TD n° 2 : intégration

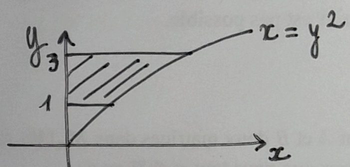
Ex 1 : a) représenter puis évaluer l'aire suivante :

$$A = \int_0^2 \sqrt{2x - x^2}\, dx$$

b) même question pour $B = \int_{-1}^{2} \left\{ \sqrt{9 - (x+1)^2} + 2 \right\} dx$

c) évaluer sans calcul $C = \int_{-1}^{1} x^3 \sqrt{1 - x^2}\, dx$

d) calculer l'aire suivante :



Ex 2 : a) montrer que le produit de deux fonctions en escalier est une fonction en escalier (sur un intervalle $I = [a,b]$ donné).

b) que pensez-vous de la composée ?

Ex 3 : a) si f est intégrable sur $I = [a,b]$, $|f|$ l'est aussi. La réciproque est-elle vraie ?

b) on suppose que $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ est continue et que $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Montrer que f est nulle.

c) on suppose que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et que $\int_a^b |f(x)|\,dx = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|$. Que dire du signe de f ?

d) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/4} \sin^n(t)\,dt$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,dt$.

TD2 intégration

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $[0,4]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

1. Calculer $\int_0^4 f(t)\,dt$.
2. Soit $x \in [0,4]$, calculer $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.
3. Montrer que F est une fonction continue sur $[0,4]$. La fonction F est-elle dérivable sur $[0,4]$?

Exercice 5. Soient les fonctions définies sur $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \sin(x) \text{ et } g(x) = (2x-1)^2,$$

Justifier qu'elles sont intégrables sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. En utilisant les sommes de Riemann, calculer les intégrales $\int_0^1 f(x)dx$ et $\int_1^2 g(x)dx$.

Exercice 6. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ $(a < b)$.

1. On suppose que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a,b]$, et que $f(x_0) > 0$ en un point $x_0 \in [a,b]$. Montrer que $\int_a^b f(x)dx > 0$. En déduire que : «si f est une fonction continue positive sur $[a,b]$ telle que $\int_a^b f(x)dx = 0$ alors f est identiquement nulle».
2. On suppose que $\int_a^b f(x)dx = 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.
3. Application : on suppose que f est une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $d \in [0,1]$ tel que $f(d) = d$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. En justifiant votre réponse, répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1. F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f.
3. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.

4. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est positive sur $\mathbb{R}$.
5. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
6. Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ alors F est T-périodique sur $\mathbb{R}$.
7. Si f est paire alors F est impaire.

Exercice 8 (Densité des fonctions en escalier)**.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour toute fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier, $\int_a^b f(t)g(t)\,dt = 0$. Démontrer que $f = 0$.

Exercice 9. Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{n}{n^2+p^2}$.
3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} \ln\frac{(3n+6p-4)(n+2p)^2}{3n^3}$.

Exercice 10. Calculer la limite des suites suivantes :

1. $\displaystyle u_n = n\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2+n^2}$
2. $\displaystyle v_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$