

**Fascicule d'exercices pour les UE de TMB, TMB-A et TMB-B**

Automne 2023

Pour toute contribution ou modification s'adresser à U. Serres <[ulyse.serres@univ-lyon1.fr](mailto:ulyse.serres@univ-lyon1.fr)>.**Table des matières**

|   |           |
|---|-----------|
| <b>TD 1 – Nombres complexes, polynômes complexes, factorisation de polynômes réels</b>  | <b>2</b>  |
| <b>TD 2 – Fonctions, graphes élémentaires, composées et réciproques</b>   | <b>4</b>  |
| <b>TD 3 – Équations, inéquations et domaines de définition</b>  | <b>5</b>  |
| <b>TD 4 – Dérivées, dérivée des fonctions composées</b>   | <b>6</b>  |
| <b>TD 5 – Extrema locaux et développements limités</b>  | <b>7</b>  |
| <b>TD 6 – Primitives et intégrales : première partie</b>  | <b>9</b>  |
| <b>TD 7 – Primitives et intégrales : deuxième partie</b>  | <b>10</b> |
| <b>TD 8 – Équations différentielles du 1er ordre</b>  | <b>11</b> |
| <b>TD 9 – Équations différentielles du 2ème ordre</b>   | <b>12</b> |
| <b>TD 10 – Espaces vectoriels et vecteurs. Somme et produit par scalaire. Produit scalaire et norme. Produit vectoriel et mixte</b> | <b>14</b> |
| <b>TD 11 – Transformations linéaires et matrices. Isomorphismes et symétries. Systèmes d'équations linéaires</b>                    | <b>15</b> |
| <b>TD 12 – Géométrie cartésienne dans le plan et dans l'espace</b>  | <b>17</b> |

## TD 1 – NOMBRES COMPLEXES

### Exercice 1 – Nombres complexes et plan complexe

Dessiner les nombres complexes suivants sur le plan complexe :

- a)  $-2i$                       b)  $3 + 2i$                       c)  $\overline{3 + 2i}$                       d)  $5i - 1$

### Exercice 2 – Opérations entre nombres complexes

Calculer les sommes, produits, quotients, parties réelles et imaginaires suivants :

- a)  $(3 + 2i) - (5i - 1)$               c)  $(3 + 2i)(5i - 1)$               e)  $\frac{3 + 2i}{5i - 1}$                       g)  $\operatorname{Re}(i(1 - i))$   
b)  $(3 + 2i) + \overline{(3 + 2i)}$               d)  $(3 + 2i)\overline{(3 + 2i)}$               f)  $(3 + 2i)^2$                       h)  $\operatorname{Im}((1 - i)i - 3i)$

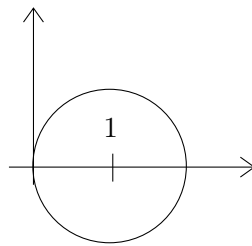
### Exercice 3 – Représentation polaire des nombres complexes

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants, les écrire sous forme polaire et les dessiner sur le plan complexe :

- a)  $-i$                                   b)  $3 + 3i$                                   c)  $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}\right)^2$                                   d)  $\left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^3$

### Exercice 4 – Représentation graphique des nombres complexes

1. Quelle équation vérifient les nombres complexes  $z$  formant le cercle représenté ci-dessous dans le plan cartésien ?



2. Dans le plan cartésien, soit  $a = 3i$  et  $b = 2 - i$  et  $D$  la droite médiatrice du segment  $[ab]$ . Représenter  $a$ ,  $b$  et  $D$ . Quelle équation les nombres complexes  $z$  formant la droite  $D$  satisfont-ils ?
3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes suivants et les représenter dans le plan cartésien :

- a)  $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \leq 1\}$                       c)  $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3i| = |z - 2 + i|\}$   
b)  $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |2z - 4i + 1| = 4\}$

### Exercice 5 – Racines deuxièmes de nombres complexes

Déterminer les racines deuxièmes des nombres complexes suivants et les dessiner sur le plan complexe :

- a)  $9$                                   b)  $-1$                                   c)  $i$                                   d)  $1 + i$                                   e)  $8 - 6i$

### Exercice 6 – Équations complexes

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

- a)  $z^2 + z + 1 = 0$                       c)  $z^3 = -8i$                                   e)  $z^4 + 1 = 0$   
b)  $z^2 + z - 1 = 0$                       d)  $z^4 - z = 0$                                   f)  $27(z - 1)^3 + (z + 1)^3 = 0$

### Exercice 7 – Factorisation de polynômes en produit de polynômes irréductibles

Trouver les racines (réelles et complexes) de chaque polynôme ci-dessous. Le factoriser en produit de polynômes complexes de degré 1 au plus, puis en produit de polynômes réels de degré 2 au plus.

a)  $z^2 - 3z + 2$

c)  $z^2 + 3z + 3$

e)  $z^3 - 3z + 2$

b)  $z^2 + 1$

d)  $z^3 + 1$

f)  $z^3 - 10z^2 + 27z - 18$

**Exercice 8 – Application à la physique**

En électricité, on utilise les nombres complexes pour décrire le comportement des composants du type résistances, condensateurs, bobines etc. La lettre  $i$  étant réservée à l'intensité électrique dans ce contexte, on utilise la lettre  $j$  pour désigner le nombre complexe de coordonnées cartésiennes  $x = 0$  et  $y = 1$ . On donne :  $Z_1 = a$  (résistance) ;  $Z_2 = -j \times b$  (condensateur parfait) ;  $Z_3 = c + j \times b$  (bobine résistive),  $a, b$  et  $c \in \mathbb{R}$ . Trouvez les impédances équivalentes complexes suivantes :

1)  $Z_4 = Z_1 + Z_2$  ; ( $Z_1$  en série avec  $Z_2$ )

2)  $Z_5 = \frac{Z_1 \times Z_2}{Z_1 + Z_2}$  ; ( $Z_1$  en dérivation avec  $Z_2$ )

3)  $Z_6 = Z_1 + \frac{Z_2 \times Z_3}{Z_2 + Z_3}$  ; ( $Z_1$  en série avec  $Z_2$  et  $Z_3$  en dérivation)

Trouvez la partie résistive (partie réelle), qui permet de dissiper de la chaleur par effet joule, ainsi que la partie réactive (inexploitable à l'extérieur du circuit, partie imaginaire) de ces 3 composants :

4)  $R_4 = \text{Re}[Z_4]$  ;  $X_4 = \text{Im}[Z_4]$

5)  $R_5 = \text{Re}[Z_5]$  ;  $X_5 = \text{Im}[Z_5]$

6)  $R_6 = \text{Re}[Z_6]$  ;  $X_6 = \text{Im}[Z_6]$

Trouvez maintenant le déphasage de la tension par rapport au courant, induit par ces trois composants :

7)  $\Phi_1 = \text{Arg}[Z_1]$

8)  $\Phi_2 = \text{Arg}[Z_2]$

9)  $\Phi_3 = \text{Arg}[Z_3]$

Trouvez l'expression polaire (sous forme exponentielle) de  $Z_1$  à  $Z_6$ . Dans le cas particulier où  $a = 2$  et  $b = 1$ , représenter dans le plan cartésien les vecteurs de Fresnel associés  $\vec{OZ}_1$ ,  $\vec{OZ}_2$  et  $\vec{OZ}_4$ . Que remarque-t-on ?

**Exercice 9 – Équations complexes [Facultatif]**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

a)  $z^2 = 7 + 24i$

e)  $z^5 - z = 0$

b)  $z^2 - 4\sqrt{2}z + 6i = 0$

f)  $z^5 + 1 = 0$

c)  $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$

g)  $27(z - 1)^6 + (z + 1)^6 = 0$

d)  $z^3 = -8i$

h)  $z^6 - (3 + 2i)z^3 + 2 + 2i = 0$

**Exercice 10 – Factorisation de polynômes en produit de polynômes irréductibles [Facultatif]**

Trouver les racines (réelles et complexes) du polynôme  $z^4 + 1$ . Le factoriser en produit de polynômes complexes de degré 1 au plus, puis en produit de polynômes réels de degré 2 au plus.

## TD 2 – FONCTIONS ET RÉCIPROQUES

### Exercice 11 – Graphe des fonctions élémentaires

En appliquant des opérations élémentaires aux graphes de fonctions du cours, représenter les fonctions réelles suivantes en précisant le domaine de définition. Indiquer les symétries éventuelles (paire, impaire, périodique), le sens de variation (croissante, décroissante) et la courbure (convexe, concave).

1.  $f(x) = x^3 + 1$

5.  $v(\theta) = \frac{1}{3} \cos(\theta)$

9.  $p(x) = 1 - \sqrt{x}$

2.  $g(x) = \frac{1}{x} + 1$

6.  $u(\theta) = \sin(2\theta)$

10.  $q(x) = \frac{e^{-x+\ln 3}}{2}$

3.  $h(x) = \ln(x - 1)$

7.  $w(\theta) = \sin(\theta/2)$

11.  $r(t) = \frac{2}{t-1}$

4.  $u(\theta) = 2 \sin(\theta)$

8.  $k(x) = \ln(3x)$

12. sur un même graphe :  $y(x) = 2 \ln(-x)$  et  $z(x) = \ln(x^2)$

### Exercice 12 – Fonctions composées

1. Déterminer les fonctions composées suivantes en précisant le domaine de définition :

(a)  $f(g(x))$  et  $g(f(x))$

(b)  $h(q(x))$  et  $q(h(x))$

2. écrire les fonctions  $\frac{1}{x-1}$  et  $\frac{1-x}{x}$  comme composées des fonctions  $f_1(x) = 1/x$  et  $f_2(x) = x - 1$ .

### Exercice 13 – Fonctions réciproques :

Montrer que les fonctions ( $f, g, h, k, p, q, r$ ) de l'exercice 11 sont inversibles. Dans chaque cas, calculer la fonction réciproque en précisant son domaine de définition.

### Exercice 14 – Réciproque de fonctions circulaires

Calculer les valeurs suivantes :

1.  $\arcsin(1/2)$

3.  $\arctan(\sqrt{3}/3)$

5.  $\arcsin(\sin(2\pi/3))$

7.  $\sin(\arcsin(\sqrt{2}/\sqrt{5}))$

2.  $\arcsin(-\sqrt{3}/2)$

4.  $\arctan(-1)$

6.  $\arctan(\tan(9\pi/4))$

8.  $\tan(\arctan 3)$

### Exercice 15 – Échange de variable

La loi des gaz parfaits s'écrit  $PV = nRT$ , où  $P$  désigne la pression,  $V$  le volume,  $n$  la quantité de matière,  $R$  la constante universelle des gaz parfaits et  $T$  la température absolue. suivantes, par rapport à la variable indiquée entre parenthèses :

1. Supposons  $n, T$  fixés. Ecrire la pression comme une fonction du volume, notée  $P(V)$

2. Supposons  $n, P$  fixés. Ecrire la température en fonction du volume.

3. Supposons  $n, T$  fixés. Notons  $W = 1/V$  l'inverse du volume. Ecrire la pression en fonction de  $W$ .

4. Supposons  $n, P$  fixés. Ecrire la température en fonction de l'inverse du volume.

### Exercice 16 – Graphe des fonctions élémentaires [Facultatif]

En appliquant des opérations élémentaires aux graphes de fonctions du cours, représenter les fonctions réelles suivantes en précisant le domaine de définition. Indiquer les symétries éventuelles (paire, impaire, périodique), le sens de variation (croissante, décroissante) et la courbure (convexe, concave).

1.  $f(x) = 2x^2 - 3$

5.  $u(\theta) = 2 \sin \theta - 1$

9.  $F(y) = 2 \arcsin(y)$

2.  $g(y) = \frac{1}{y} + 1$

6.  $y(x) = e^{2x}$

10.  $G(z) = \arctan(z) + 5$

3.  $h(z) = 1 - \sqrt{z}$

7.  $z(u) = \ln(u - 1)$

11.  $H(x) = \ln(3x)$

4.  $\Phi(t) = t^3 + 1$

8.  $p(x) = \frac{2}{x-1}$

12.  $x(t) = \cos(2t)$

## TD 3 – ÉQUATIONS, INÉQUATIONS ET DOMAINES DE DÉFINITION

### Exercice 17 – Équations et systèmes

Résoudre les équations et les systèmes suivants :

a)  $x(x + 1) = 0$

b)  $x^2 - 3x + 2 = 0$

c)  $3u^2 - 5u - 2 = 0$

d)  $x^2 - 5x + 4 = 0$

e)  $y^2(y^2 - 4) = 0$

f)  $\frac{1}{2t} - 1 = t$

g)  $2\sqrt{x} = x + 1$

h)  $e^{4-3x^2} = 1$

i)  $e^{2-3u} = 5$

j)  $\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \frac{1}{2}(\ln x + \ln 3)$

k)  $\operatorname{ch} x + 2 \operatorname{sh} x = 1$

l)  $\begin{cases} x(y+1) = 0 \\ y^2(x^2-4) = 0 \end{cases}$

m)  $\begin{cases} (x-1)(y^2-1) = 0 \\ xy(x-y) = 0 \end{cases}$

n)  $\begin{cases} x+y = 55 \\ \ln x + \ln y = \ln 700 \end{cases}$

o)  $\begin{cases} \operatorname{ch} x - 5 \operatorname{ch} y = -1 \\ \operatorname{sh} x - 5 \operatorname{sh} y = 5 \end{cases}$

### Exercice 18 – Inéquations

Résoudre les inéquations suivantes :

a)  $u^2 > 4$

b)  $-x^2 + 3x - 2 \geq 0$

c)  $x(x-2)(x^2-1) < 0$

d)  $\frac{1}{2x} - 1 \geq 0$

e)  $2\sqrt{x} < x + 1$

f)  $\ln u \leq 1$

g)  $\ln(\ln t) \geq 0$

h)  $(3-x) \ln x > 0$

i)  $e^{3x^2} > 1$

### Exercice 19 – Équations et inéquations sur les fonctions circulaires

Résoudre les équations et les inéquations suivantes :

a)  $\cos^2 \theta = 1/4$

b)  $\sin(\pi x) = 0$

c)  $\sin(2t) = \cos^2 t$

d)  $\arcsin x = \frac{-\pi}{3}$

e)  $\arcsin x = \frac{2\pi}{3}$

f)  $\arctan y = \frac{2\pi}{3}$

g)  $\arccos x + \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{4}$

h)  $\sin(2y) < 0$

i)  $\cos^2 \theta \geq 1/4$

j)  $\arcsin x \geq 1/2$

k)  $x \arctan x \leq 0$

### Exercice 20 – Domaine de définition de fonctions

Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes :

a)  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2x + 1}$

b)  $g(y) = \sqrt{y^3 - 8} + \sqrt{y^3 + 8}$

c)  $h(z) = \ln(z + 5)$

d)  $\Phi(t) = \ln \sqrt{t^2 - 4}$

e)  $u(\theta) = \frac{1}{\sin \theta}$

f)  $y(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

g)  $z(u) = \ln(\tan u)$

h)  $p(x) = \sqrt{1 - x^2}$

i)  $F(z) = \arcsin \frac{z}{1+z^2}$

j)  $G(y) = \ln(1 - Ay^2)$ ,  $A > 0$

k)  $H(x) = \arctan(x) + B$ ,  $B \in \mathbb{R}$

l)  $x(t) = \sqrt{C \cos t}$ ,  $C \leq 0$

## TD 4 – DÉRIVÉES

### Exercice 21 – Dérivées avec la règle de Leibniz

Calculer la dérivée des fonctions suivantes, en utilisant la règle de Leibniz pour les produits :

a)  $f(x) = x^2 e^x$

c)  $g(u) = u^2 \ln(u) e^u$

e)  $h(z) = z^2 \arcsin(z)$

b)  $g(x) = \sin x \cos x$

d)  $h(x) = x \sin x + \cos x$

f)  $h(u) = \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u$

### Exercice 22 – Dérivées avec la règle de la chaîne

Calculer la dérivée des fonctions suivantes, en utilisant la règle de la chaîne pour les fonctions composées :

a)  $f(x) = (x^2 + 3x - 1)^5$

c)  $g(x) = e^{x^3 + 2x + 1}$

e)  $h(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

b)  $f(y) = \frac{1}{(y^3 + 1)^5}$

d)  $g(y) = \ln(2y^2 + 1)$

f)  $h(z) = \arcsin \sqrt{z + 1}$

### Exercice 23 – Dérivées avec toutes les règles

Calculer la dérivée des fonctions suivantes, en utilisant la règle de Leibniz et celle de la chaîne :

a)  $f(z) = \frac{z^2 - 1}{z + 1}$

f)  $g(t) = \frac{\ln t}{t} + \frac{t}{e^t}$

k)  $x(t) = 2t \ln(\sqrt{2t})$

b)  $f(y) = \frac{1}{y^3}$

g)  $f(t) = \sqrt{\sin t}$

l)  $h(y) = \frac{\arctan(y)}{1 + y^2}$

c)  $g(t) = \ln(\ln t)$

h)  $f(u) = \frac{u^4(u - 1)}{u^2 + u^3}$

m)  $f(x) = x^2 \sqrt{1 + x^2}$

d)  $z(y) = \frac{e^{\sin y}}{\cos y}$

i)  $F(u) = u \tan(u^2 + 1)$

n)  $y(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

e)  $g(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$

j)  $g(y) = \frac{\sqrt{1 + y}}{1 + \sqrt{y}}$

o)  $H(\theta) = \arcsin(2\theta^2 - 1)$

p)  $h(t) = \left(\frac{1}{1 - \sqrt{1 - t^2}}\right)^2$

### Exercice 24 – Dérivées [Facultatif]

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a)  $g(u) = \frac{1}{\ln(u)}$

d)  $f(t) = \frac{t - 1}{t^2 + 1}$

g)  $h(y) = \frac{\sin(y)}{y^3}$

b)  $f(z) = \sqrt{z^2 - 3z + 1}$

e)  $h(y) = \arctan(y^2 + y)$

h)  $g(z) = \ln\left(\frac{2z}{z^2 + 1}\right)$

c)  $g(x) = 2x\sqrt{x}$

f)  $G(v) = v \arccos v + \sqrt{1 - v^2}$

i)  $h(z) = \frac{z}{z - \sqrt{1 + z^2}}$

## TD 5 – EXTREMA LOCAUX ET DEVELOPPEMENTS LIMITÉS

### Exercice 25 – Extrema locaux

Déterminer les extrema locaux (minimums et maximums), s'il y en a, des fonctions (dérivables) ci-dessous.

*Indication* : étapes que l'on peut suivre, si on souhaite, pour chaque fonction  $f$

- Déterminer si la fonction est paire, impaire, périodique ou n'a aucune de ces propriétés et réduire l'intervalle d'étude le cas échéant.
- Identifier le domaine de définition de la fonction.
- Quand cela est possible sans calcul, déterminer directement le sens de variation de  $f$ .
- Sinon et si cela est possible, calculer la dérivée  $f'(x)$  puis trouver les points critiques ( $f'(x) = 0$ ).
- Trouver le signe de  $f'(x)$  et dresser le tableau de variations en indiquant où la fonction est croissante (en résolvant l'inégalité  $f'(x) \geq 0$ ) et où elle est décroissante (en étudiant  $f'(x) \leq 0$ ).
- Parmi les points critiques, trouver ceux qui sont des extrema locaux (minimums et maximums) et calculer la valeur correspondante de  $f$ .

a)  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$

c)  $f(x) = \frac{1}{3 + x^2}$

e)  $f(x) = \ln(1 - x^2)$

b)  $f(x) = x^4 + 2x^3$

d)  $f(x) = \sqrt{x} \ln x$

f)  $f(x) = \sin(x^2)$ .

*Indication* : pour la question f), on pourra tracer sommairement le graphe de la fonction  $g(X) = \sin(X)$  et s'en aider pour trouver les extrema locaux de  $f$

### Exercice 26 – Points d'inflexion, convexité et concavité

Déterminer les points d'inflexion, s'il y en a, des fonctions de l'exercice 25.

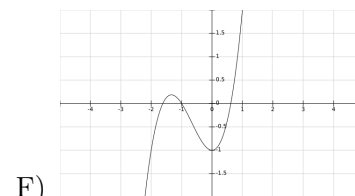
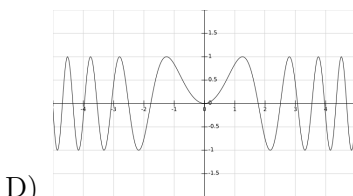
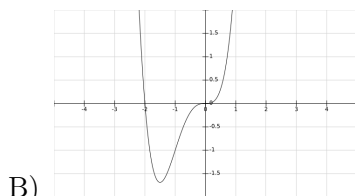
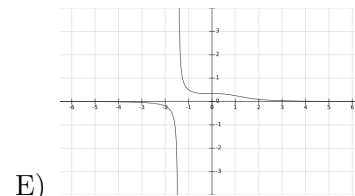
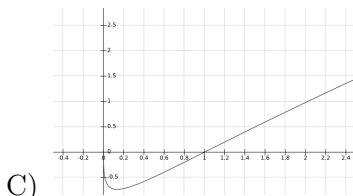
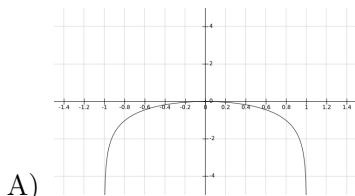
*Indication* : étapes pouvant être suivies pour chaque fonction  $f$

- Calculer la dérivée seconde  $f''(x)$  et trouver les points où  $f''(x) = 0$ .
- Parmi ceux-ci, trouver les points d'inflexion, c'est-à-dire les points où  $f''(x)$  change de signe (et non ceux où  $f'(x)$  change de signe).

*Remarque* : On peut profiter de ces calculs pour vérifier la nature des points critiques : en un minimum local la fonction est convexe (notamment si  $f''(x) > 0$ ), en un maximum local la fonction est concave (ce qui est vrai quand  $f''(x) < 0$ ).

### Exercice 27 – Graphes de fonctions

Cinq des graphes suivants représentent des fonctions de l'exercice 25. Les identifier. Quelle pourrait être la fonction représentée par le dernier graphe ?



### Exercice 28 – Développement limité

Calculer

$$(1 - x)(1 + x + x^2).$$

En déduire le développement limité à l'ordre 2 de la fonction  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  au point  $x_0 = 0$ .

### Exercice 29 – Développement limités

Etablir le développement limité des fonctions suivantes à l'ordre 2, aux points indiqués :

a)  $f(x) = \frac{1}{1+x}$   $x_0 = 0$  et  $x_0 = 1$

b)  $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$   $x_0 = 0$  et  $x_0 = 1$

c)  $f(x) = \ln(1+2x)$   $x_0 = 0$  et  $x_0 = 1$

d)  $f(x) = e^{-x}$   $x_0 = 0$  et  $x_0 = 1$

e)  $f(x) = \sin(3x)$   $x_0 = 0$  et  $x_0 = \pi/2$

f)  $f(x) = \cos^2 x$   $x_0 = 0$  et  $x_0 = \pi/2$

*Indication* : Pour la question f), on peut commencer par linéariser  $\cos^2(x)$ .

**Exercice 30 – Valeurs approchées**

A l'aide de l'exercice précédent, calculer les valeurs approchées suivantes, à la précision demandée :

a)  $\frac{1}{1+10^{-2}}$ , avec 4 chiffres exacts après la virgule

b)  $e^{-1/10}$ , avec 2 chiffres exacts après la virgule

c)  $\ln(1+2/100)$ , avec 5 chiffres après la virgule

d)  $\cos^2(10^{-3})$ , avec 8 chiffres après la virgule

**Exercice 31 Application à la physique**

Pour un gaz parfait diatomique à  $N$  molécules, le nombre de molécules se trouvant dans le niveau de rotation  $j$  est donné par

$$n(j) = N\beta(2j + 1)e^{-\beta j(j+1)},$$

où  $\beta$  est un facteur dépendant de la température du gaz. Quel niveau de rotation contient-il le plus de molécules? *Remarque* : On prendra soin de noter que  $j, n(j)$  et  $N$  sont des entiers.

## TD 6 – PRIMITIVES ET INTÉGRALES : PREMIÈRE PARTIE

### Exercice 32 – Primitives élémentaires

Connaissant une liste de dérivées de fonctions usuelles, calculer les intégrales ou primitives suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_0^1 (x^5 + 3x^3 + x^2) dx & \text{d) } \int \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3} \right) dy & \text{g) } \int_{-1/2}^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ \text{b) } \int_{-1}^1 \frac{1}{1+y^2} dy & \text{e) } \int (5e^t + 2e^{-t}) dt & \text{h) } \int \frac{1}{\cosh^2 u} du \\ \text{c) } \int (\sin \theta - \cos \theta) d\theta & \text{f) } \int \left( \frac{1}{\sqrt{u}} + \frac{1}{u\sqrt{u}} \right) du & \text{i) } \int \frac{1}{\sin^2 \theta} d\theta \end{array}$$

### Exercice 33 – Fractions rationnelles très élémentaires

Calculer :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int \frac{1}{2x+1} dx & \text{b) } \int \frac{1}{(x-1)^2} dx & \text{c) } \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx \end{array}$$

### Exercice 34 – Utilisation des formules de dérivation des fonctions composées

En utilisant des formules telles que  $u' \cos u$ ,  $u'e^u$  etc..., calculer les primitives suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int \sin(3\theta) d\theta & \text{d) } \int \frac{e^{2t}}{e^{2t}+1} dt & \text{g) } \int \sin^4 x \cos x dx \\ \text{b) } \int (e^{5t} + e^{-2t}) dt & \text{e) } \int s e^{s^2+1} ds & \text{h) } \int x^2 \sqrt{1+x^3} dx \\ \text{c) } \int \sinh(2x) dx & \text{f) } \int x(5x^2-3)^7 dx & \text{i) } \int \frac{1}{x \ln x} dx \end{array}$$

### Exercice 35 – Changements de variable affines

En pratiquant le changement de variable suggéré, puis en l'imaginant soi-même, calculer les primitives ou intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int \sin(3\theta+1) d\theta \quad (\varphi = 3\theta+1) & \text{c) } \int \frac{1}{4+9x^2} dx \quad (y = 3x/2) & \text{e) } \int \frac{x}{(x+1)^3} dx \\ \text{b) } \int_0^3 \sinh(2x) dx \quad (y = 2x) & \text{d) } \int \frac{1}{3+t^2} dt & \text{f) } \int \frac{1}{x^2+4x+5} dx \end{array}$$

### Exercice 36 – Fractions rationnelles par les éléments simples

Calculer :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int \frac{1}{x^2-1} dx & \text{b) } \int \frac{1}{x(x^2-1)} dx & \text{c) } \int \frac{1}{x(x+1)^2} dx \end{array}$$

### Exercice 37 – Fractions rationnelles au numérateur de degré élevé

Calculer :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int \frac{x^2}{x^2+1} dx & \text{b) } \int \frac{x^3-2x}{x+1} dx & \text{c) } \int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} dx \end{array}$$

## TD 7 – PRIMITIVES ET INTÉGRALES : DEUXIÈME PARTIE

### Exercice 38 – Intégration par parties

Calculer :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int x e^{-x} dx & \text{d) } \int e^x \cos x dx & \text{g) } \int \ln t dt \\ \text{b) } \int (x^2 + 5x + 6) \sin x dx & \text{e) } \int \cos^2 u du & \text{h) } \int \arctan y dy \\ \text{c) } \int_2^3 u^2 \ln u du & \text{f) } \int \sin(3x) \cos(5x) dx & \text{i) } \int \sin(\ln x) dx \end{array}$$

### Exercice 39 – Changements de variable

Calculer :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int_0^3 x \sqrt{1+x} dx \quad (y = \sqrt{1+x}) & \text{d) } \int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx \quad (u = e^{-x}) \\ \text{b) } \int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx \quad (t = \tan x) & \text{e) } \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}} dx \quad (t = 1/x) \\ \text{c) } \int \frac{1}{e^x + 1} dx \quad (t = e^{-x}) & \text{f) } \int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx \quad (u = \sqrt{x}) \end{array}$$

### Exercice 40 – Primitives et intégrales

Calculer les primitives ou intégrales suivantes en choisissant une technique appropriée :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int (x+2) \sin(x^2 + 4x - 6) dx & \text{d) } \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx & \text{h) } \int \ln(x^2 + 4x + 5) dx \\ \text{b) } \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2} dx & \text{e) } \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx & \text{i) } \int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx \\ \text{c) } \int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx & \text{f) } \int \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}} dx & \text{j) } \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx \\ & \text{g) } \int \frac{1}{\operatorname{ch} x} dx & \end{array}$$

### Exercice 41 – Calcul d'aires

En utilisant des intégrales, calculer l'aire des domaines suivants du plan :

$$\begin{array}{l} \text{a) } A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi/4, 0 \leq y \leq \tan x \right\} \\ \text{b) } B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{x-1}}{x} \right\} \\ \text{c) } C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}} \right\} \end{array}$$

## TD 8 – ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU 1ER ORDRE

### Exercice 42 – Équations différentielles linéaires du 1er ordre

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a)  $f'(t) = 0$

b)  $\dot{g}(t) = t^3$

c)  $z'(t) = t z(t)$

d)  $t^2 \frac{dx}{dt}(t) = x(t)$

e)  $(1 + t^2) z'(t) + z(t) = 0$

f)  $az'(t) - bz(t) = 0$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$

g)  $x'(t) = x(t) + t$

h)  $\frac{dy}{dt}(t) = -y(t) + t^2$

i)  $t y'(t) + 2y(t) = t^2 - 3$

j)  $t^3 \frac{dg}{dt}(t) + t^2 g(t) = t$

k)  $\dot{x}(t) - cx(t) = t^3$  avec  $c \in \mathbb{R}$

l)  $\cos t \dot{x}(t) + \sin t x(t) = 1$

m)  $\sin t y'(t) = y(t)$

n)  $x'(t) - \frac{2}{t+1} x(t) = (t+1)^3$

o)  $u'(t) - u(t) = \frac{e^t}{t}$

### Exercice 43 – Équations différentielles du 1er ordre avec condition initiale

A l'aide de l'exercice précédent, trouver l'unique solution de l'équation différentielle vérifiant la condition initiale donnée.

a)  $x$  est solution de l'équation k) pour  $c = 2$  et  $x(1) = 1$

b)  $y_1$  est solution de l'équation m) et  $y_1(\frac{\pi}{2}) = 3$ .  
Même question pour  $y_2$  telle que  $y_2(-\frac{\pi}{2}) = 5$

c)  $u$  est solution de l'équation o) et  $u(1) = 1$

d)  $x$  est solution de l'équation g) et  $x(1) = 1$

### Exercice 44 – Équations différentielles non linéaires du 1er ordre

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a)  $r'(t) = \frac{1}{r(t)}$

b)  $z'(t) = z^2(t)$

c)  $t \dot{z}(t) + z^2(t) = 0$

d)  $\dot{r}(t) = \frac{1}{r^2(t)}$

e)  $\frac{dx}{dt}(t) = e^{(t+x(t))}$

f)  $y'(t) = t (y^2(t) - 1)$

### Exercice 45 Application à la chimie

La loi d'Arrhenius donne l'évolution de la constante de vitesse de réaction  $k$  en fonction de la température. Les unités de  $k$  sont :  $\text{mol.L}^{-1}.\text{s}^{-1}$ . Elle s'écrit :

$$\frac{1}{k} \frac{dk}{dT} = \frac{E}{RT^2}$$

Où  $E$  est l'énergie d'activation,  $R$  la constante des gaz parfaits et  $T$  la température. Résoudre l'équation différentielle et trouver l'expression de  $k(T)$ .

## TD 9 – ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU 2ÈME ORDRE

### Exercice 46 – Équations différentielles du 2ème ordre à coefficients constants

a)  $f''(t) = 0$

b)  $\ddot{g}(t) = t^3$

c)  $\ddot{x}(t) - 4\dot{x}(t) + 3x(t) = 0$

d)  $u''(t) - 6u'(t) + 9u(t) = 0$

e)  $x''(t) + x'(t) + x(t) = 0$

f)  $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = 0$

g)  $u''(t) + 2u'(t) - 5u(t) = 0$

h)  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = t + 1$

i)  $\ddot{z}(t) - 3\dot{z}(t) + 2z(t) = e^{-t}$

j)  $\ddot{u}(t) + \dot{u}(t) - 2u(t) = \sin t$

k)  $y''(t) + y'(t) - 6y(t) = \sin(2t)$

l)  $f''(t) + f(t) = \cos^2 t$

m)  $z''(t) - 2z'(t) + z(t) = e^t + t$

n)  $g''(t) - 2g'(t) + 5g(t) = 10 \cos t$

### Exercice 47 – Équations différentielles du 2ème ordre avec conditions initiales

Résoudre les équations différentielles suivantes et trouver l'unique solution qui vérifie la condition initiale donnée :

a) 
$$\begin{cases} f''(t) + f'(t) - 12f(t) = 0 \\ f(2) = 2 \\ f'(2) = 0 \end{cases}$$

g) 
$$\begin{cases} \ddot{x}(t) - 4\dot{x}(t) + 3x(t) = 0 \\ x(0) = 2 \\ \dot{x}(0) = -1 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} \ddot{u}(t) + 9u(t) = 0 \\ u(\pi/2) = 0 \\ \dot{u}(\pi/2) = 3 \end{cases}$$

h) 
$$\begin{cases} \ddot{u}(t) - 6\dot{u}(t) + 9u(t) = 0 \\ u(0) = 2 \\ \dot{u}(0) = 1 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 4t \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

i) 
$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = 0 \\ x(0) = -1 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} \ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = e^{2t} \\ y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

j) 
$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = 0 \\ x(0) = -2 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$$

e) 
$$\begin{cases} \ddot{f}(t) = 0 \\ f(1) = 1 \\ \dot{f}(1) = 1 \end{cases}$$

k) 
$$\begin{cases} u''(t) + 2u'(t) - 5u(t) = 0 \\ u(0) = 2 \\ u'(0) = 1 \end{cases}$$

f) 
$$\begin{cases} \ddot{g}(t) = t^3 \\ g(0) = 1 \\ \dot{g}(0) = 1 \end{cases}$$

l) 
$$\begin{cases} y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = t + 1 \\ y(0) = 1/4 \\ y'(0) = 1/2 \end{cases}$$

$$\text{m) } \begin{cases} \ddot{z}(t) - 3\dot{z}(t) + 2z(t) = e^{-t} \\ z(0) = 7/6 \\ z'(0) = 5/6 \end{cases}$$

$$\text{p) } \begin{cases} f''(t) + f(t) = \cos^2 t \\ f(0) = 1/2 \\ f'(0) = -1/2 \end{cases}$$

$$\text{n) } \begin{cases} \ddot{u}(t) + \dot{u}(t) - 2u(t) = \sin(t) \\ u(0) = 11/10 \\ u'(0) = 9/10 \end{cases}$$

$$\text{q) } \begin{cases} z''(t) - 2z'(t) + z(t) = e^t + t \\ z(0) = 1 \\ z'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\text{o) } \begin{cases} y''(t) + y'(t) - 6y(t) = \sin(2t) \\ y(0) = 1/52 \\ y'(0) = -1/52 \end{cases}$$

$$\text{r) } \begin{cases} g''(t) - 2g'(t) + 5g(t) = 10 \cos t \\ g(0) = -2 \\ g'(0) = 1 \end{cases}$$

**Exercice 48** L'oscillateur harmonique est l'une des notions les plus importante de la physique. On la retrouve en mécanique classique (le pendule), en optique (indice optique d'un matériau), en électricité (circuit RLC), en mécanique quantique (les phonons), en dynamique moléculaire (vibrations moléculaires) etc. L'expression générale de l'équation d'un oscillateur harmonique est la suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0,$$

avec  $\gamma$  le coefficient d'amortissement et  $\omega$  la fréquence propre d'oscillation de l'oscillateur. Trouvez  $x(t)$ . Discuter la forme des solutions selon les valeurs relatives des paramètres  $\gamma$  et  $\omega$  et le signe de  $\Delta = \gamma^2 - 4\omega^2$ .

## TD 10 – ESPACES VECTORIELS ET VECTEURS

### Exercice 49 – Combinaisons linéaires de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

On note  $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ .

- Exprimer le vecteur  $\vec{E} = (5, 2, 1)$  de  $\mathbb{R}^3$  comme combinaison linéaire de  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$ .
- Le vecteur  $\vec{E} = (5, 2, 1)$  de  $\mathbb{R}^3$  peut-il s'exprimer comme combinaison linéaire des trois vecteurs

$$\vec{u} = (1, 0, 1), \quad \vec{v} = (0, 1, 1) \quad \text{et} \quad \vec{w} = (1, 1, 0)?$$

- Montrer que les vecteurs  $\vec{E} = (0, 6, 1)$  et  $\vec{F} = (5, 4, -1)$  sont des combinaisons linéaires de

$$\vec{u} = (1, 2, 0) \quad \text{et} \quad \vec{v} = (-3, 0, 1).$$

Montrer que le vecteur  $\vec{G} = (4, 2, 0)$  ne l'est pas.

### Exercice 50 – Bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

- Les vecteurs  $\vec{u} = (1, 1)$  et  $\vec{v} = (1, -1)$  forment-ils une base de  $\mathbb{R}^2$ ?  
Autrement dit, peut-on écrire tout vecteur  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  comme combinaison linéaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ ?
- Les vecteurs  $\vec{u} = (1, 0, 1)$ ,  $\vec{v} = (0, 1, 1)$  et  $\vec{w} = (1, 1, 0)$  forment-ils une base de  $\mathbb{R}^3$ ?

### Exercice 51 – Produit scalaire et vecteurs orthogonaux dans le plan

Dans le plan cartésien de base  $(\vec{i}, \vec{j})$ , dessiner les deux vecteurs  $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$  et  $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$ .

- Calculer les normes  $\|\vec{u}\|$ ,  $\|\vec{v}\|$  et le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .
- Calculer et dessiner le vecteur  $\vec{u} + \vec{v}$  et les deux vecteurs  $\vec{u}^\perp$  orthogonaux à  $\vec{u}$  et de même norme.

### Exercice 52 – Produit scalaire, produit vectoriel et produit mixte dans l'espace

Dans l'espace cartésien, on considère les trois vecteurs  $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ ,  $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ , et  $\vec{w} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ .

- Calculer les normes  $\|\vec{u}\|$ ,  $\|\vec{v}\|$ ,  $\|\vec{w}\|$  et le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .
- Calculer et dessiner les vecteurs  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ,  $\vec{v} \wedge \vec{u}$ ,  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$  et  $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ .
- Calculer le produit mixte  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ .

### Exercice 53 – Identités notables du calcul vectoriel (Facultatif)

Démontrer que pour tous les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  de l'espace on a :

- $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2$  ;
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$  ;
- les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux si et seulement si  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$  ;
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$  ; et  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u}$ .

[Suggestion : fixer un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et effectuer un calcul composante par composante.]

## TD 11 – TRANSFORMATIONS LINÉAIRES ET MATRICES

Dans les exercices suivants, on fixe un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  dans l'espace, identifié à  $\mathbb{R}^3$ .

### Exercice 54 – Transformations linéaires et matrices

Parmi les applications suivantes, trouver celles qui sont linéaires et justifier votre réponse.

Pour les applications linéaires, déterminer leurs matrices associées.

a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (y - 3x, 5x + 2y)$

f)  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto (2x, 0, -3x)$

b)  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 - 5y$

g)  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x + 2z, y - z - x)$

c)  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (u, v) \mapsto (2u + 3v, u - 5v)$

h)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto (1 - v, 2u, 3v - 4)$

d)  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (t, \theta) \mapsto t \sin \theta$

i)  $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v, w) \mapsto (w - v, 2u, 3v - 4w)$

e)  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (t, \theta) \mapsto 3t + \theta$

### Exercice 55 – Produit et déterminant de matrices

1. Calculer les déterminants des matrices suivantes ainsi que les produits  $PQ, QP, RS, UV$  et  $TW$  :

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \operatorname{sh}(1) & \operatorname{ch}(1) \\ \operatorname{ch}(1) & \operatorname{sh}(1) \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \operatorname{sh}(1) & \operatorname{ch}(2) \\ -\operatorname{ch}(1) & \operatorname{sh}(2) \end{pmatrix}.$$

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ -4 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 9 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer les déterminants des matrices  $VU^2$  et  $U + V$ .  
3. Calculer, si possible, les produits et les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 56 – Composition d'applications linéaires

Avec les fonctions de l'exercice 54, et en utilisant les matrices, calculer les composées  $f \circ h, h \circ f, G \circ f, h \circ L$  et  $L \circ Q$ .

### Exercice 57 – Systèmes d'équations linéaires

Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants, si cela est possible, en les mettant sous forme matricielle :

a) 
$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{3} \\ 6y - 3x = 5 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y - 2z = 1 \\ -x + 2y + 3z = -3 \end{cases}$$

**Exercice 58 – Isomorphismes, isométries, rotations et réflexions**

Parmi les transformations linéaires associées aux matrices suivantes, indiquer lesquelles sont des isomorphismes, des isométries, des rotations ou des réflexions :

$$\begin{array}{llll}
 \text{a)} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \text{e)} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} & \text{i)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{l)} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\
 \text{b)} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{f)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} & \text{j)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{m)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \text{c)} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{g)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & \\
 \text{d)} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} & \text{h)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} & \text{k)} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{n)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

**Exercice 59** Les différents éléments optiques qui permettent de changer la polarisation de la lumière peuvent être représentés par des matrices de Jones. Le produit d'une matrice décrivant un élément optique par le vecteur du champ électrique donne la polarisation de la lumière en sortant de l'élément. Calculer les produits des éléments optiques décrits en 2), en 3) et en 4) avec la vibration électromagnétique décrite en 1) :

1) Vibration horizontale (polarisation du champ électrique incident)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) Polariseur horizontal

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Polariseur vertical

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) Lame quart d'onde  $\theta = \pi/4$

$$\begin{pmatrix} \cos^2 \theta + i \sin^2 \theta & (1 - i) \sin \theta \cos \theta \\ (1 - i) \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta + i \cos^2 \theta \end{pmatrix}$$

## TD 12 – GÉOMÉTRIE CARTÉSIENNE DANS LE PLAN ET DANS L'ESPACE

Dans le plan, on fixe un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et on note  $(x, y)$  les coordonnées d'un point générique.

### Exercice 60 – Distances et droites

Dans le plan, dessiner les deux points  $A(1, 3)$  et  $B(-1, 0)$ .

- Calculer la distance entre  $A$  et  $B$ .
- Dessiner la droite  $\Delta$  passant par  $A$  et  $B$ , et déterminer son équation.
- Dessiner la droite parallèle à  $\Delta$  passant par  $O$ , et déterminer son équation.
- Dessiner la droite orthogonale à  $\Delta$  passant par  $O$ , et déterminer son équation.

### Exercice 61 – Distance, projection orthogonale et droites

Dans le plan, dessiner le point  $A(5, 3)$  et la droite  $\Delta$  d'équation  $x - y + 1 = 0$ .

- Calculer la distance du point  $A$  à la droite  $\Delta$ .
- Dessiner et trouver la projection orthogonale de  $A$  sur  $\Delta$ .
- Dessiner la droite parallèle à  $\Delta$  passant par  $A$ , et déterminer son équation.
- Dessiner la droite perpendiculaire à  $\Delta$  passant par  $A$ , et déterminer son équation.

Dans l'espace, on fixe un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et on note  $(x, y, z)$  les coordonnées d'un point générique.

### Exercice 62 – Distance et plans

Dans l'espace, dessiner le point  $A(1, 2, 3)$ .

- Calculer la distance entre  $A$  et l'origine  $O$ .
- Ecrire l'équation du plan passant par  $A$  et orthogonal au vecteur  $\vec{v} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}$ .
- Ecrire l'équation du plan passant par  $A$  et parallèle au plan  $3x - 2y + 4z - 5 = 0$ .
- Ecrire l'équation du plan passant par  $A, B(3, -2, 1)$  et  $C(5, 0, -4)$ .

### Exercice 63 – Distance, plans, droites et projections orthogonales

Dans l'espace, dessiner les trois points  $A = (0, 1, 2)$ ,  $B = (-1, 0, 1)$  et  $C = (1, 1, 0)$ .

- Déterminer l'équation du plan  $\pi$  passant par les points  $A, B, C$  et l'intersection de  $\pi$  avec les trois axes.
- Calculer la distance au plan  $\pi$  de l'origine  $O$  et la projection orthogonale de  $O$  sur  $\pi$  ;
- Déterminer une équation paramétrique de la droite  $\Delta$  passant par  $A$  et dirigée par le vecteur  $\overrightarrow{BC}$ , et l'intersection  $\pi \cap \Delta$ .

### Exercice 64 – Longueur d'un segment

Déterminer la longueur de la diagonale du cube unité de  $\mathbb{R}^3$  de deux manières différentes :

- géométriquement, en utilisant deux fois le théorème de Pythagore ;
- analytiquement, en utilisant la distance dans  $\mathbb{R}^3$ .