

Limites et continuité Comparaison de fonctions

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1^{er} cycle, 1^{re} année

1. Complément : cas des complexes

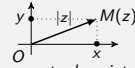
a) Module

Définition 1.3 (Module)

On appelle **module** d'un complexe $z = x + iy$ avec $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$, le nombre réel noté $|z|$ défini par :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Dans le plan représentant les nombres complexes, $|z|$ est la **distance** entre le point de coordonnées (x, y) (ou d'**affixe** z) et l'origine.

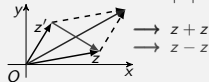


Proposition 1.4 (Propriétés (facultatif))

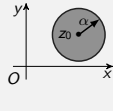
$$① \forall z \in \mathbb{C}, |z| = 0 \iff z = 0$$

$$② \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, |z \times z'| = |z| \times |z'|, |z^n| = |z|^n \text{ et, si } z' \neq 0, \frac{|z|}{|z'|} = \left| \frac{z}{z'} \right|$$

$$③ \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \begin{cases} |z \pm z'| \leq |z| + |z'| \\ ||z| - |z'|| \leq |z \mp z'| \end{cases} \quad \text{inégalités triangulaires}$$



$$④ \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall (z, z_0) \in \mathbb{C}^2, |z - z_0| \leq \alpha \iff M(z) \in \mathcal{D}_{M(z_0), \alpha}$$



$$⑤ \forall z \in \mathbb{C}, [(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, |z| \leq \varepsilon) \iff z = 0]$$

Autre formulation : $\bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{D}_{0, \varepsilon} = \{0\}$



Sommaire

- ① Propriétés dans l'ensemble des réels
 - Valeur absolue
 - Majorant, minorant
 - Borne supérieure et borne inférieure
 - Borne supérieure/inférieure et limite
- ② Limites d'une fonction
 - Voisinages dans $\mathbb{R}$
 - Limite en l'infini, limite en un réel
 - Limite à gauche, limite à droite
 - Lien entre fonctions et suites
 - Opérations sur les limites
 - Branches infinies
 - Ordre et limites
- ③ Continuité d'une fonction
 - Continuité en un point
 - Prolongement par continuité
 - Opérations
 - Continuité sur un intervalle
 - Fonctions trigonométriques réciproques
- ④ Comparaison locale de deux fonctions
 - Problématique
 - Outil de comparaison
 - Négligeabilité d'une fonction devant une autre
 - Équivalence de fonctions

1. Propriétés dans l'ensemble des réels

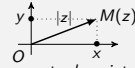
a) Module

Définition 1.3 (Module)

On appelle **module** d'un complexe $z = x + iy$ avec $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$, le nombre réel noté $|z|$ défini par :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Dans le plan représentant les nombres complexes, $|z|$ est la **distance** entre le point de coordonnées (x, y) (ou d'**affixe** z) et l'origine.

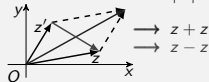


Proposition 1.4 (Propriétés (facultatif))

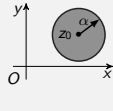
$$① \forall z \in \mathbb{C}, |z| = 0 \iff z = 0$$

$$② \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, |z \times z'| = |z| \times |z'|, |z^n| = |z|^n \text{ et, si } z' \neq 0, \frac{|z|}{|z'|} = \left| \frac{z}{z'} \right|$$

$$③ \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \begin{cases} |z \pm z'| \leq |z| + |z'| \\ ||z| - |z'|| \leq |z \mp z'| \end{cases} \quad \text{inégalités triangulaires}$$



$$④ \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall (z, z_0) \in \mathbb{C}^2, |z - z_0| \leq \alpha \iff M(z) \in \mathcal{D}_{M(z_0), \alpha}$$



$$⑤ \forall z \in \mathbb{C}, [(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, |z| \leq \varepsilon) \iff z = 0]$$

Autre formulation : $\bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{D}_{0, \varepsilon} = \{0\}$



1. Propriétés dans l'ensemble des réels

b) Majorant, minorant d'une partie

Définition 1.5 (Majorant/Minorant)

① Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et α un réel.

On dit que α est un **majorant** de A ou que α **major**e A si $\forall x \in A, x \leq \alpha$.

On dit que α est un **minorant** de A ou que α **minore** A si $\forall x \in A, x \geq \alpha$.

② Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ qui admet (au moins) un majorant (resp. un minorant), on dit qu'elle est **majorée** (resp. **minorée**).

③ Si A est à la fois majorée et minorée, on dit qu'elle est **bornée**, ce qui équivaut à : $\exists M > 0, \forall x \in A, |x| \leq M$.

④ On dit que A admet un **plus grand élément** (resp. un **plus petit élément**) α lorsque α est à la fois un majorant (resp. un minorant) de A et un élément de A . S'il existe, α s'appelle aussi le **maximum** (resp. le **minimum**) de A et se note $\max(A)$ (resp. $\min(A)$).

Remarque 1.6 (Cas des complexes)

On peut étendre la notion d'ensemble borné au cas des nombres complexes en remplaçant la **valeur absolue** par le **module** :

Soit A une partie non vide de $\mathbb{C}$. On dit que A est **bornée** lorsque

$$\exists M > 0, \forall z \in A, |z| \leq M.$$

1. Propriétés dans l'ensemble des réels

a) Valeur absolue

Définition 1.1 (Valeur absolue)

On appelle **valeur absolue** d'un réel x , le nombre réel noté $|x|$ défini par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Sur la droite représentant les nombres réels, $|x|$ est la **distance** entre le point d'abscisse x et l'origine.

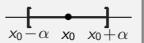
Proposition 1.2 (Propriétés)

$$① \forall x \in \mathbb{R}, |x| = 0 \iff x = 0$$

$$② \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, |x \times y| = |x| \times |y|, |x^n| = |x|^n \text{ et, si } y \neq 0, \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

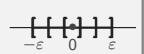
$$③ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} |x \pm y| \leq |x| + |y| & (1^{\text{re}} \text{ inégalité triangulaire}) \\ ||x| - |y|| \leq |x \mp y| & (2^{\text{e}} \text{ inégalité triangulaire}) \end{cases}$$

$$④ \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, x_0) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} |x| \leq \alpha \iff -\alpha \leq x \leq \alpha \\ |x - x_0| \leq \alpha \iff x_0 - \alpha \leq x \leq x_0 + \alpha \end{cases}$$



$$⑤ \forall x \in \mathbb{R}, [(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, |x| \leq \varepsilon) \iff x = 0]$$

Autre formulation : $\bigcap_{\varepsilon > 0} [-\varepsilon, \varepsilon] = \{0\}$



1. Propriétés dans l'ensemble des réels

c) Borne supérieure et borne inférieure

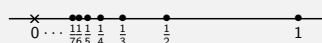
Exemple 1.8

① Les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ ne sont **ni majorés ni minorés**, ils admettent $-\infty$ et $+\infty$ pour borne inférieure et borne supérieure.

② Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

- Les intervalles $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$ sont **bornés** et admettent tous a pour borne inférieure et b pour borne supérieure.
- L'intervalle $[a, b]$ admet a pour plus petit élément et b pour plus grand élément, alors que l'intervalle $]a, b[$ n'admet ni plus petit ni plus grand élément.
- Les intervalles $[a, +\infty[$ et $]a, +\infty[$ sont **minorés** mais **pas majorés**, ils admettent a pour borne inférieure et $+\infty$ pour borne supérieure.

$$③ \text{ Soit } A = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$



- L'ensemble A est non vide, majoré par 1 et minoré par 0.
- On a $1 \in A$ donc $\sup(A) = \max(A) = 1$.
- On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} > 0$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \leq \varepsilon$ (choisir un naturel $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$). Donc $\inf(A) = 0$. Or $0 \notin A$, donc A n'a pas de plus petit élément.

1. Propriétés dans l'ensemble des réels

c) Borne supérieure et borne inférieure

Définition 1.9 (Bornes sup/inf d'une fonction)

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

• On dit que f est **majorée** (resp. **minorée**) sur D si

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in D, f(x) \leq \alpha \quad (\text{resp. } f(x) \geq \alpha).$$

• Si f est **majorée** sur D alors $\sup\{f(x), x \in D\}$ est un nombre **fini** et se note $\sup f(x)$.

• Si f est **minorée** sur D alors $\inf\{f(x), x \in D\}$ est un nombre **fini** et se note $\inf f(x)$.

• Si f est une fonction **non majorée**, on pose par convention $\sup f(x) = +\infty$.

• Si f est une fonction **non minorée**, on pose par convention $\inf f(x) = -\infty$.

• De manière analogue, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle, on note

$$\sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\} = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n \quad \text{et} \quad \inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\} = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n.$$

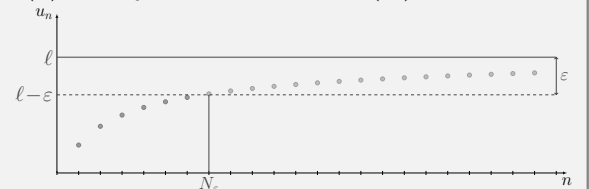
1. Propriétés dans l'ensemble des réels

d) De la borne sup/inf vers la limite

Exemple 1.10 (Limite d'une suite croissante)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle **croissante**. Posons $\ell = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

① Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **majorée**, alors ℓ est un nombre réel (**fini**).



Le nombre ℓ est caractérisé par

$$[\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell] \quad \text{et} \quad [\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, u_{N_\varepsilon} \geq \ell - \varepsilon].$$

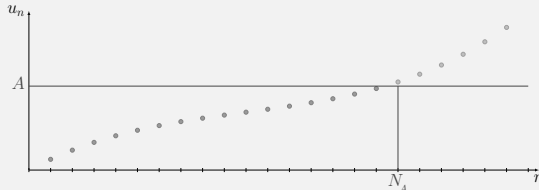
Par croissance, on a $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, [n \geq N_\varepsilon \implies \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell]$.

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **convergente** et admet ℓ pour limite.

Exemple 1.10 (Limite d'une suite croissante)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle **croissante**. Posons $\ell = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors $\ell = +\infty$ (par convention).



On a
 $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N_A \in \mathbb{N}, u_{N_A} > A.$

Par croissance, on a $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N_A \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, [n \geq N_A \Rightarrow u_n \geq A].$

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **divergente** et admet $+\infty$ pour limite.

On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$

8

Un peu de vocabulaire qui sera utilisé dans la suite :

Définition 2.1 (Notion de voisinage)

- On dit qu'une propriété dépendant d'un réel x est vraie **au voisinage de x_0** lorsqu'il existe un intervalle ouvert de la forme $I =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que la propriété soit vraie pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$ (ce qui ne l'empêche pas d'être éventuellement vraie pour x_0 également).
- On dit qu'une propriété est vraie **au voisinage de $+\infty$** (resp. $-\infty$) lorsqu'il existe un intervalle ouvert de la forme $I =]A, +\infty[$ (resp. $]-\infty, A[$) avec $A \in \mathbb{R}$ tel que la propriété soit vraie pour tout $x \in I$.

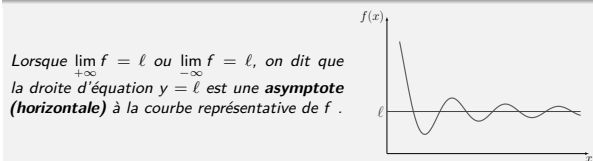
Définition 2.2 (Droite réelle achevée)

On appelle **droite réelle achevée** l'ensemble des réels auquel on adjoint $+\infty$ et $-\infty$. Cet ensemble est noté $\overline{\mathbb{R}}$. Formellement :

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty].$$

11

Définition 2.4 (Asymptote horizontale)

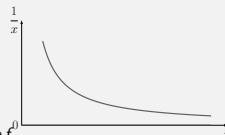


Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$, on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une **asymptote (horizontale)** à la courbe représentative de f .

Exemple 2.5 (Fonction « inverse »)

Soit f la fonction de la variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$



On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, donc l'axe des abscisses est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f .

14

Théorème 1.11 (Théorème de la limite monotone)

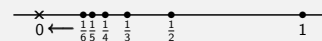
- Toute suite **croissante** et **majorée** est **convergente**.
 Toute suite **croissante** et **non majorée** est **divergente** de limite $+\infty$.
- Toute suite **décroissante** et **minorée** est **convergente**.
 Toute suite **décroissante** et **non minorée** est **divergente** de limite $-\infty$.

De manière unifiée :

- si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle **croissante**, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$;
- si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle **décroissante**, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$.

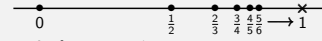
Exemple 1.12 (Suite des inverses)

- Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n}$.



La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **décroissante** et **minorée** e.g. par 0.
 Elle est donc **convergente** et l'on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} u_n = 0$.

- Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = 1 - \frac{1}{n}$.



La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante** et **majorée** e.g. par 1.
 Elle est donc **convergente** et l'on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} v_n = 1$.

9

Dans toute la suite, sauf mention contraire, f désignera une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont l'ensemble de définition D_f est un intervalle ou une réunion d'intervalles.

Définition 2.3 (Limite finie en l'infini)

- Soit une fonction f définie au voisinage de $+\infty$.
 On dit que f **admet pour limite un réel ℓ en $+\infty$** lorsque
 $\forall \varepsilon > 0, \exists X_\varepsilon \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x \geq X_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.
 Si une telle limite existe, alors elle est **unique**.
 On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \ell$, ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$ ou $f \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$.
- Soit une fonction f définie au voisinage de $-\infty$.
 On dit que f **admet pour limite un réel ℓ en $-\infty$** lorsque
 $\forall \varepsilon > 0, \exists X_\varepsilon \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x \leq -X_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.
 On note alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = \ell$, ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \ell$ ou $f \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \ell$.

12

Définition 2.6 (Limite infinie en l'infini)

Soit une fonction f définie au voisinage de $+\infty$.

- On dit que f **admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$** lorsque

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists X_A \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x \geq X_A \Rightarrow f(x) \geq A.$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$, ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ ou $f \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

- On dit que f **admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$** lorsque

$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists X_B \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x \geq X_B \Rightarrow f(x) \leq B.$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\infty$, ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$ ou $f \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$.

Remarque 2.7

Les définitions précédentes s'adaptent aisément au cas d'une fonction définie au voisinage de $-\infty$ et qui peut donc avoir pour limite $-\infty$ ou $+\infty$.

15

Exemple 1.13 (Deux séries de Riemann)

- Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2}$.
 - On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante**.
 - On a $\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$,
 donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 2 - \frac{1}{n} < 2$.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **majorée**.

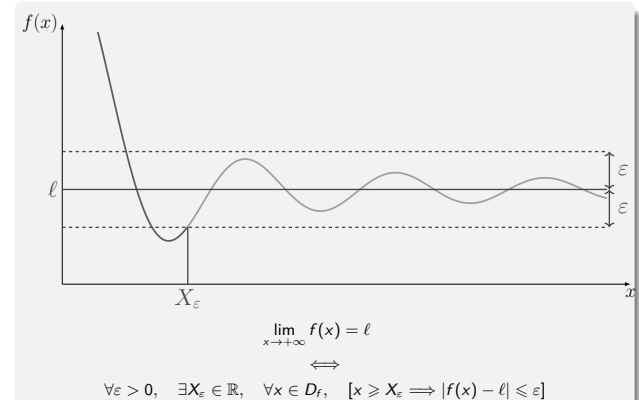
En conclusion, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **convergente**.

- Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.
 - On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 0$, donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante**.
 - On a $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$,
 donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n > \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{n+1} - 1$.

Ainsi, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas **majorée**.

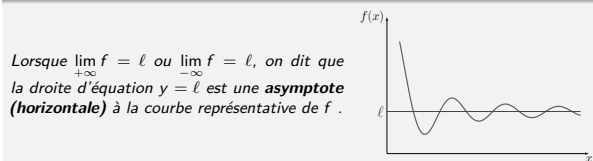
En conclusion, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **divergente** et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} v_n = +\infty$.

10



13

Définition 2.4 (Asymptote horizontale)

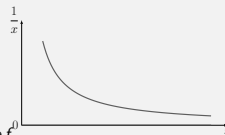


Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$, on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une **asymptote (horizontale)** à la courbe représentative de f .

Exemple 2.5 (Fonction « inverse »)

Soit f la fonction de la variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$



On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, donc l'axe des abscisses est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f .

14

Définition 2.6 (Limite infinie en l'infini)

Soit une fonction f définie au voisinage de $+\infty$.

- On dit que f **admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$** lorsque

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists X_A \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x \geq X_A \Rightarrow f(x) \geq A.$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$, ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ ou $f \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

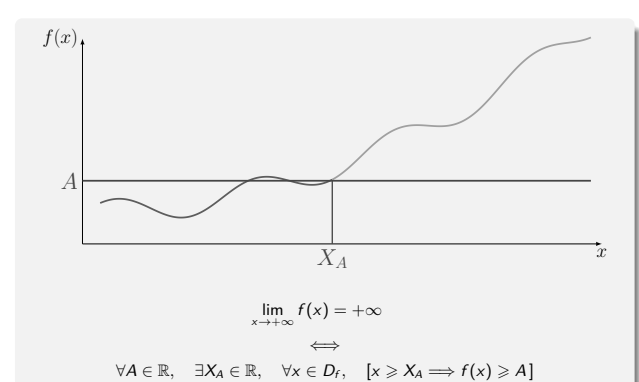
- On dit que f **admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$** lorsque

$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists X_B \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x \geq X_B \Rightarrow f(x) \leq B.$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\infty$, ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$ ou $f \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$.

Remarque 2.7

Les définitions précédentes s'adaptent aisément au cas d'une fonction définie au voisinage de $-\infty$ et qui peut donc avoir pour limite $-\infty$ ou $+\infty$.



16

Définition 2.8 (Limite d'une suite)

- ① On dit qu'une suite réelle ou complexe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** vers un nombre ℓ (ou **tend vers ℓ**) lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et on dit aussi que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **convergente**. Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**.

- ② On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **a pour limite $+\infty$** (ou **tend vers $+\infty$**) si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N_A \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_A \Rightarrow u_n \geq A.$$

- ③ On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **a pour limite $-\infty$** (ou **tend vers $-\infty$**) si

$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists N_B \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_B \Rightarrow u_n \leq B.$$

17

Définition 2.9 (Limite infinie en un réel)

Soit x_0 un réel tel que : $x_0 \in D_f$ ou x_0 est une borne de D_f .

- ① On dit que f **admet pour limite $+\infty$ en x_0** lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha_A > 0, \forall x \in D_f, |x - x_0| \leq \alpha_A \Rightarrow f(x) \geq A$$

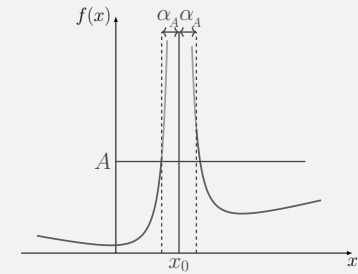
On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0} f = +\infty$, ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$ ou $f \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$.

- ② On dit que f **admet pour limite $-\infty$ en x_0** lorsque :

$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists \alpha_B > 0, \forall x \in D_f, |x - x_0| \leq \alpha_B \Rightarrow f(x) \leq B$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0} f = -\infty$, ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} -\infty$ ou $f \xrightarrow{x \rightarrow x_0} -\infty$.

18



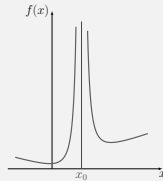
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

$$\Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha_A > 0, \forall x \in D_f, |x - x_0| \leq \alpha_A \Rightarrow f(x) \geq A$$

19

Définition 2.10 (Asymptote verticale)

Lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0} f = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0} f = -\infty$, on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est une **asymptote (verticale)** à la courbe représentative de f .

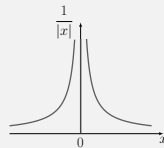


Exemple 2.11 (Fonction « inverse absolue »)

Soit f la fonction de la variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{1}{|x|}.$$

On a $\lim_{x \rightarrow 0} f = +\infty$, donc l'axe des ordonnées est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de f .



20

Définition 2.12 (Limite finie en un réel)

Soit x_0 un réel tel que : $x_0 \in D_f$ ou x_0 est une borne de D_f .

On dit que f **admet le réel ℓ pour limite en x_0** lorsque

- première formulation :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon > 0, \forall x \in D_f, |x - x_0| \leq \alpha_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon;$$

- deuxième formulation :

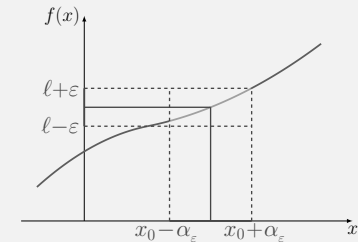
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon > 0, \forall x \in D_f, x \in [x_0 - \alpha_\varepsilon, x_0 + \alpha_\varepsilon] \Rightarrow f(x) \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon];$$

- troisième formulation :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon > 0, f([x_0 - \alpha_\varepsilon, x_0 + \alpha_\varepsilon] \cap D_f) \subset [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon].$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0} f = \ell$, ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$ ou $f \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$.

21



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon > 0, \forall x \in D_f, |x - x_0| \leq \alpha_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

ou encore $x \in [x_0 - \alpha_\varepsilon, x_0 + \alpha_\varepsilon] \Rightarrow f(x) \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$

ou encore $f([x_0 - \alpha_\varepsilon, x_0 + \alpha_\varepsilon] \cap D_f) \subset [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$

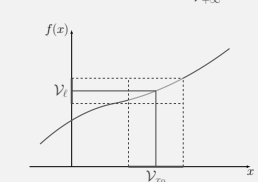
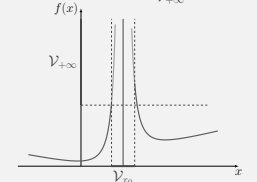
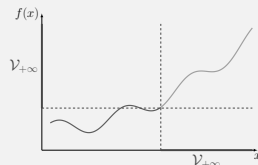
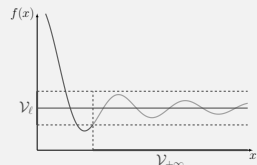
22

Définition 2.13 (Unification des quatre cas)

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 \in D_f$ ou x_0 est une borne de D_f , et $\ell \in \mathbb{R}$.

La fonction f **admet ℓ pour limite en x_0** lorsque :

pour tout voisinage $\mathcal{V}_\ell$ de ℓ , il existe un voisinage $\mathcal{V}_{x_0}$ de x_0 tel que $f(\mathcal{V}_{x_0} \cap D_f) \subset \mathcal{V}_\ell$.



23

Proposition 2.14 (Unicité/continuité)

- ① Si f admet une limite en x_0 alors cette limite est **unique**.
 ② Si f admet une limite finie en x_0 alors f est **bornée** au voisinage de x_0 .
 ③ Si $x_0 \in D_f$ et si f admet pour limite ℓ en x_0 alors $\ell = f(x_0)$.
 On dit alors que f est **continue** en x_0 (cf. § 3).

Remarque 2.15 ((facultatif))

- ① Lorsque $x_0 \in D_f$ on définit parfois $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ par

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon > 0, \forall x \in D_f, 0 < |x - x_0| \leq \alpha_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

On peut définir de même $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

- ② Les définitions 2.3 et 2.12 peuvent s'étendre au cas d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ (et même de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ pour la 2.12...) en remplaçant les **valeurs absolues** par des **modules**. On a alors le résultat ci-dessous.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, telle que $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ où f_1 et f_2 sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\ell_1 + i\ell_2 \in \mathbb{C}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1 + i\ell_2 \Leftrightarrow \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \ell_1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = \ell_2 \right).$$

24

Définition 2.16

- ① On dit que f **admet le réel ℓ pour limite à gauche en x_0** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon > 0, \forall x \in D_f, x_0 - \alpha_\varepsilon < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f = \ell$.

- ② On dit que f **admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour limite à gauche en x_0** si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha_A > 0, \forall x \in D_f, x_0 - \alpha_A < x < x_0 \Rightarrow f(x) > A \text{ (resp. } f(x) < A).$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$.

On définit de la même manière la notion de **limite à droite** : il suffit, dans les définitions ci-dessus, de remplacer $x_0 - \alpha_\varepsilon < x < x_0$ par $x_0 < x < x_0 + \alpha_\varepsilon$.

Proposition 2.17

- ① Si $x_0 \notin D_f$, f admet une limite en x_0 ssi f admet une **limite à droite** et une **limite à gauche** en x_0 et si ces limites sont **égales**.
 ② Si $x_0 \in D_f$, il faut de plus que : $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, ce qui revient à dire que f est **continue** en x_0 (cf. § 3).

25

Proposition 2.18 (Lien fonctions-suites)

Soit $a, \ell \in \mathbb{R}$. Les deux énoncés suivants sont **équivalents** :

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.
- Pour toute suite de réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell$.

Corollaire 2.19 (Un critère de divergence)

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. S'il existe deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

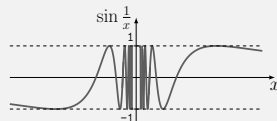
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = x_0$ et les suites-images par $f : (f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ admettent des limites **différentes**, alors f n'admet **pas** de limite en x_0 .

Exemple 2.20 (Fonction « sinus inverse »)

Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Examinons si elle admet une limite en $x_0 = 0$.

- Posons $u_n = \frac{1}{n\pi}$ et $v_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$.
- On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ et $f(u_n) = 0$ et $f(v_n) = 1$.
- Les suites $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ admettent des limites **différentes**.

Ainsi f n'admet pas de limite en 0.



26

Proposition 2.25 (Composition)

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0, \ell, \ell' \in \mathbb{R}$.

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{y \rightarrow \ell} g(y) = \ell'$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = \ell'$.

Application à $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)^{g(x)}) = \lim_{x \rightarrow x_0} (e^{g(x) \ln f(x)})$ lorsque $f > 0$ au voisinage de x_0 :

$\lim_{x_0} f$	$\ell > 0$	$\ell' > 1$ ou $+\infty$	$\ell \in [0, 1]$	$+\infty$	$+\infty$	0^+	0^+	1
$\lim_{x_0} g$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$ (-)	$+\infty$ (-)	$\ell' > 0$ ($\ell' < 0$)	0	$\ell' > 0$ ou $+\infty$ $\ell' < 0$ ou $-\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim_{x_0} f^{g(x)}$	$\ell^{\ell'}$	$+\infty$ (0^+)	0^+ ($+\infty$)	0^+ (0^+)	?	0^+ ($+\infty$)	?	?

Les **formes indéterminées** que l'on rencontre lors de cette opération sont de la forme $\bullet 0^0 \bullet 0^0 \bullet 1^\infty$

Exemple 2.26 (Exponentielle)

À l'aide de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (cf. exemple 2.36), on voit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

29

Théorème 2.29 (Théorème de la limite monotone)

Soit a et b deux réels ou $\pm\infty$ tels que $a < b$ et $I =]a, b[$.

1 Soit f une fonction **croissante** sur I .

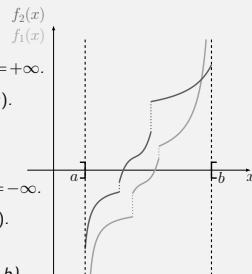
- Si f est **majorée** sur I , alors f admet une **limite à gauche finie** en b .
- Si f n'est **pas majorée** sur I alors $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$.

Dans les deux cas, on a $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup_{x \in]a, b[} f(x)$.

- Si f est **minorée** sur I , alors f admet une **limite à droite finie** en a .
- Si f n'est **pas minorée** sur I alors $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$.

Dans les deux cas, on a $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf_{x \in]a, b[} f(x)$.

2 On a des résultats similaires pour les fonctions **décroissantes** (en échangeant les rôles de a et b).



32

Proposition 2.21 (Addition/multiplication)

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et ℓ, ℓ' deux nombres réels.

$\lim_{x_0} f$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$ (-)	$+\infty$
$\lim_{x_0} g$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$ (-)	$+\infty$ (-)	$-\infty$
$\lim_{x_0} (f+g)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$ (-)	$+\infty$ (-)	?

$\lim_{x_0} f$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{x_0} g$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$ (-)	$+\infty$ (-)	$+\infty$ (-)	$+\infty$ (-)	$\pm\infty$
$\lim_{x_0} (f \times g)$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$ (-)	$-\infty$ (+)	$+\infty$ (-)	$+\infty$ (+)	?

Les **formes indéterminées** que l'on rencontre lors de ces opérations sont de la forme $\bullet 0 \times \infty \bullet 0 \times \infty$

Exemple 2.22 (Polynômes en $\pm\infty$)

La limite en $\pm\infty$ d'une fonction polynôme est égale à la limite de son monôme de plus haut degré : si $a_p \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sum_{k=0}^p a_k x^k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_p x^p = \pm\infty$ si $p \geq 1$ (signe à préciser).

27

Définition 2.27 (Asymptote oblique/Branches paraboliques)

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$.

1 S'il existe des réels a et b tels que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0,$$

on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est **asymptote (oblique)** à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.

Dans ce cas, les nombres a et b sont donnés par

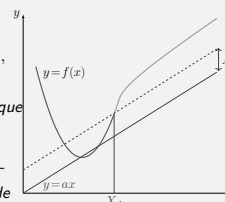
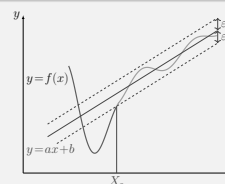
$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax).$$

2 S'il existe un réel a tel que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty,$$

on dit que la courbe représentative de f admet une **branche parabolique** de direction asymptotique la droite d'équation $y = ax$ en $+\infty$.

3 Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \pm\infty$, on dit que la courbe représentative de f admet une **branche parabolique** de direction asymptotique l'axe des ordonnées en $+\infty$.



30

Proposition 2.23 (Division)

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et ℓ, ℓ' deux nombres réels.

$\lim_{x_0} f$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$ ou $+\infty$	$\ell' < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim_{x_0} g$	$\ell' \in \mathbb{R}^*$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$ ($\ell' < 0$)	$\ell' > 0$ ($\ell' < 0$)	$\pm\infty$	0^+ (0^-)	0^+ (0^-)	0
$\lim_{x_0} \frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$ (-)	$-\infty$ (+)	?	$+\infty$ (-)	$-\infty$ (+)	?

Les **formes indéterminées** que l'on rencontre lors de cette opération sont de la forme $\bullet \frac{\infty}{\infty} \bullet \frac{0}{0}$

Exemple 2.24 (Fractions rationnelles en $\pm\infty$)

La limite en $\pm\infty$ d'une fraction rationnelle est égale à la limite du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur :

$$\text{si } a_p \neq 0 \text{ et } b_q \neq 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sum_{k=0}^p a_k x^k}{\sum_{k=0}^q b_k x^k} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_p x^p}{b_q x^q} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } p > q \text{ (signe à préciser)} \\ 0 & \text{si } p < q \\ \frac{a_p}{b_p} & \text{si } p = q \end{cases}$$

28

Exemple 2.28 (Asymptote oblique)

1 Soit f la fonction définie au voisinage de $+\infty$ par

$$f(x) = \frac{x}{3} + 1 + 4 \frac{\sin x}{x}.$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ (cf. exemple 2.35)

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{x}{3} - 1\right) = 0$.

La courbe représentative de f admet une **asymptote** en $+\infty$ d'équation $y = \frac{x}{3} + 1$.

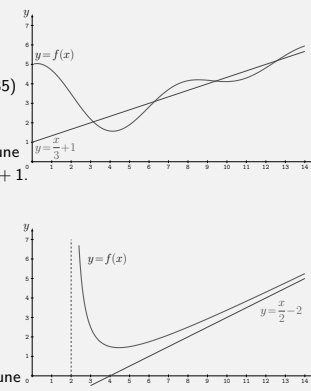
2 Soit g la fonction définie au voisinage de $+\infty$ par

$$g(x) = \frac{x^2 - 6x + 14}{2x - 4}.$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{1}{2}$

puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(g(x) - \frac{x}{2}\right) = -2$.

La courbe représentative de g admet une **asymptote** en $+\infty$ d'équation $y = \frac{x}{2} - 2$.



31

Exemple 2.30 (Partie entière et inverse)

Soit f la fonction définie sur $]0, 1[$ par $f(x) = \frac{1}{E(1/x)}$.

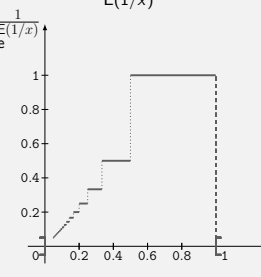
La fonction « partie entière » étant croissante et la fonction « inverse » étant décroissante, par composition, f est **croissante**.

Pour tout $x \in]0, 1[$, $\frac{1}{x} > 1$ donc $E\left(\frac{1}{x}\right) \geq 1$ puis $f(x) \in]0, 1[$.

Ainsi la fonction f est **bornée** sur $]0, 1[$.

En conséquence, f admet des **limites finies** en 0 à droite et en 1 à gauche.

En fait, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$.



33

Partant de la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, à l'aide de changements de variable on déduit les

limites $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ que l'on peut généraliser :

Proposition 2.31 (Croissances comparées (cf. exemple 4.3))

1 Pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta \in \mathbb{R}$,

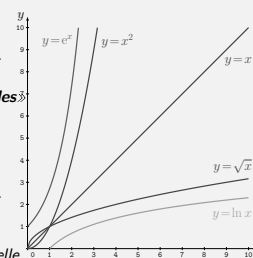
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0.$$

Les puissances du logarithme sont **«négligeables»** devant les fonctions puissances **positives**.

2 Pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0.$$

Les fonctions puissances sont **«négligeables»** devant les puissances **positives** de l'exponentielle.



34

Proposition 2.32 (Ordre et limites)

- 1 Soit f et g des fonctions telles que $f \leq g$ au voisinage de x_0
- Si f et g admettent des limites finies ℓ et ℓ' en x_0 alors $\ell \leq \ell'$.
 - Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$.
 - Si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.
- 2 Si f et g admettent resp. ℓ et ℓ' comme limites en x_0 et si $\ell < \ell'$, alors $f < g$ au voisinage de x_0 .
- 3 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ et si $\ell > \alpha$ alors $f > \alpha$ au voisinage de x_0 .
En particulier, si $\ell > 0$ alors $f > 0$ au voisinage de x_0 .

Remarque 2.33 (Inégalités strictes/larges)

On prendra garde aux inégalités **strictes** et **larges** : si f et g sont des fonctions telles que $f < g$ au voisinage de x_0 et admettent des limites ℓ et ℓ' en x_0 , on **n'a pas nécessairement** $\ell < \ell'$ et l'on peut avoir $\ell = \ell'$.

Ex. : $f(x) = 0$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ en $+\infty$. On a $f < g$ sur $]0, +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

Théorème 2.34 (Théorème de l'encadrement)

Soit f, g et h des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.
Si les fonctions f, g et h vérifient $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ au voisinage de x_0 , et si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

35

Définition 3.1 (Continuité)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$.

- 1 On dit que f est **continue en x_0** lorsque f admet une limite en x_0 , et cette limite est alors nécessairement $f(x_0)$ (d'après proposition 2.14). Autrement dit :
- $$f \text{ continue en } x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$
- $$\iff (\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, |x - x_0| < \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$
- 2 On dit que f est **continue à gauche** (resp. **à droite**) en x_0 lorsque
- $$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \quad (\text{resp. } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)).$$

Proposition 3.2

f est continue en x_0 ssi f est continue à gauche et à droite en x_0 .

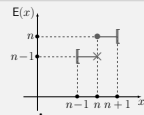
Exemple 3.3 (Fonction « partie entière »)

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Au voisinage de n , on a

$$E(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in [n, n+1[\\ n-1 & \text{si } x \in [n-1, n[\end{cases}$$

donc $\lim_{x \rightarrow n^-} E(x) = n = E(n)$ et $\lim_{x \rightarrow n^+} E(x) = n-1 \neq E(n)$.

La fonction partie entière est **continue à droite** en n mais **pas à gauche**.



38

Proposition 3.7 (Opérations)

- 1 **Opérations**
Si f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ **continues** en x_0 et si λ est un réel, alors les fonctions $f + g$, λf et fg sont **continues** en x_0 .
Si de plus $g(x_0) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est **continue** en x_0 .
- 2 **Composition**
Si f est **continue** en x_0 et si g est **continue** en $f(x_0)$ alors $(g \circ f)$ est continue en x_0 .
- 3 **Inégalités**
Si f est **continue** en x_0 alors f est **bornée** au voisinage de x_0 .
Si f est **continue** en x_0 et si $f(x_0) > 0$ alors $f(x) > 0$ au voisinage de x_0 .

Remarque 3.8 (Extension aux fonctions à valeurs complexes (facultatif))

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, telle que $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ où f_1 et f_2 sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors

la fonction f est **continue** en $x_0 \in \mathbb{R}$ ssi les fonctions f_1 et f_2 sont **continues** en x_0 .

41

Exemple 2.35 (Fonction « sinus cardinal »)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

1 Étude en 0

- De l'encadrement géométrique

$$\forall x \in]0, \pi[, 2 \sin \frac{x}{2} < x < 2 \tan \frac{x}{2}$$

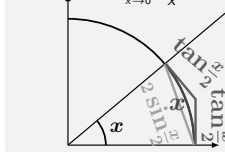
équivalent à

$$\forall x \in]0, \pi/2[, \sin x < x < \tan x$$

(l'angle x étant mesuré en radians), on obtient $\forall x \in]0, \pi/2[, \cos x < f(x) < 1$ duquel on déduit $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.

Par parité, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



- Avec $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, on tire

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$$

- Avec $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$, on tire

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

2 Étude en $\pm\infty$

- De l'encadrement $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq 1$,

on tire $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq \frac{1}{|x|}$ duquel

on déduit $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.



36

Remarque 3.4 (Discontinuité)

- 1 Pour une fonction f , il existe deux types de discontinuité en $x_0 \in D_f$:

- **discontinuité de première espèce** : f admet une limite à droite et une limite à gauche en x_0 , mais l'une au moins de ces deux limites n'est pas égale à $f(x_0)$.
- **discontinuité de deuxième espèce** : f n'admet pas de limite à droite et/ou à gauche en x_0 .

- 2 Si $x_0 \notin D_f$ et si f admet pour limite le réel ℓ en x_0 , on peut prolonger f en posant :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

La fonction $\tilde{f}$ ainsi obtenue est continue en x_0 : on dit qu'on a **prolongé f par continuité en x_0** .

Exemple 3.5 (Prolongement par continuité)

Soit f la fonction de la variable réelle définie par $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$.

- On a $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et $\forall x \in D_f, f(x) = x + 1$.
- Le prolongement par continuité ainsi construit s'écrit simplement : $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x + 1$
- Donc $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ et l'on peut prolonger la fonction f par continuité en 2 en posant $\tilde{f}(2) = 3$.

39

Définition 3.9 (Continuité sur un intervalle)

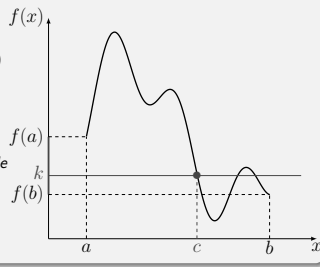
La fonction f est dite **continue sur l'intervalle I** lorsque f est continue en tout x_0 de I .

Théorème 3.10 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction **continue** sur $[a, b]$.

- Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c dans l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(c) = k$.

- En particulier, si $f(a)$ et $f(b)$ sont de **signes opposés**, alors il existe au moins un réel c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = 0$.



42

Exemple 2.36 (Fonctions logarithme/exponentielle)

- De l'encadrement géométrique

$$\forall x \in]1, +\infty[, \frac{x-1}{x} < \ln x < x-1$$

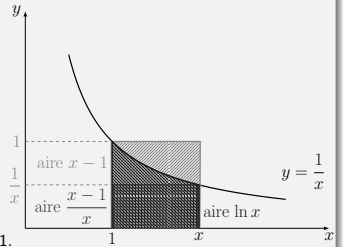
on obtient $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$.

Par symétrie, on tire

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1.$$

- Par changements de variables, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$



Exemple 2.37 (Fonctions hyperboliques)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = 1 \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh x}{x} = 1 \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

37

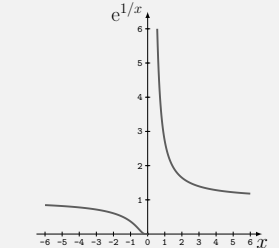
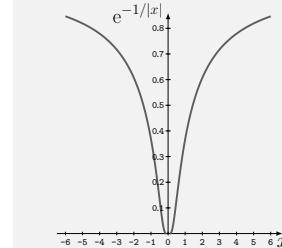
Exemple 3.6 (Exponentielle-inverse)

1 Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto e^{-1/|x|}$

2 Soit $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto e^{1/x}$

La fonction f admet une limite **finie** en 0 qui vaut 0. Elle est donc **prolongeable** par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

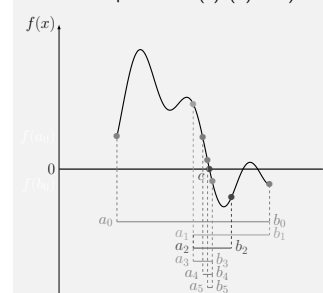
La fonction g admet une limite à gauche **finie** en 0 qui vaut 0 et une limite à droite **infinie** en 0. Elle présente donc une **discontinuité de deuxième espèce** et n'est pas prolongeable par continuité en 0.



40

Exemple 3.11 (Algorithme de dichotomie (facultatif))

Soit f est une fonction **continue** sur $[a, b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés (ou de manière équivalente $f(a)f(b) < 0$).



- Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
On a $f(a_0)f(b_0) < 0$, donc f admet un zéro dans $[a_0, b_0]$.
- Posons $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ et $b_1 = b_0$.
On a $f(a_1)f(b_1) < 0$, donc f admet un zéro dans $[a_1, b_1]$.
- Posons $a_2 = a_1$ et $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$.
On a $f(a_2)f(b_2) < 0$, donc f admet un zéro dans $[a_2, b_2]$.
- Posons $a_3 = a_2$ et $b_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$.
On a $f(a_3)f(b_3) < 0$, donc f admet un zéro dans $[a_3, b_3]$.
- Posons $a_4 = \frac{a_3+b_3}{2}$ et $b_4 = b_3$.
On a $f(a_4)f(b_4) < 0$, donc f admet un zéro dans $[a_4, b_4]$.
- Posons $a_5 = \frac{a_4+b_4}{2}$ et $b_5 = b_4$.
On a $f(a_5)f(b_5) < 0$, donc f admet un zéro dans $[a_5, b_5]$.

43

Exemple 3.11 (Algorithme de dichotomie (facultatif))

On construit ainsi de proche en proche deux suites de points $a_0, a_1, a_2, \dots$ et $b_0, b_1, b_2, \dots$ dans $[a, b]$ telles que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'intervalle $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ est l'une des deux "moitiés" de $[a_n, b_n]$ et $f(a_n)f(b_n) \leq 0$.

On a donc une suite d'intervalles **fermés emboîtés** $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$ de longueurs $\ell_0 = b_0 - a_0$, $\ell_1 = \ell_0/2$, $\ell_2 = \ell_0/2^2, \dots$

En conséquence, les deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient :

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante ;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$.

On a donc affaire à deux suites **adjacentes** (cf. cours du 2nd semestre). Elles sont **convergentes** et admettent la **même limite** $c \in [a, b]$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = c \quad (\text{ou encore } \bigcap_{n=0}^{+\infty} [a_n, b_n] = \{c\}).$$

Par continuité, on en tire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f(c).$$

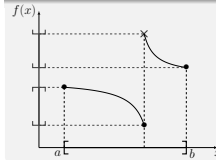
Enfin, la propriété $f(a_n)f(b_n) \leq 0$ entraîne $f(c)^2 \leq 0$ soit $f(c) = 0$. L'algorithme de dichotomie conduit donc à un zéro de la fonction f .

44

Corollaire 3.12 (Image d'un intervalle)

L'image d'un **intervalle** par une fonction **continue** est un **intervalle**.

Remarque 3.13 (Discontinuité)



Si la fonction présente au moins une discontinuité, son image peut **ne pas** être un intervalle.

Exemple 3.14 (Fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ (facultatif))

$$\text{Soit } f \text{ la fonction définie par } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

La fonction f prend les deux seules valeurs 0 et 1. On a $f(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$ et plus généralement, pour tous réels a, b tels que $a < b$, il existe un **rationnel** et un **irrationnel** entre a et b (on dit que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont **denses** dans $\mathbb{R}$), donc $f([a, b]) = \{0, 1\}$. La fonction f n'est donc **continue sur aucun intervalle** (non réduit à un point) de $\mathbb{R}$.

45

Théorème 3.15 (Image d'un fermé borné : théorème des valeurs extrêmes)

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle **fermé borné** $[a, b]$.

Alors f est **bornée** sur $[a, b]$ et **atteint** ses bornes inférieure et supérieure m et M :

$$m = \inf_{x \in [a, b]} f(x) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$$

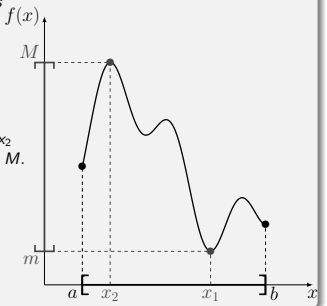
$$\text{et } M = \sup_{x \in [a, b]} f(x) = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

Autrement dit : il existe deux réels x_1 et x_2 dans $[a, b]$ tels que $f(x_1) = m$ et $f(x_2) = M$.

De plus,

$$f([a, b]) = [m, M].$$

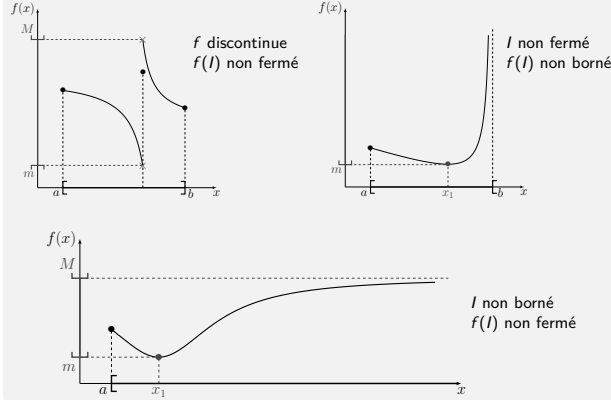
L'image d'un intervalle **fermé borné** par une fonction **continue** est encore un intervalle **fermé borné**.



46

Remarque 3.16 (Contre-exemples)

Le théorème peut être mis en défaut si l'une des hypothèses n'est pas satisfaite.



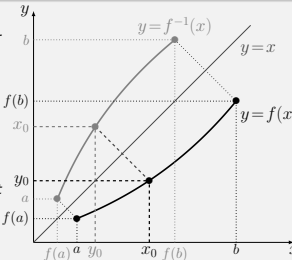
47

Théorème 3.17 (Théorème de la bijection)

Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur un **intervalle** I .

- $f(I)$ est un **intervalle** dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I .
- f réalise une **bijection** de I sur $f(I)$.
- f^{-1} est **continue et strictement monotone** sur $f(I)$, de même sens de variation que f .

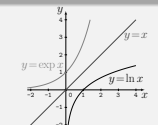
Rappel : les courbes représentatives de f et f^{-1} dans un repère orthonormal du plan sont **symétriques** l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Exemple 3.18 (Logarithme/exponentielle)

La fonction $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est **continue, strictement croissante** de limites $-\infty$ et $+\infty$ en 0^+ et $+\infty$ respectivement.

Elle est donc **bijective**. Sa réciproque est appelée **fonction exponentielle** et notée $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$.



48

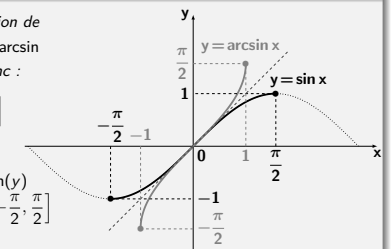
Proposition-définition 3.19 (Fonction arcsin)

La fonction $\sin$ réalise une **bijection** de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$ et l'on note $\arcsin$ sa fonction réciproque. On a donc :

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x \mapsto \arcsin(x)$$

$$\text{et } \begin{cases} y = \arcsin(x) \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sin(y) \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$



Proposition 3.20

$\arcsin$ est **continue, strictement croissante et impaire** sur $[-1, 1]$.

$$\begin{cases} \forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\arcsin(x)) = x \\ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \arcsin(\sin(x)) = x \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2} \\ \forall x \in [-1, 1], \quad \tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$$

49

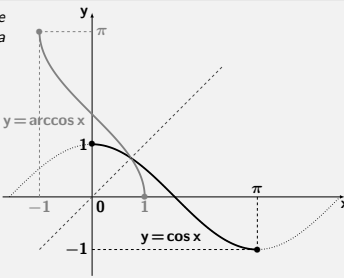
Proposition-définition 3.21 (Fonction arccos)

La fonction $\cos$ réalise une **bijection** de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$ et l'on note $\arccos$ sa fonction réciproque. On a donc :

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$x \mapsto \arccos(x) \quad y = \arccos(x)$$

$$\text{et } \begin{cases} y = \arccos(x) \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \cos(y) \\ y \in [0, \pi] \end{cases}$$



Proposition 3.22

$$\begin{cases} \arccos \text{ est continue, strictement décroissante sur } [-1, 1]. \\ \forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2} \\ \forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \quad \tan(\arccos(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \\ \forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\arccos(x)) = x \\ \forall x \in [0, \pi], \quad \arccos(\cos(x)) = x \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \forall x \in [-1, 1], \quad \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

50

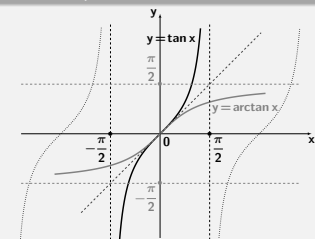
Proposition-définition 3.23 (Fonction arctan)

La fonction $\tan$ réalise une **bijection** de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$ et l'on note $\arctan$ sa fonction réciproque. On a donc :

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$x \mapsto \arctan(x) \quad y = \arctan(x)$$

$$\text{et } \begin{cases} y = \arctan(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \tan(y) \\ y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$



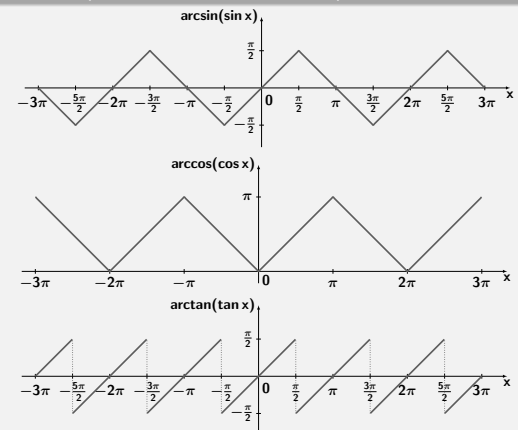
Proposition 3.24

$\arctan$ est **continue, strictement croissante et impaire** sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\arctan(x)) = x \\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \arctan(\tan(x)) = x \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$$

51

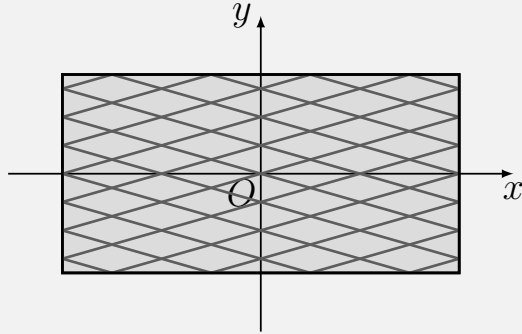
Exemple 3.25 (Courbes en « dents de scie »)



52

Exemple 3.26 (Billard rectangulaire (facultatif))

$$\text{Courbe paramétrée } \begin{cases} x(t) = 2 \arcsin(\sin(7t)) \\ y(t) = \arcsin(\sin(4t)) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$



53

4. Comparaison locale de deux fonctions

c) Négligeabilité

Définition 4.1 (Négligeabilité)

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 .
On dit que f est **négligeable devant g au voisinage de x_0** lorsqu'il existe une fonction ε définie sur un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 telle que

$$\forall x \in \mathcal{V} \setminus \{x_0\}, \quad f(x) = \varepsilon(x)g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

On note alors $f = o(g)$ ou encore $f(x) = o(g(x))$ (notation de **Landau**).

Remarque : il s'agit d'une notation abusive, on devrait noter $f \in o(g)$.

Proposition 4.2 (Formulation simple)

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 , g ne s'annulant pas au voisinage de x_0 . Alors $f = o(g) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = 0$.

En particulier : $f = o(1) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f = 0$.

Exemple 4.3 (Croissances comparées (cf. proposition 2.31))

- ① Si $\alpha > \beta$, alors $x^\alpha = o(x^\beta)$ et $x^\beta = o(x^\alpha)$.
- ② Pour tous $\alpha > 0$ et $\beta > 0$: $x^\alpha = o(e^{\beta x})$ et $e^{\beta x} = o\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)$.
- $(\ln x)^\alpha = o(x^\beta)$ et $|\ln x|^\alpha = o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$.

56

4. Comparaison locale de deux fonctions

d) Équivalence de fonctions

Proposition 4.8 (Relation d'équivalence)

Soit f , g et h trois fonctions définies au voisinage de x_0 .

- ① **Réflexivité :** $f \sim f$.
- ② **Symétrie :** $f \sim g \iff g \sim f$.
- ③ **Transitivité :** $\left[f \sim g \text{ et } g \sim h \right] \implies f \sim h$.

Proposition 4.9 (Limites et équivalence)

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 .

- ① $\forall \ell \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff f \sim \ell$.
- ② $\forall \ell \in \mathbb{R}^*$, $\left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell \right] \implies f \sim g$.
- ③ $\forall \ell \in \mathbb{R}$, $\left[f \sim g \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell \right] \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

Remarque 4.10

Lorsque f admet une limite **nulle** ou **infinie** en x_0 , la notion d'équivalence est non-triviale... Dans ce cas, un problème intéressant est de rechercher une fonction simple g tel que $f \sim g$.

59

4. Comparaison locale de deux fonctions

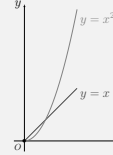
a) Problématique

Problématique

Comparaison d'« **ordre de grandeur** » de deux fonctions au voisinage d'un point.

① Exemple 1 : comparaison des fonctions identité et carré

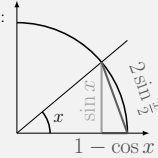
- x^2 est « **beaucoup plus grand** » que x lorsque x est « **grand** » ;
- x^2 est « **beaucoup plus petit** » que x lorsque x est « **petit** ».



② Exemple 2 : comparaison des fonctions cosinus et sinus

Dans le triangle ci-contre, lorsque l'angle x est « **petit** » :

- les trois côtés sont « **petits** »,
- le côté vertical ($\sin x$) et l'hypoténuse ($2 \sin \frac{x}{2}$) sont du « **même ordre de grandeur** »,
- alors que le côté horizontal ($1 - \cos x$) est « **beaucoup plus petit** ».



54

4. Comparaison locale de deux fonctions

c) Négligeabilité

Proposition 4.4 (Opérations)

Soit f , g , h et k quatre fonctions définies au voisinage de x_0 .

$$\text{① Transitivité : } \left. \begin{array}{l} f = o(g) \\ g = o(h) \end{array} \right\} \implies f = o(h).$$

② Opérations :

$$\bullet \text{ Multiplication par un réel : } \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad f = o(g) \implies \alpha f = o(g).$$

$$\bullet \text{ Addition : } \left. \begin{array}{l} f = o(h) \\ g = o(h) \end{array} \right\} \implies f + g = o(h).$$

$$\bullet \text{ Multiplication : } \left. \begin{array}{l} f = o(h) \\ g = o(k) \end{array} \right\} \implies f \times g = o(hk).$$

$$\bullet \text{ Puissances : } f = o(h) \implies \begin{cases} \forall \alpha > 0, & |f|^\alpha = o(|h|^\alpha) \\ \forall \alpha < 0, & |h|^\alpha = o(|f|^\alpha) \end{cases}.$$

57

4. Comparaison locale de deux fonctions

d) Équivalence de fonctions

Proposition 4.11 (Équivalence et négligeabilité)

- ① $f \sim g \iff (f - g) = o(g)$ (et aussi $o(f)$). On écrit alors $g = f + o(f)$.
- ② Si $\left[f \sim g \text{ et } g = o(h) \right]$ ou si $\left[f = o(g) \text{ et } g \sim h \right]$, alors $f = o(h)$.
- ③ Si $f \sim g$ et si g est non nulle au voisinage de x_0 , alors f et g sont de même signe au voisinage de x_0 .

Remarque 4.12 (Notion relative/absolue)

On fera attention de ne pas confondre $f \sim g$ avec $\lim_{x \rightarrow x_0} (f - g) = 0$. En effet :

$$f \sim g \iff f = g + o(g) \quad \text{alors que} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f - g) = 0 \iff f = g + o(1).$$

Contre-exemple : $\bullet x^2 + x \sim x^2$ alors que $(x^2 + x) - x^2 = x \not\sim 0$.

$$\bullet (x^2 - x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad \text{alors que} \quad x^2 \not\sim x.$$

Proposition 4.13 (Multiplication/division/puissances)

Soit f , g , h , k des fonctions définies au voisinage de x_0 et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si $f \sim h$ et $g \sim k$, alors :

$$\bullet f \times g \sim h \times k \quad \bullet \frac{f}{g} \sim \frac{h}{k} \quad \bullet |f|^\alpha \sim |h|^\alpha$$

60

4. Comparaison locale de deux fonctions

b) Outil de comparaison

Outil de comparaison

Un outil mathématique pour comparer les « **ordres de grandeur** » de deux fonctions f et g au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ est la limite du rapport de f par g .

Trois cas de figure se présentent :

- ① soit la limite de $\frac{f}{g}$ en x_0 est **finie non nulle**, c'est donc un réel **non nul** ℓ .
Dans ce cas, la limite de $\frac{f}{\ell g}$ en x_0 vaut 1 ;
- ② soit la limite de $\frac{f}{g}$ en x_0 est **infinie ou nulle**.
Lorsqu'elle est **infinie**, la limite de $\frac{g}{f}$ en x_0 est alors **nulle** ;
- ③ soit la limite de $\frac{f}{g}$ en x_0 **n'existe pas**. (Cette situation ne sera pas considérée ici.)

Les deux premiers cas conduisent à deux situations génériques : on va développer deux notions de comparaisons associées aux cas où la limite de $\frac{f}{g}$ en x_0 vaut **0** ou **1**.

Formellement :

- lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = 0$, on introduira la notion de « **négligeabilité locale (ou asymptotique)** » ;
- lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = 1$, on introduira la notion d'« **équivalence locale (ou asymptotique)** ».

55

4. Comparaison locale de deux fonctions

d) Équivalence de fonctions

Définition 4.5 (Équivalence)

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 .

On dit que f est **équivalente à g au voisinage de x_0** lorsqu'il existe une fonction φ définie sur un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 telle que

$$\forall x \in \mathcal{V} \setminus \{x_0\}, \quad f(x) = \varphi(x)g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 1.$$

On note alors $f \sim g$ ou encore $f(x) \sim g(x)$ (notation de **Landau**).

Proposition 4.6 (Formulation simple)

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 .

① Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0 , alors

$$f \sim g \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

② On a $f \sim 0 \iff f$ est **nulle** au voisinage de x_0 .

Remarque 4.7

$f \sim g$ n'implique pas nécessairement l'existence d'une limite en x_0 pour f et g .
Mais si ces limites **existent**, alors elles sont **égales**.

58

4. Comparaison locale de deux fonctions

d) Équivalence de fonctions

Proposition 4.11 (Équivalence et négligeabilité)

- ① $f \sim g \iff (f - g) = o(g)$ (et aussi $o(f)$). On écrit alors $g = f + o(f)$.
- ② Si $\left[f \sim g \text{ et } g = o(h) \right]$ ou si $\left[f = o(g) \text{ et } g \sim h \right]$, alors $f = o(h)$.
- ③ Si $f \sim g$ et si g est non nulle au voisinage de x_0 , alors f et g sont de même signe au voisinage de x_0 .

Remarque 4.12 (Notion relative/absolue)

On fera attention de ne pas confondre $f \sim g$ avec $\lim_{x \rightarrow x_0} (f - g) = 0$. En effet :

$$f \sim g \iff f = g + o(g) \quad \text{alors que} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f - g) = 0 \iff f = g + o(1).$$

Contre-exemple : $\bullet x^2 + x \sim x^2$ alors que $(x^2 + x) - x^2 = x \not\sim 0$.

$$\bullet (x^2 - x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad \text{alors que} \quad x^2 \not\sim x.$$

Proposition 4.13 (Multiplication/division/puissances)

Soit f , g , h , k des fonctions définies au voisinage de x_0 et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si $f \sim h$ et $g \sim k$, alors :

$$\bullet f \times g \sim h \times k \quad \bullet \frac{f}{g} \sim \frac{h}{k} \quad \bullet |f|^\alpha \sim |h|^\alpha$$

4. Comparaison locale de deux fonctions

d) Équivalence de fonctions

Définition 4.14 (Dérivabilité)

Soit f une application d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$ et x_0 un point situé à l'intérieur de I .

- On dit que f est **dérivable en x_0** si l'application $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite **finie** en x_0 .
- On note alors cette limite **$f'(x_0)$** et on l'appelle le **nombre dérivé de f en x_0** :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Proposition 4.15 (Dérivabilité et comparaison)

Supposons la fonction f **dérivable** en x_0 . Alors :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Cette relation fournit un **développement limité d'ordre 1 en x_0** .

En conséquence :

- ① Si $f'(x_0) \neq 0$ alors : $f(x) - f(x_0) \sim f'(x_0)(x - x_0)$.
- ② Si $f'(x_0) = 0$ alors : $f(x) - f(x_0) = o(x - x_0)$.

61

Ce résultat permet d'établir la plupart des équivalents usuels à connaître :

Exemple 4.16 (Équivalents usuels)

1 Fonctions exponentielle/logarithme/puissance :

$$\bullet e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad \bullet \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad \bullet (1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$$

2 Fonctions trigonométriques :

$$\bullet \sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad \bullet \tan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad \bullet \cos x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

$$\bullet \arcsin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad \bullet \arctan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

3 Fonctions hyperboliques :

$$\bullet \operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad \bullet \operatorname{th} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad \bullet \operatorname{ch} x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

$$\bullet \operatorname{ch} x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2} \quad \bullet \operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$$

62

Exemple 4.19 (Une fonction hyperbolique)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \operatorname{sh} x + \alpha \operatorname{th} x$.

1 Analyse en 0 : on a $\operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et $\operatorname{th} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.

• Si $\alpha \neq -1$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} (\alpha + 1)x$.

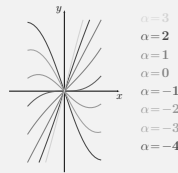
• Si $\alpha = -1$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} o(x)$.

Dans ce cas :

$$f(x) = \operatorname{sh} x - \operatorname{th} x = \operatorname{th} x (\operatorname{ch} x - 1).$$

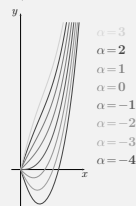
$$\text{Or } \operatorname{th} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \text{ et } \operatorname{ch} x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

$$\text{On obtient alors } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^3}{2}.$$

2 Analyse en +∞ : on a $\operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$ et $\operatorname{th} x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1$.

$$\text{Or } 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{e^x}{2}\right).$$

$$\text{On en déduit que } f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}.$$



65

Proposition 4.21 (Composition « à droite »)

Soit x_0 et t_0 dans $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 et φ une fonction telle que $f \circ \varphi$ et $g \circ \varphi$ existent au voisinage de t_0 .

$$\text{Si } f \underset{x_0}{\sim} g \text{ et } \lim_{t_0} \varphi = x_0, \text{ alors } f \circ \varphi \underset{t_0}{\sim} g \circ \varphi.$$

Remarque 4.22 (Composition « à gauche »)

Il n'y a pas de règle générale pour la composition « à gauche » :

En général, si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de x_0 et ψ une fonction telle que $\psi \circ f$ et $\psi \circ g$ existent au voisinage de x_0 ,

$$f \underset{x_0}{\sim} g \not\Rightarrow \psi \circ f \underset{x_0}{\sim} \psi \circ g.$$

Contre-exemple : • On a $x^2 + x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$ mais $e^{x^2+x} \not\sim e^{x^2}$.

• On a $1 + x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + x$ mais $\ln(1 + x^2) \not\sim \ln(1 + x)$.

Proposition 4.23 (Cas de l'exponentielle et du logarithme (facultatif))

1 Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 .

$$e^f \underset{x_0}{\sim} e^g \iff \lim_{x_0} (f - g) = 0.$$

2 Soit f et g sont définies et strictement positives au voisinage de x_0 .

Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell \in [0, +\infty] \setminus \{1\}$, alors : $\ln(f) \underset{x_0}{\sim} \ln(g)$.

68

En règle générale, on n'ajoute pas d'équivalents, c'est-à-dire :

$$\left(f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1 \text{ et } f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2 \right) \text{ n'implique pas } f_1 + f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 + g_2.$$

On a toutefois les résultats suivants :

Proposition 4.17 (Somme et équivalence)

1 Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $h = o(g)$ alors $f + h \underset{x_0}{\sim} g$.

2 Si $f = o(g)$ alors $f + g \underset{x_0}{\sim} g$.

3 Soit f_1, f_2 et g trois fonctions définies au voisinage de x_0 et α_1, α_2 deux réels tels que

$$f_1 \underset{x_0}{\sim} \alpha_1 g \text{ et } f_2 \underset{x_0}{\sim} \alpha_2 g.$$

Il y a alors deux cas à distinguer pour la somme $f_1 + f_2$:

• Si $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$ alors $f_1 + f_2 \underset{x_0}{\sim} (\alpha_1 + \alpha_2)g$.

• Si $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ alors $f_1 + f_2 \underset{x_0}{\sim} o(g)$.

63

Exemple 4.20 (Un calcul de limite/asymptote)

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Analyse en $+\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + ax + b} - cx$.

1 On a $x^2 + ax + b \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$ puis $\sqrt{x^2 + ax + b} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$.

• Si $c \neq 1$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} (1-c)x$,

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty.$$

• Si $c = 1$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} o(x)$.

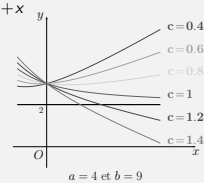
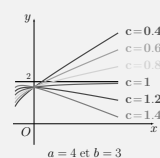
$$\text{Dans ce cas, } f(x) = \sqrt{x^2 + ax + b} - x = \frac{ax + b}{\sqrt{x^2 + ax + b} + x}.$$

$$\text{Or } \sqrt{x^2 + ax + b} + x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2x.$$

$$\text{On obtient alors } f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \begin{cases} \frac{a}{2} & \text{si } a \neq 0 \\ \frac{b}{2x} & \text{si } a = 0 \text{ et } b \neq 0 \end{cases}$$

(on a $f(x) = 0$ lorsque $a = b = 0$ et $c = 1$)

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{a}{2}.$$



66

Notions à retenir

- Maîtrise de la valeur absolue
- Borne supérieure/inférieure
 - * Identification et détermination
- Limites
 - * Maîtrise des techniques de calculs
 - * Théorème de la limite monotone
 - * Recherche d'asymptote
 - * Limites usuelles à connaître...
- Continuité ponctuelle
 - * Prolongement par continuité
 - * Opérations
 - * Théorèmes fondamentaux (TVI/TVE/théorème de la bijection)
- Fonctions trigonométriques réciproques
 - * Graphes et quelques propriétés à connaître
 - * Maîtrise de la réciproque

69

Exemple 4.18 (Fonctions polynômes/fractions rationnelles)

1 Soit m et n deux entiers naturels tels que $m \leq n$, $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n$ des réels tels que $a_m \neq 0$ et $a_n \neq 0$, et P la fonction polynôme définie pour tout réel x par $P(x) = \sum_{k=m}^n a_k x^k$. Alors :

$$P(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_m x^m \text{ et } P(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} a_n x^n.$$

Exemple : pour $P(x) = 3x^4 - 7x^3 + 5x^2 - x$, on a $P(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x$ et $P(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} 3x^4$.

2 Soit P une fonction polynôme non nulle et α une racine de P d'ordre de multiplicité μ . Alors :

$$P(x) \underset{x \rightarrow \alpha}{\sim} \frac{P^{(\mu)}(\alpha)}{\mu!} (x - \alpha)^\mu.$$

Exemple : pour $P(x) = 3x^4 - 7x^3 + 5x^2 - x$, on a $P(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} 2(x - 1)^2$.

3 Soit p et q deux entiers naturels, $a_p, a_{p-1}, a_{p-2}, \dots, a_0$ et $b_q, b_{q-1}, b_{q-2}, \dots, b_0$ des réels tels que $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$, et P et Q les fonctions polynômes définies

pour tout réel x par $P(x) = \sum_{k=0}^p a_k x^k$ et $Q(x) = \sum_{k=0}^q b_k x^k$. Alors :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{a_p}{b_q} x^{p-q}.$$

64

Exemple 4.20 (Un calcul de limite/asymptote)

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Analyse en $+\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + ax + b} - cx$.

2 Application : considérons la fonction g définie par

$$g(x) = \sqrt{x^2 + ax + b}.$$

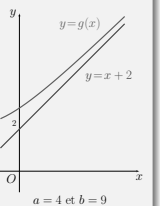
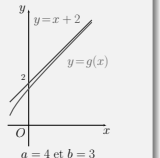
• En choisissant $c = 1$ dans f , on voit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[g(x) - \left(x + \frac{a}{2} \right) \right] = 0$

donc $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote $\mathcal{D}$ en $+\infty$ d'équation $y = x + \frac{a}{2}$.

$$\text{Puis } g(x) - \left(x + \frac{a}{2} \right) = \frac{b - \frac{a^2}{4}}{\sqrt{x^2 + ax + b} + \left(x + \frac{a}{2} \right)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{b - \frac{a^2}{4}}{2x} \text{ si } b \neq \frac{a^2}{4}$$

(on a $g(x) = x + \frac{a}{2}$ lorsque $b = \frac{a^2}{4}$).

On en déduit que $\mathcal{C}_g$ est au-dessus (resp. au-dessous) de $\mathcal{D}$ au voisinage de $+\infty$ lorsque $b > \frac{a^2}{4}$ (resp. $b < \frac{a^2}{4}$).



67

Proposition 4.21 (Composition « à droite »)

Soit x_0 et t_0 dans $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 et φ une fonction telle que $f \circ \varphi$ et $g \circ \varphi$ existent au voisinage de t_0 .

$$\text{Si } f \underset{x_0}{\sim} g \text{ et } \lim_{t_0} \varphi = x_0, \text{ alors } f \circ \varphi \underset{t_0}{\sim} g \circ \varphi.$$

Remarque 4.22 (Composition « à gauche »)

Il n'y a pas de règle générale pour la composition « à gauche » :

En général, si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de x_0 et ψ une fonction telle que $\psi \circ f$ et $\psi \circ g$ existent au voisinage de x_0 ,

$$f \underset{x_0}{\sim} g \not\Rightarrow \psi \circ f \underset{x_0}{\sim} \psi \circ g.$$

Contre-exemple : • On a $x^2 + x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$ mais $e^{x^2+x} \not\sim e^{x^2}$.

• On a $1 + x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + x$ mais $\ln(1 + x^2) \not\sim \ln(1 + x)$.

Proposition 4.23 (Cas de l'exponentielle et du logarithme (facultatif))

1 Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 .

$$e^f \underset{x_0}{\sim} e^g \iff \lim_{x_0} (f - g) = 0.$$

2 Soit f et g sont définies et strictement positives au voisinage de x_0 .

Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell \in [0, +\infty] \setminus \{1\}$, alors : $\ln(f) \underset{x_0}{\sim} \ln(g)$.

68

Notions à retenir

- Notions de négligeabilité et d'équivalence asymptotiques
 - * Comparaison locale de fonctions, ordre de grandeur local
 - * Exemples usuels à connaître
 - * Détermination d'équivalents par opérations diverses
 - * Utilisation pour les calculs de limites
 - * Étude de l'allure locale d'une courbe
 - * Détermination de branches infinies, d'asymptotes

70

Compléments	Et pour aller plus loin...
INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON Continuité Discontinuité Aimé Lachal http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_continuite/continuite0.html INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON Dérivabilité Non dérivabilité Aimé Lachal http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_Lhopital/Lhopital0.html INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON Suites récurrentes Aimé Lachal http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_suites_recurrentes/suites_recurrentes0.html	