Régularisation par le bruit pour l'équation de transporte et l'équation cinétique.

FEDRIZZI Ennio
ICJ - Université Lyon 1
fedrizzi@math.univ-lyon1.fr

Pour certaines équations différentielles, on peut trouver un terme de perturbation stochastique qui produit un effet de régularisation (par exemple, on retrouve l'unicité des solutions, ou bien les solutions deviennent plus régulières). Je vais d'abord présenter quelques exemples faciles (EDO) pour mieux donner l'idée des certaines mécanismes de régularisation qu'on peut retrouver, puis détailler deux cas où on a un effet de régularisation pour des EDPs: l'équation de transporte (stochastique)

$$\partial_t u(t,x) + b(t,x) \cdot \nabla u(t,x) \quad \Big(+ \nabla u(t,x) \circ \frac{\mathrm{d}W_t}{\mathrm{d}t} \Big) = 0$$

et une équation cinétique (stochastique) avec terme de force

$$\partial_t f(t,x,v) + v \cdot \nabla_x f(t,x,v) + F(x) \cdot \nabla_v f(t,x,v) \quad \Big(+ \nabla_v f(t,x,v) \circ \frac{\mathrm{d}W_t}{\mathrm{d}t} \Big) = 0\,.$$

Pour ces deux équations, je vais présenter des résultats classiques (de régularité et bonne position du problème) qui, dans le cas stochastique, peuvent être obtenues sous des hypothèses plus faibles.

Les résultats sont obtenues à travers l'analyse des propriétés de régularité des caractéristiques: elles sont solutions d'une équation différentielle stochastique (EDS), dégénéré pour l'équation cinétique. On trouve que les caractéristiques sont plus régulières qu'on pourrait s'attendre: on démontre cela utilisant l'effet de régularisation d'une EDP parabolique associé (dégénéré dans le cas de l'équation cinétique).

Parties des ces résultats ont été obtenues en collaboration avec Franco Flandoli, Enrico Priola et Julien Vovelle, et avec le soutien du Labex MILYON / ANR-10-LABX-0070.