation du huitième degré a pour solution :

$$\left\{1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, -i, \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right\}$$

Autre solution

$$Y^2 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Y - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Leftrightarrow Y^2 + jY + j^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{Y}{j}\right)^2 + \frac{Y}{j} + 1 = 0$$

Les solutions de $T^2 + T + 1 = 0$ sont $T_1 = j$ et $T_2 = j^2$

Donc $\frac{Y_1}{j} = j \Leftrightarrow Y_1 = j^2$ et $\frac{Y_2}{j} = j^2 \Leftrightarrow Y_2 = j^3 = 1$

Et on termine de la même façon.

Allez à : Exercice 24 :

Correction exercice 25 :

On cherche les complexes z tels que $z^4 = 81$

$$z^4 = 81 \Leftrightarrow z^4 - 9^2 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 9)(z^2 + 9) = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 3^2)(z^2 - (3i)^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow (z - 3)(z + 3)(z - 3i)(z + 3i) = 0$$

Il y a 4 racines quatrième de 81 : $3, -3, 3i$ et $-3\mathrm{i}$

La même méthode ne marche pas pour les racines quatrième de -81.

$$z^4 = -81 \Leftrightarrow \begin{cases} |z^4| = |-81| \\ \arg(z^4) = \arg(-81) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^4 = 81 = 3^4 \\ 4\arg(z) = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 3 \\ \arg(z) = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \{0,1,2,3\} \end{cases}$$

Il y a 4 racines quatrième de -81 : $z_k = 3e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)},\ k \in \{0,1,2,3\}$

$$z_0 = 3e^{i\frac{\pi}{4}} = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}(1+i)$$

$$z_1 = 3e^{i\frac{3\pi}{4}} = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}(-1+i)$$

$$z_2 = 3e^{i\frac{5\pi}{4}} = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3\sqrt{2}(1+i)$$

$$z_3 = 3e^{i\frac{7\pi}{4}} = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}(1-i)$$

Allez à : Exercice 25 :

Correction exercice 26 :

Il faut mettre $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ sous sa forme trigonométrique.

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \frac{2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Autre méthode

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^2}{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1+2i\sqrt{3}-3}{4} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

$$z^6 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \Leftrightarrow z^6 = e^{\frac{2i\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z^6| = 1 \\ \arg(z^6) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^6 = 1 \\ 6\arg(z) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\} \end{cases}$$

Les solutions sont

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)}, k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

$$z^4 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2^{-\frac{1}{2}}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = 2^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{7i\pi}{12}}$$

$$z^4=2^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{7i\pi}{12}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z^4|=2^{-\frac{1}{2}} \\ \arg(z^4)=-\frac{7\pi}{12}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^4=2^{-\frac{1}{2}} \\ 4\arg(z)=-\frac{7\pi}{12}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|=\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}=2^{-\frac{1}{8}} \\ \arg(z)=-\frac{7\pi}{48}+\frac{k\pi}{2}, k\in\{0,1,2,3\} \end{cases}$$

Il y a 4 solutions

$$z_k=2^{-\frac{1}{8}}e^{i\left(-\frac{7\pi}{48}+\frac{k\pi}{2}\right)}, k\in\{0,1,2,3\}$$

$$z^6+27=0 \Leftrightarrow z^6=-27 \Leftrightarrow \begin{cases} |z^6|=|-27| \\ \arg(z^6)=\arg(-27)+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^6=27=3^3 \\ 6\arg(z)=\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|=(3^3)^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3} \\ \arg(z)=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}, k\in\{0,1,2,3,4,5\} \end{cases}$$

Il y a 6 solutions

$$z_k=\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right)}, k\in\{0,1,2,3,4,5\}$$

$$z_0=\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}}=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_1=\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{2}}=i\sqrt{3}$$

$$z_2=\sqrt{3}e^{\frac{5i\pi}{6}}=\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_3=\sqrt{3}e^{\frac{7i\pi}{6}}=\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_4=\sqrt{3}e^{\frac{3i\pi}{2}}=-i\sqrt{3}$$

$$z_5=\sqrt{3}e^{\frac{11i\pi}{6}}=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$27(z-1)^6+(z+1)^6=0 \Leftrightarrow (z+1)^6=-27(z-1)^6 \Leftrightarrow \frac{(z+1)^6}{(z-1)^6}=-27 \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^6=-27$$

On pose $Z=\frac{z+1}{z-1}$

$$Z^6=-27 \Leftrightarrow \begin{cases} |Z^6|=|-27| \\ \arg(Z^6)=\arg(-27)+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |Z|^6=27=3^3 \\ 6\arg(Z)=\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |Z|=(3^3)^{\frac{1}{6}}=\sqrt{3} \\ \arg(Z)=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}, k\in\{0,1,2,3,4,5\} \end{cases}$$

Il y a 6 solutions

$$Z_k=\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right)}, k\in\{0,1,2,3,4,5\}$$

Il faut alors trouver z en fonction de Z,

$$Z=\frac{z+1}{z-1} \Leftrightarrow Z(z-1)=z+1 \Leftrightarrow Zz-Z=z+1 \Leftrightarrow Zz-z=Z+1 \Leftrightarrow z(Z-1)=Z+1 \Leftrightarrow z=\frac{Z+1}{Z-1}$$

Il y a 6 solutions

$$z_k=\frac{Z_k+1}{Z_k-1}=\frac{(Z_k+1)(\overline{Z_k}-1)}{(Z_k-1)(\overline{Z_k}-1)}=\frac{Z_k\overline{Z_k}-Z_k+\overline{Z_k}-1}{Z_k\overline{Z_k}-Z_k-\overline{Z_k}+1}=\frac{|Z_k|^2-(Z_k-\overline{Z_k})-1}{|Z_k|^2-(Z_k+\overline{Z_k})+1}$$

$$=\frac{|Z_k|^2-2i\mathcal{Im}(Z_k)-1}{|Z_k|^2-2\mathcal{Re}(Z_k)+1}=\frac{3-2i\mathcal{Im}(Z_k)-1}{3-2\mathcal{Re}(Z_k)+1}=\frac{2-2i\mathcal{Im}(Z_k)}{4-2\mathcal{Re}(Z_k)}=\frac{1-i\mathcal{Im}(Z_k)}{2-\mathcal{Re}(Z_k)}$$

$$Z_0=\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}}=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow z_0=\frac{1-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{3}{2}}=2-i\sqrt{3}$$

$$Z_1=\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{2}}=i\sqrt{3}\Rightarrow z_1=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Z_2=\sqrt{3}e^{\frac{5i\pi}{6}}=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow z_2=\frac{1-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2+\frac{3}{2}}=\frac{2}{7}-i\frac{\sqrt{3}}{7}$$

$$Z_3=\sqrt{3}e^{\frac{7i\pi}{6}}=-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow z_3=\frac{1+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2+\frac{3}{2}}=\frac{2}{7}+i\frac{\sqrt{3}}{7}$$

$$Z_4=\sqrt{3}e^{\frac{3i\pi}{2}}=-i\sqrt{3}\Rightarrow z_4=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Z_5=\sqrt{3}e^{\frac{11i\pi}{6}}=\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow z_0=\frac{1+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{3}{2}}=2+i\sqrt{3}$$

Allez à : Exercice 26 :

Correction exercice 27 :

1. Ce sont les racines cinquièmes de l'unité, il vaut mieux connaitre la formule $z_k=e^{\frac{2ik\pi}{5}}$, $k\in\{0,1,2,3,4\}$

   Sinon il faut absolument retrouver la formule très rapidement

$$z^5=1\Leftrightarrow\begin{cases}|z^5|=|1|\\ \arg(z^5)=\arg(1)+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^5=1\\ 5\arg(z)=0+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=1\\ \arg(z)=\dfrac{2k\pi}{5},k\in\{0,1,2,3,4\}\end{cases}$$

   D'où $z_k=e^{\frac{2ik\pi}{5}}$, $k\in\{0,1,2,3,4\}$, c'est-à-dire

$$z_0=1;z_1=e^{\frac{2i\pi}{5}};z_2=e^{\frac{4i\pi}{5}};z_3=e^{\frac{6i\pi}{5}}=e^{-\frac{4i\pi}{5}}=\overline{z_2};\ z_4=e^{\frac{8i\pi}{5}}=e^{-\frac{2i\pi}{5}}=\overline{z_1}$$

2.

$$z^5=1-i\Leftrightarrow z^5=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Leftrightarrow z^5=2^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}\Leftrightarrow\begin{cases}|z^5|=2^{\frac{1}{2}}\\ \arg(z^5)=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^5=2^{\frac{1}{2}}\\ 5\arg(z)=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{1}{10}}\\ \arg(z)=\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{2k\pi}{5},k\in\{0,1,2,3,4\}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z_k=2^{\frac{1}{10}}e^{i\left(\frac{\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5}\right)},\qquad k\in\{0,1,2,3,4\}$$

   Il y a cinq solutions

$$z_0=2^{\frac{1}{10}}e^{i\frac{\pi}{20}};z_1=2^{\frac{1}{10}}e^{i\frac{9\pi}{20}};\ z_2=2^{\frac{1}{10}}e^{i\frac{17\pi}{20}};\ z_3=2^{\frac{1}{10}}e^{i\frac{25\pi}{20}}=2^{\frac{1}{10}}e^{i\frac{5\pi}{4}}=-2^{\frac{1}{10}}\times\sqrt{2}(1+i)$$
$$=-2^{\frac{1}{10}+\frac{1}{2}}(1+i)=-2^{\frac{3}{5}}(1+i);\ z_4=2^{\frac{1}{10}}e^{i\frac{32\pi}{20}}=2^{\frac{1}{10}}e^{i\frac{8\pi}{5}}$$

3.

$$z^3=2-2i\Leftrightarrow z^3=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Leftrightarrow z^3=\left(\sqrt{2}\right)^3e^{-i\frac{\pi}{4}}\Leftrightarrow\begin{cases}|z^3|=\left(\sqrt{2}\right)^3\\ \arg(z^3)=-\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^3=\left(\sqrt{2}\right)^3\\ 3\arg(z)=-\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=\sqrt{2}\\ \arg(z)=-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3},k\in\{0,1,2\}\end{cases}$$

Il y a trois solutions $z_k=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)},k\in\{0,1,2\}$

$$z_0=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}};z_1=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)}=\sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{12}};z_2=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)}=\sqrt{2}e^{\frac{15i\pi}{12}}=\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{4}}=-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

4.

$$z^5=\overline{z}\Leftrightarrow\begin{cases}|z^5|=|\overline{z}|\\ \arg(z^5)=\arg(\overline{z})+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^5=|z|\\ 5\arg(z)=-\arg(z)+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}(|z|^4-1)|z|=0\\ 6\arg(z)=2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^4-1=0\ \text{ ou }|z|=0\\ \arg(z)=\frac{k\pi}{3},k\in\{0,1,2,3,4,5\}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\{z=0\text{ ou}\begin{cases}|z|=1\\ \arg(z)=\frac{k\pi}{3},k\in\{0,1,2,3,4,5\}\end{cases}$$

Il y a 6 solutions : $z=0$ et $z_k=e^{i\frac{k\pi}{3}},k\in\{0,1,2,3,4,5\}$

$$z=0;\ z_0=1;\ z_1=e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};\ z_2=e^{i\frac{2\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$z_3=e^{i\pi}=-1;\ z_4=e^{i\frac{4\pi}{3}}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2};\ z_5=e^{i\frac{5\pi}{3}}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Allez à : Exercice 27 :

Correction exercice 28 :

1. $(1+i)^2=1+2i-1=2i\Rightarrow(1+i)^6=((1+i)^2)^3=(2i)^3=8\times i^3=-8i$
2. $z^2=-8i\Leftrightarrow z^2=(1+i)^6\Leftrightarrow z^2=((1+i)^3)^2\Leftrightarrow z=(1+i)^3\ \text{ ou }\ z=-(1+i)^3$
$\Leftrightarrow z=(1+i)^2(1+i)\ \text{ ou }\ z=-(1+i)^2(1+i)\Leftrightarrow z=2i(1+i)\ \text{ ou }\ z=-2i(1+i)$
$\Leftrightarrow z=-2+2i\ \text{ ou }\ z=2-2i$

3.

$$z=-2+2i=2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$$
$$z=2-2i=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{4}}=2\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$$

4.

$$z^3=-8i\Leftrightarrow z^3=((1+i)^2)^3\Leftrightarrow z^3=(2i)^3\Leftrightarrow\left(\frac{z}{2i}\right)^3=1\Leftrightarrow\frac{z}{2i}=1\text{ ou }\frac{z}{2i}=j\ \text{ ou }\ \frac{z}{2i}=j^2$$
$$\Leftrightarrow z=2i\text{ ou }z=2ij\ \text{ ou }z=2ij^2\Leftrightarrow z=2i\text{ ou }z=2i\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ \text{ ou }z=2i\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow z=2i\text{ ou }z=-\sqrt{3}-i\ \text{ ou }z=\sqrt{3}-i$$

Allez à : Exercice 28 :