Relèvement et extension des applications de Sobolev à valeurs variétés

Petru Mironescu

Résumé. Soit $M \subset \mathbb{R}^\ell$ une variété compacte sans bord. Soit $\pi : \widetilde{M} \to M$ "le" revêtement universel de M. Dans le cadre des espaces de Sobolev, le problème du relèvement est le suivant. Donnés $s > 0$ et $1 \leq p < \infty$, décider si toute fonction $u : B^n \to M$ avec $u \in W^{s,p}$ s'écrit comme $u = \pi \circ \varphi$, avec $\varphi : B^n \to \widetilde{M}$, $\varphi \in W^{s,p}$.

Lorsque $M = \mathbb{S}^1$ et $\widetilde{M} = \mathbb{R}$, la réponse est connue pour tout s et p. Des travaux de Bethuel et Chiron étendent ces résultats à toutes les variétés avec $\widetilde{M}$ non compact. Si $\widetilde{M}$ est compact, ces mêmes auteurs ont obtenu des résultats partiels.

Dans une autre direction, le problème de l'extension est le suivant. Décider si toute fonction $u : B^n \to M$ avec $u \in W^{1-1/p,p}$ a une extension $v : B^n \times (0,1) \to M$ avec $v \in W^{1,p}$. Un résultat de Hardt et Lin donne une condition topologique sur M, suffisante pour l'existence des extensions. Un résultat ultérieur de Bethuel montre que, sous une hypothèse topologique supplémentaire, la condition de Hardt et Lin est également nécessaire.

Je présenterai des résultats qui complémentent les travaux ci-dessus, en donnant la solution complète du problème du relèvement et la solution du problème de l'extension si $p \geq 3$. Travail en commun avec Jean Van Schaftingen (Université Catholique de Louvain).