Propriétés au bord des fonctions harmoniques pour le Laplacien fractionnaire perturbé

Tomasz Luks

(en collaboration avec P. Graczyk et T. Jakubowski)

École Centrale de Marseille

21 avril 2015

Fonctions harmoniques classiques

Une fonction u de classe C^2 sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^d$ est harmonique sur D si

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2}(x) = 0, \quad x \in D.$$

W_t – mouvement brownien sur $\mathbb{R}^d$

$\tau_U = \inf\{t > 0 : W_t \notin U\}$ – premier temps de sortie de U

Théorème (S. Kakutani, 1944)

Une fonction u continue sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^d$ est harmonique sur D si et seulement si

$$u(x) = \mathbb{E}^x u(W_{\tau_U}), \quad x \in U,$$

pour tout ouvert borné $U \subset\subset D$.

Noyau de Poisson classique

$B := \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1\}$ – boule unité dans $\mathbb{R}^d$

$\mathbf{S} := \partial B$ – sphère unité

Le noyau de Poisson de B pour W_t est donné par

$$P_B(x, y) = \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^d}.$$

σ – mesure de Hausdorff normalisée sur $\mathbf{S}$

Pour tout ensemble borélien $A \subseteq \mathbf{S}$ on a

$$\mathbb{P}^x(W_{\tau_B} \in A) = \int_A P_B(x, y)\sigma(dy), \quad x \in B.$$

Intégrales de Poisson

$\mathcal{M}(\mathbf{S})$ – ensemble des mesures signées finies sur $\mathbf{S}$

Pour $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{S})$ et $f \in L^1(\mathbf{S}, \sigma)$ on définit les intégrales de Poisson de μ et de f comme

$$P_B[\mu](x) = \int_{\mathbf{S}} P_B(x,y)\mu(dy), \quad P_B[f](x) = \int_{\mathbf{S}} P_B(x,y)f(y)\sigma(dy).$$

Théorème (Représentation de Martin-Poisson)

Pour toute mesure positive $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{S})$ la fonction $u(x) = P_B[\mu](x)$ est harmonique positive sur B. Inversement, si u est harmonique positive sur B, alors il existe une seule mesure positive $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{S})$ telle que $u = P_B[\mu]$.

Pour $z \in \mathbf{S}$ et $\beta > 0$ on définit un cône $\Gamma_\beta(z)$ comme

$$\Gamma_\beta(z) = \{x \in B : |x - z| < (1 + \beta)(1 - |x|)\} .$$

Théorème de Fatou

Soit u une fonction harmonique positive sur B et soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{S})$ une mesure positive telle que $u = P_B[\mu]$. Soit $\mu = \mu_a + \mu_s$ la décomposition de Lebesgue de μ par rapport à σ, où $d\mu_a = f d\sigma$ et $\mu_s \perp \sigma$. Alors pour σ-presque tout $z \in \mathbf{S}$ et pour tout $\beta > 0$ on a

$$\lim_{\Gamma_\beta(z) \ni x \to z} u(x) = f(z).$$

Espaces de Hardy classiques

Définition

Une fonction u appartient à l'espace de Hardy $h^p(B)$, où $p \geq 1$ est fixé, si u est harmonique sur B et

$$\|u\|_{h^p} := \sup_{0<r<1} \left(\int_{\mathbf{S}} |u(rx)|^p \sigma(dx) \right)^{1/p} < \infty.$$

Si u est harmonique positive sur B, alors

$$\|u\|_{h^1} = u(0) < \infty.$$

Théorème

1. *$u \in h^1(B)$ si et seulement si $u = P_B[\mu]$ pour une mesure unique $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{S})$. De plus,*

$$\|u\|_{h^1} = \|\mu\| := |\mu|(\mathbf{S}).$$

2. *$u \in h^p(B)$ pour $p > 1$ fixé, si et seulement si $u = P_B[f]$ pour une fonction unique $f \in L^p(\mathbf{S}, \sigma)$. De plus,*

$$\|u\|_{h^p} = \|f\|_p := \left(\int_{\mathbf{S}} |f|^p d\sigma\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Fonctions harmoniques classiques – références

- E.M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, Princeton, 1970.
- W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987.
- S. Axler, P. Bourdon, W. Ramey, *Harmonic Function Theory*, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 2001.
- J.L. Doob, *Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart*, Springer-Verlag, New York, 1984.
- K.-L. Chung, Z. Zhao, *From Brownian Motion to Schrödinger's Equation*, Springer-Verlag, New York, 1995.

Laplacien fractionnaire perturbé

Définition

Soit $\alpha \in (0,2)$*. Pour une bonne fonction* u *sur* $\mathbb{R}^d$ *on définit le Laplacien fractionnaire de* u *comme*

$$-(-\Delta)^{\alpha/2}u(x) := \lim_{\varepsilon \to 0} C_{d,\alpha} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{u(y)-u(x)}{|x-y|^{d+\alpha}} dy.$$

On définit le Laplacien fractionnaire perturbé comme

$$\mathcal{L} = -(-\Delta)^{\alpha/2} + b \cdot \nabla,$$

avec $|b| \in \mathcal{K}_d^{\alpha-1}$*, i.e.,*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{|x-z|<\varepsilon} |b(z)||x-z|^{\alpha-1-d} dz = 0.$$

Processus stochastique sous-jacent

$(X_t, \mathbb{P}^x)$ – processus de Markov associé à $\mathcal{L}$

- Si $b \equiv 0$, alors X_t est le processus de Lévy α-stable symétrique, donné par la fonction caractéristique suivante:

$$\mathbb{E}^x e^{i\xi\cdot(X_t - x)} = e^{-t|\xi|^\alpha}, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0$$

- Si $b(x) = x$, alors X_t est appelé le processus d'Ornstein-Uhlenbeck α-stable.

$\tau_U := \inf\{t > 0 : X_t \notin U\}$ – premier temps de sortie de U

Fonctions $\mathcal{L}$-harmoniques

Définition

On dit qu'une fonction $u \colon \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ *est* $\mathcal{L}$*-harmonique sur* D *si*

$$u(x) = \mathbb{E}^x u(X_{\tau_U}), \quad x \in U,$$

pour tout ouvert borné $U \subset\subset D$. *Si, en plus,* $u \equiv 0$ *sur* D^c, *alors* u *est dite* $\mathcal{L}$*-harmonique singulière sur* D.

Exemple

La fonction

$$v(x) = \begin{cases} \left(1 - |x|^2\right)^{\alpha/2-1}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

est α*-harmonique (*$\mathcal{L}$*-harmonique pour* $b \equiv 0$*) singulière sur* B.

Noyau de Martin

D – domaine borné de classe $C^{1,1}$

$p^D_{\mathcal{L}}(t,x,y)$ – densité de transition de X_t tué à la sortie de D

Définition

La fonction de Green de $\mathcal{L}$ pour D est donnée par

$$G^{\mathcal{L}}_D(x,y) = \int_0^\infty p^D_{\mathcal{L}}(t,x,y)dt.$$

On définit le noyau de Martin de $\mathcal{L}$ pour D par la limite suivante

$$M^{\mathcal{L}}_D(x,z) = \lim_{y\to z} \frac{G^{\mathcal{L}}_D(x,y)}{G^{\mathcal{L}}_D(x_0,y)}, \quad x\in D, z\in \partial D,$$

où $x_0 \in D$ est un point fixé.

Définition

On définit le noyau de Poisson de $\mathcal{L}$ pour D par la formule d'Ikeda-Watanabe

$$P_D^{\mathcal{L}}(x,z) = C_{d,\alpha} \int_D \frac{G_D^{\mathcal{L}}(x,y)}{|y-z|^{d+\alpha}} dy, \quad x \in D, z \in (\overline{D})^c.$$

Pour tout $A \subset (\overline{D})^c$ on a

$$\mathbb{P}^x(X_{\tau_D} \in A) = \int_A P_D^{\mathcal{L}}(x,z) dz, \quad x \in D.$$

Cas particuliers

- Le noyau de Poisson de $-(-\Delta)^{\alpha/2}$ pour B est donné par

$$P_B(x,z) = C_{d,\alpha}\left(\frac{1-|x|^2}{|z|^2-1}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{|x-z|^d}, \quad x \in B, z \in (\overline{B})^c.$$

- Le noyau de Martin de $-(-\Delta)^{\alpha/2}$ pour B est donné par

$$M_B(x,z) = \frac{\left(1-|x|^2\right)^{\alpha/2}}{|x-z|^d}, \quad x \in B, z \in \mathbf{S}.$$

Résultats principaux ($1 < \alpha < 2$)

Théorème

Pour $x \in D$ et $z \in \partial D$ notons

$$l_D(x,z) = M_D(x,z) + \int_D G_D^{\mathcal{L}}(x,y) b(y) \cdot \nabla_y M_D(y,z) dy.$$

La fonction $l_D(x,z)$ est strictement positive sur $D \times \partial D$. De plus, le noyau de Martin de $\mathcal{L}$ pour D existe et on a

$$M_D^{\mathcal{L}}(x,z) = \frac{l_D(x,z)}{l_D(x_0,z)}.$$

De plus,

$$M_D^{\mathcal{L}}(x,z) \approx M_D(x,z) \approx \frac{\delta_D(x)^{\alpha/2}}{|x-z|^d}.$$

Résultats principaux ($1 < \alpha < 2$)

Théorème (Représentation de Martin)

Pour toute mesure positive $\mu \in \mathcal{M}(\partial D)$ la fonction

$$u(x) = M_D^{\mathcal{L}}[\mu](x) = \int_{\partial D} M_D^{\mathcal{L}}(x,z)\mu(dz)$$

est positive et $\mathcal{L}$-harmonique singulière sur D. Inversement, si u est positive et $\mathcal{L}$-harmonique singulière sur D, alors il existe une seule mesure positive $\mu \in \mathcal{M}(\partial D)$ telle que $u = M_D^{\mathcal{L}}[\mu]$.

Corollaire (Formule de perturbation pour les fonctions $\mathcal{L}$-harmoniques singulières)

Soit $u = M_D^{\mathcal{L}}[\mu]$ pour une mesure positive $\mu \in \mathcal{M}(\partial D)$. On définit

$$u^*(x) = \int_{\partial D} M_D(x,z) \frac{\mu(dz)}{I_D(x_0, z)}, \quad x \in D.$$

Alors, u^* est α-harmonique singulière sur D et on a

$$u(x) = u^*(x) + \int_D G_D^{\mathcal{L}}(x,y) b(y) \cdot \nabla u^*(y) dy.$$

Résultats principaux ($1 < \alpha < 2$)

Théorème de Fatou relatif

Soient u, v deux fonctions $\mathcal{L}$-harmoniques singulières et positives sur D et soient $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\partial D)$ deux mesures telles que $u = M_D^{\mathcal{L}}[\mu]$ et $v = M_D^{\mathcal{L}}[\nu]$. Soit $\mu = \mu_a + \mu_s$ la décomposition de Lebesgue de μ par rapport à ν, où $d\mu_a = fd\nu$ et $\mu_s \perp \nu$. Alors pour ν-presque tout $z \in \partial D$ et pour tout $\beta > 0$ on a

$$\lim_{\Gamma_\beta(z) \ni x \to z} \frac{u(x)}{v(x)} = f(z).$$

Résultats principaux ($1 < \alpha < 2$)

Soit

$$N(x) := M_D^{\mathcal{L}}[\sigma](x) = \int_{\partial D} M_D^{\mathcal{L}}(x,z)\sigma(dz).$$

On a

$$N(x) \approx \delta_D(x)^{\alpha/2-1}.$$

Définition

Pour $p \geq 1$ on définit l'espace de Hardy $H^p_{\mathcal{L}}(D)$ comme l'ensemble des fonctions u $\mathcal{L}$-harmoniques singulières sur D vérifiant

$$\|u\|_{H^p_{\mathcal{L}}} := \sup_{0<r<r_0} \left(\int_{\partial D} \left| \frac{u(\pi_r(x))}{N(\pi_r(x))} \right|^p \sigma(dx) \right)^{1/p} < \infty.$$

Résultats principaux ($1 < \alpha < 2$)

Théorème (Théorème de représentation pour $H^p_{\mathcal{L}}(D)$)

Soit u singulière $\mathcal{L}$-harmonique sur D.

1. *$u \in H^1_{\mathcal{L}}(D)$ si et seulement si $u = M^{\mathcal{L}}_D[\mu]$ pour une mesure $\mu \in \mathcal{M}(\partial D)$. De plus, μ est unique et il existe une constante positive $C = C(\alpha, b, D)$ telle que*

$$C^{-1}\|\mu\| \leq \|u\|_{H^1_{\mathcal{L}}} \leq C\|\mu\|.$$

2. *Fixons $p > 1$. Alors $u \in H^p_{\mathcal{L}}(D)$ si et seulement si $u = M^{\mathcal{L}}_D[f]$ pour une fonction $f \in L^p(\partial D, \sigma)$. De plus, f est unique et il existe une constante positive $C = C(\alpha, b, D)$ telle que*

$$C^{-1}\|f\|_p \leq \|u\|_{H^p_{\mathcal{L}}} \leq C\|f\|_p.$$

Le point de départ pour l'existence du noyau de Martin est la formule de perturbation pour la fonction de Green de $\mathcal{L}$

$$G_D^{\mathcal{L}}(x,y) = G_D(x,y) + \int_D G_D^{\mathcal{L}}(x,z)b(z)\cdot\nabla_z G_D(z,y)dz,$$

et la comparaison

$$G_D^{\mathcal{L}}(x,y) \approx G_D(x,y) \approx |x-y|^{\alpha-d}\left(\frac{\delta_D(x)^{\alpha/2}\delta_D(y)^{\alpha/2}}{|x-y|^{\alpha}}\wedge 1\right)$$

K. Bogdan, T. Jakubowski, *Estimates of the Green function for the fractional Laplacian perturbed by gradient*, Potential Analysis, Volume 36, Number 3 (2012), 455-481.

Le but est de montrer que

$$M_D^{\mathcal{L}}(x,z) := \lim_{y\to z} \frac{G_D^{\mathcal{L}}(x,y)}{G_D^{\mathcal{L}}(x_0,y)} = \frac{I_D(x,z)}{I_D(x_0,z)}, \quad x \in D, z \in \partial D,$$

d'où

$$I_D(x,z) = M_D(x,z) + \int_D G_D^{\mathcal{L}}(x,y) b(y) \cdot \nabla_y M_D(y,z) dy.$$

L'idée:

$$\frac{G_D^{\mathcal{L}}(x,y)}{G_D^{\mathcal{L}}(x_0,y)} = \frac{G_D^{\mathcal{L}}(x,y)}{G_D(x_0,y)} \frac{G_D(x_0,y)}{G_D^{\mathcal{L}}(x_0,y)}.$$

Démonstrations: noyau de Martin

Lemme

Pour tout $x \in D$ et $z \in \partial D$ on a

$$\lim_{y \to z} \frac{\nabla_x G_D(x,y)}{G_D(x_0,y)} = \nabla_x M_D(x,z).$$

Soit $Q \in D, z \in \partial D$ et soit $r > 0$ tel que $\overline{B(Q,r)} \subset D$ et $B(Q,r) \cap B(z,r) = \emptyset$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla_x G_D(x,y)}{G_D(x_0,y)} &= \nabla_x \int_{B(Q,r)^c} P_{B(Q,r)}(x,w) \frac{G_D(w,y)}{G_D(x_0,y)} dw \\
&= \int_{B(Q,r)^c} \nabla_x P_{B(Q,r)}(x,w) \frac{G_D(w,y)}{G_D(x_0,y)} dw
\end{aligned}$$

pour tout $x \in B(Q,r)$ et $y \in B(z,r) \cap D$.

Ensuite on montre l'intégrabilité uniforme:

$$\left|\frac{G_D^{\mathcal{L}}(x,w)b(w)\cdot\nabla_w G_D(w,y)}{G_D(x_0,y)}\right| \le C\frac{G_D(x,w)G_D(w,y)|b(w)|}{G_D(x,y)\,\mathrm{dist}(w,\partial D)\wedge|w-y|}$$

$$\le C|b(w)|(|x-w|^{\alpha-1-d}+|y-w|^{\alpha-1-d}).$$

C'est une consequence des estimés du gradient ∇G_D, de la propriété de Harnack au bord, et du Théorème 3G:

$$\frac{G_D(x,w)G_D(w,y)}{G_D(x,y)} \le C\left(\frac{\delta_D(w)\wedge|x-w|}{|x-w|^{\alpha-1-d}}\vee\frac{\delta_D(w)\wedge|y-w|}{|y-w|^{\alpha-1-d}}\right).$$

Démonstrations: noyau de Martin

Finalement,

$$\lim_{y\to z} \frac{G_D^{\mathcal{L}}(x,y)}{G_D(x_0,y)} = M_D(x,z) + \int_D G_D^{\mathcal{L}}(x,w) b(w) \cdot \nabla_w M_D(w,z) dw$$
$$= I_D(x,z),$$

et

$$\frac{G_D^{\mathcal{L}}(x,y)}{G_D^{\mathcal{L}}(x_0,y)} = \frac{G_D^{\mathcal{L}}(x,y)}{G_D(x_0,y)} \frac{G_D(x_0,y)}{G_D^{\mathcal{L}}(x_0,y)} \to \frac{I_D(x,z)}{I_D(x_0,z)},$$

quand $D \ni y \to z \in \partial D$.

Démonstrations: représentation de Martin

La $\mathcal{L}$-harmonicité et l'unicité de la représentation de Martin est une consequence des propriétés suivantes:

- le noyau de Martin $M_D^{\mathcal{L}}(\cdot,\cdot)$ est continu sur $D \times \partial D$,
- pour tout $z \in \partial D$, $M_D^{\mathcal{L}}(\cdot, z)$ est une fonction positive et $\mathcal{L}$-harmonique singulière sur D,
- $$M_D^{\mathcal{L}}(x,z) \approx M_D(x,z) \approx \frac{\delta_D(x)^{\alpha/2}}{|x-z|^d}.$$

L'existence: soit u $\mathcal{L}$-harmonique singulière et positive sur D. Alors

$$
\begin{aligned}
u(x) = \int_{D^c_{1/n}} P^{\mathcal{L}}_{D_{1/n}}(x,y)u(y)dy = \\
= \int_{D^c_{1/n}} u(y) \Big[P_{D_{1/n}}(x,y) \\
+ \int_{D_{1/n}} G^{\mathcal{L}}_{D_{1/n}}(x,w)b(w)\cdot\nabla_w P_{D_{1/n}}(w,y)dw \Big] dy.
\end{aligned}
$$

Notons

$$
u^*_n(x) = \int_{D^c_{1/n}} P_{D_{1/n}}(x,y)u(y)dy.
$$

Démonstrations: représentation de Martin

D'après le théorème de Fubini et de convergence dominée,

$$u(x) = u_n^*(x) + \int_D G^{\mathcal{L}}_{D_{1/n}}(x,w) b(w) \cdot \nabla u_n^*(w) dw.$$

D'après la formule d'Ikeda-Watanabe,

$$u_n^*(x) = \int_{D^c_{1/n}} \int_{D_{1/n}} u(y) C_{d,\alpha} \frac{G_{D_{1/n}}(x,\xi)}{|\xi - y|^{d+\alpha}} d\xi dy.$$

On définit

$$\mu_n(d\xi) = C_{d,\alpha} G_{D_{1/n}}(x_0,\xi) \int_{D_{1/n}} \frac{u(y)}{|\xi - y|^{d+\alpha}} dy d\xi.$$

La suite μ_n est uniformément bornée et tendue avec $\operatorname{supp}(\mu_n) \subset \overline{D}$ et on a

$$u_n^*(x) = \int_{D_{1/n}} \frac{G_{D_{1/n}}(x, \xi)}{G_{D_{1/n}}(x_0, \xi)} \mu_n(d\xi).$$

On choisit une sous-suite μ_{n_k} convergente vers une mesure μ avec $\operatorname{supp}(\mu) \subset \partial D$. Alors, la limite

$$\lim_k u_{n_k}^*(x) = u^*(x)$$

existe pour tout $x \in D$ et on a

$$u^*(x) = \int_{\partial D} M_D(x, z) d\mu(z).$$

Démonstrations: représentation de Martin

Finalement, il faut justifier le passage à la limite sous l'intégrale

$$\int_D G^{\mathcal{L}}_{D_{1/n}}(x,w)b(w)\cdot\nabla u_n^*(w)dw.$$

Pour cela, on utilise l'estimé

$$G^{\mathcal{L}}_{D_{1/n}}(x,w)|b(w)||\nabla u_n^*(w)| \leq CG_{D_{1/n}}(x,w)|b(w)|\frac{u^*(w)}{\delta_{D_{1/n}}(w)},$$

la représentation de Martin de u^* et l'intégrabilite uniforme du terme

$$\frac{G_{D_{1/n}}(x,w)M_D(w,z)|b(w)|}{\delta_{D_{1/n}}(w)}$$

par rapport à $z \in \partial D$ et $n \in \mathbb{N}$.

MERCI POUR VOTRE ATTENTION !