

Intégrales multiples

Aimé Lachal

Cours d'OMNI
1^{er} cycle, 1^{re} année

Sommaire

- 1 Intégrale simple
 - 2 Intégrale double
 - Définition
 - Propriétés
 - Calcul par intégrations successives
 - Changement de variable
 - 3 Intégrales triples
 - Définition
 - Calcul par intégrations successives
 - Changement de variable

1. Intégrale simple

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. On considère une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Définition 1.1 (Sommes de Riemann)

On subdivise l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles $[a_k, a_{k+1}]$, avec $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$. On introduit la somme des aires algébriques des rectangles de largeur $a_{k+1} - a_k$ et de hauteur $f(x_k)$ où $x_k \in [a_k, a_{k+1}]$. Cette somme est appelée **somme de Riemann** de la fonction f sur $[a, b]$. On a donc

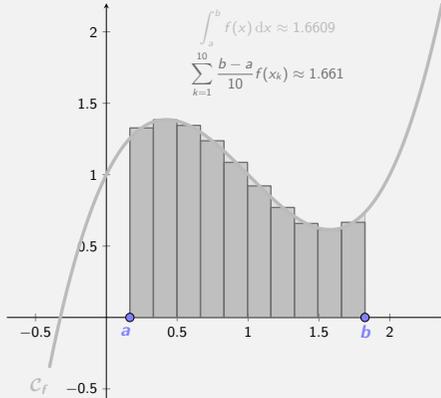
$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(a_{k+1} - a_k).$$

L'aire « algébrique » signifie qu'on compte l'aire du rectangle négativement lorsque $f(x_k) < 0$.

1

1. Intégrale simple

Visualisation



2

1. Intégrale simple

Théorème-définition 1.2 (Intégrale de Riemann)

Pour toute subdivision $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ et pour toute suite de points $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ telle que $x_k \in [a_k, a_{k+1}]$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, la suite des sommes de Riemann de f est convergente.

Sa limite qui ne dépend donc que de f et de $[a, b]$, est appelée **l'intégrale de f sur $[a, b]$** et notée $\int_a^b f(x) dx$ ou simplement $\int_a^b f$.

Autrement dit :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(a_{k+1} - a_k).$$

Remarque 1.3

La variable d'intégration x n'a aucune importance, elle peut être remplacée par n'importe quelle autre différente des bornes de l'intervalle (lettre muette) :

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du = \dots$$

3

1. Intégrale simple

Interprétation

1 Interprétations géométriques de l'intégrale

Le réel $\int_a^b f$ représente dans un repère orthonormé l'**aire algébrique** entre la courbe de f , l'axe (Ox) et les droites verticales $x = a$ et $x = b$. « Algébrique » signifie que l'on compte négativement les aires des parties situées au-dessous de (Ox) et positivement celles situées au-dessus.

Lorsque $f = 1$, Le réel $\int_a^b f = b - a$ représente simplement la **longueur** de l'intervalle $[a, b]$.

2 Interprétation de la notation

L'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ représente la somme infinie de toutes les aires des rectangles de hauteur $f(x)$ et de largeur « **infinitésimale** » dx . C'est le mathématicien allemand Leibniz qui en 1675 a introduit les notations dx et \int , qui représente un S déformé pour « **somme** », en latin *summa*. Leibniz parlait de « **Calcul Sommatoire** ». Les Bernoulli préférèrent par la suite le terme « **Calcul Intégral** », c'est cette appellation qui l'a emportée mais le \int pratique d'utilisation est resté.

4

1. Intégrale simple

Voici quelques propriétés fondamentales de l'intégrale qui se déduisent directement de la définition par sommes d'aires algébriques.

Propriété 1.4 (Propriétés)

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, avec $a < b$.

- 1 **Linéarité** : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.
- 2 **Relation de Chasles** : si c est un point de $]a, b[$ alors $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
- 3 **Positivité** : si $f \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f \geq 0$.
- 4 **Croissance** : si $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
- 5 **Inégalité « triangulaire »** : $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.

Remarque 1.5 (Calcul)

Calculer une intégrale peut se faire dans des cas simples à l'aide de calcul de primitive. On dispose de nombreuses techniques calculatoires. Sinon, dans le cas général on fait un calcul approché par des méthodes numériques.

5

1. Intégrale simple

Généralisation

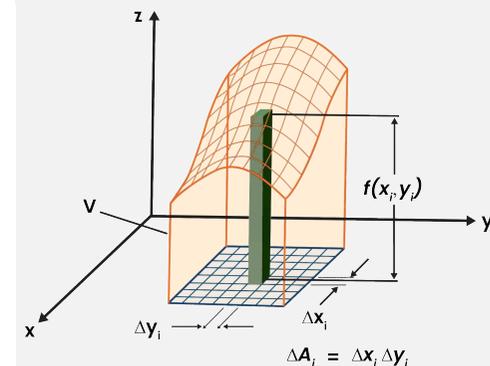
- **Intégrale simple** $\int \leftrightarrow$ aire (parfois longueur) :
définition par subdivision d'un intervalle + somme des aires de petits rectangles
- **Intégrale double** $\iint \leftrightarrow$ volume (parfois aire) :
définition par subdivision d'un domaine du plan + somme des volumes de petits parallélépipèdes
- **Intégrale triple** $\iiint \leftrightarrow$ hypervolume (parfois volume) :
définition par subdivision d'un domaine de l'espace + somme des volumes de petits parallélotopes...

6

2. Intégrale double

a) Définition

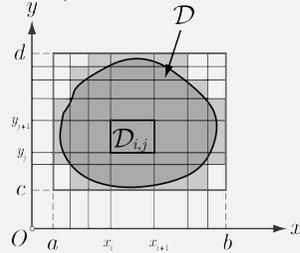
Principe (pour une fonction définie sur un domaine rectangulaire)



7

Préliminaire : pavage d'un domaine

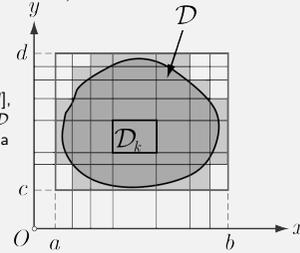
Soit D un domaine du plan fermé et borné, de bord C^1 . D est alors contenu dans un rectangle $[a, b] \times [c, d]$.
 À partir de deux subdivisions $a = x_0 < x_1 \dots < x_m = b$ de $[a, b]$ et $c = y_0 < y_1 \dots < y_n = d$ de $[c, d]$, on construit une subdivision (ou « pavage ») $(D_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ avec $D_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \cap D$.



Préliminaire : pavage d'un domaine

Soit D un domaine du plan fermé et borné, de bord C^1 . D est alors contenu dans un rectangle $[a, b] \times [c, d]$.
 À partir de deux subdivisions $a = x_0 < x_1 \dots < x_m = b$ de $[a, b]$ et $c = y_0 < y_1 \dots < y_n = d$ de $[c, d]$, on construit une subdivision (ou « pavage ») $(D_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ avec $D_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \cap D$.

Si (D_k) est un pavage de $[a, b] \times [c, d]$, la somme des aires des D_k intersectant D tend vers l'aire de D lorsque le pas de la subdivision tend vers 0.



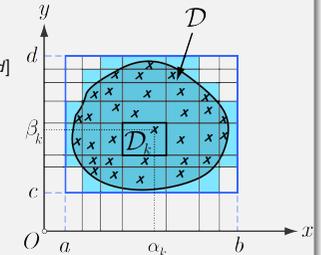
Définition 2.1 (Somme de Riemann)

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
 $(x, y) \mapsto f(x, y)$

Principe :

- on subdivise le rectangle $[a, b] \times [c, d]$
- dans chaque D_k intersectant D , on choisit un point $m_k = (\alpha_k, \beta_k)$
- on définit la somme de Riemann correspondante :

$$S = \sum_k \text{Aire}(D_k) \times f(m_k)$$



Théorème-définition 2.2 (Intégrale double)

En affinant la subdivision, les sommes de Riemann convergent vers une limite ne dépendant que de f et de D , qui définit l'intégrale double de f sur D , notée $\iint_D f(x, y) dx dy$, ou en abrégé $\iint_D f$.

Interprétation

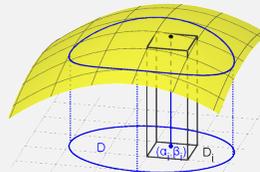
Interprétation de la notation

Le nombre réel $\iint_D f(x, y) dx dy$ représente la somme infinie de tous les volumes des parallélépipèdes rectangles de hauteur $f(x, y)$ et de base infinitésimale le rectangle d'aire $dx \times dy$. La somme est « double » car on somme suivant deux directions.

Interprétation géométrique

La valeur de l'intégrale $\iint_D f(x, y) dx dy$ représente le volume algébrique compris entre :

- * la surface d'équation $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$
- * le plan $z = 0$
- * la surface cylindrique s'appuyant sur le contour de D .



En particulier, pour $f = 1 : \iint_D dx dy = \text{Aire}(D)$.

Généralisation des propriétés de l'intégrale simple (interprétation géométrique similaire).

Propriété 2.3 (Propriétés)

- **Linéarité** : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \iint_D (\lambda f + \mu g) = \lambda \iint_D f + \mu \iint_D g$
- **Relation de « Chasles » sur la réunion de deux domaines disjoints** : si $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ alors $\iint_{D_1 \cup D_2} f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f$
- **Positivité** : si $f \geq 0$ sur D , $f(x, y) \geq 0$ alors $\iint_D f \geq 0$
- **Croissance** : si $f \geq g$ sur D , alors $\iint_D f \geq \iint_D g$
- **Inégalité « triangulaire »** : $\left| \iint_D f \right| \leq \iint_D |f|$

Le calcul d'une intégrale double est parfois possible lorsque l'on peut trouver une manière simple de paramétrer le domaine D (en coordonnées cartésiennes, ou polaires...).

On présente ci-dessous une méthode de calcul par intégrations successives.

Théorème 2.4 (Théorème de Fubini : intégration en y puis x)

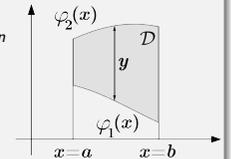
Soit D un domaine de \mathbb{R}^2 et $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction continue. Supposons que D se décrive selon

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ et } \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

avec φ_1, φ_2 continues.

Alors :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$



Le calcul d'une intégrale double est parfois possible lorsque l'on peut trouver une manière simple de paramétrer le domaine D (en coordonnées cartésiennes, ou polaires...).

On présente ci-dessous une méthode de calcul par intégrations successives.

Théorème 2.4 (Théorème de Fubini : intégration en x puis y)

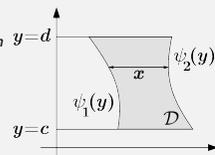
Soit D un domaine de \mathbb{R}^2 et $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction continue. Supposons que D se décrive selon

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d \text{ et } \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

avec ψ_1, ψ_2 continues.

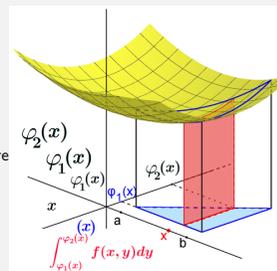
Alors :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{y=c}^{y=d} \left(\int_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$



Interprétation géométrique

- Domaine D en bleu.
- Surface $z = f(x, y)$ en jaune.
- Pour x fixé entre a et b , y varie entre $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ (courbe rouge).

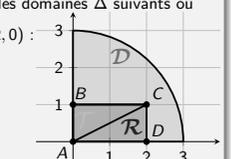


- $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$ représente l'aire rose située sous la courbe $f(x, y)$ à $x = cste$ (intégrale simple).
- $\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$ représente le volume du solide situé sous la surface jaune, à l'aplomb du domaine bleu.

Exemple 2.5

Calcul de l'intégrale double $I_\Delta = \iint_\Delta (xy) dx dy$ pour les domaines Δ suivants où A, B, C, D sont les points $A(0, 0), B(0, 1), C(2, 1), D(2, 0)$:

- ① le rectangle \mathcal{R} de sommets $ABCD$;
- ② le triangle \mathcal{T} de sommets ABC ;
- ③ le quart de disque \mathcal{D} de centre A et de rayon 3.

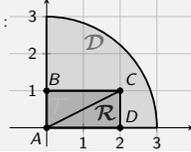


Étape 1 — Description du domaine

- ① $\mathcal{R} : 0 \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq 1$;
- ② (AC) a pour équation $y = \frac{1}{2}x$ donc $\mathcal{T} : 0 \leq x \leq 2$ et $\frac{1}{2}x \leq y \leq 1$;
- ③ l'équation du cercle est $x^2 + y^2 = 3^2$ donc $\mathcal{D} : 0 \leq x \leq 3$ et $0 \leq y \leq \sqrt{9 - x^2}$.

Exemple 2.5

Calcul de l'intégrale double $I_{\Delta} = \iint_{\Delta} (xy) dx dy$ pour les domaines Δ suivants où A, B, C, D sont les points $A(0, 0), B(0, 1), C(2, 1), D(2, 0)$:



- 1 le rectangle \mathcal{R} de sommets $ABCD$;
- 2 le triangle \mathcal{T} de sommets ABC ;
- 3 le quart de disque \mathcal{D} de centre A et de rayon 3.

• Étape 2 — Calcul de l'intégrale

1 $I_{\mathcal{R}} = \int_{x=0}^{x=2} \left(\int_{y=0}^{y=1} (xy) dy \right) dx = \int_0^2 \left[\frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x dx = \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_0^2 = 1$

2 $I_{\mathcal{T}} = \int_{x=0}^{x=2} \left(\int_{y=x/2}^{y=1} (xy) dy \right) dx = \int_0^2 \left[\frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=x/2}^{y=1} dx = \int_0^2 x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} x^2 \right) dx = \left[\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{32} x^4 \right]_0^2 = 1 - \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$

3 $I_{\mathcal{D}} = \int_{x=0}^{x=3} \left(\int_{y=0}^{y=\sqrt{9-x^2}} (xy) dy \right) dx = \int_0^3 \left[\frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=0}^{y=\sqrt{9-x^2}} dx = \int_0^3 \frac{1}{2} x (9 - x^2) dx = \left[\frac{9}{4} x^2 - \frac{1}{8} x^4 \right]_0^3 = \frac{81}{4} - \frac{81}{8} = 10,125$

- Pour une **intégrale simple**, il y trois modifications dues au changement de variable $x = \varphi(u)$:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = \int_{u=\varphi^{-1}(a)}^{u=\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

- 1 les variables : u au lieu de x
- 2 la longueur élémentaire dx qui devient $\varphi'(u) du$
- 3 l'intervalle d'intégration : $x \in [\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)] \iff u \in [a, b]$

- Il en est de même pour une **intégrale double** :

- 1 les variables : (u, v) au lieu de (x, y) ,
- 2 la surface élémentaire : $dS = dx dy$ qui devient $dS = \left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v} \right\| du dv$
- 3 le domaine d'intégration : $(x, y) \in \mathcal{D} \iff (u, v) \in \Delta$

Au final, après le changement de variables $(x, y) = \varphi(u, v)$:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} g(u, v) \left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v} \right\| du dv$$

- Exemple en **coordonnées polaires** :

$$\left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} \right\| dr d\theta = \left\| \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \right\| dr d\theta = r dr d\theta$$

Définition 3.1 (Somme de Riemann)

Soit \mathcal{D} un domaine de \mathbb{R}^3 fermé borné et $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. \mathcal{D} est contenu dans un pavé $[a, b] \times [c, d] \times [e, g]$ sur lequel on peut définir des subdivisions.

Dans chaque \mathcal{D}_k intersectant \mathcal{D} on choisit un point $m_k = (\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$. On définit la **somme de Riemann** correspondante :

$$S = \sum_k f(m_k) \times (\text{volume de } \mathcal{D}_k)$$

Théorème-définition 3.2 (Intégrale triple)

En affinant la subdivision, les sommes de Riemann convergent vers une limite ne dépendant que de f et de \mathcal{D} , qui définit l'intégrale triple de f sur \mathcal{D} , notée

$$\iiint_{\mathcal{D}} f(x, y, z) dx dy dz \text{ ou en abrégé } \iiint_{\mathcal{D}} f.$$

Remarque 3.3

Les intégrales triples ont des propriétés analogues à celles énoncées précédemment au paragraphe 2.b pour les intégrales doubles.

Corollaire 2.6 (Séparation des variables)

- Dans le cas particulier où $\mathcal{D} = [a, b] \times [c, d]$ est un pavé, alors l'ordre d'intégration n'a pas d'importance.
- Si de plus f est une fonction à « **variables séparables** », i.e. $\forall (x, y) \in \mathcal{D}, f(x, y) = g(x) \times h(y)$, alors :

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \left(\int_a^b g(x) dx \right) \times \left(\int_c^d h(y) dy \right)$$

Exemple 2.7

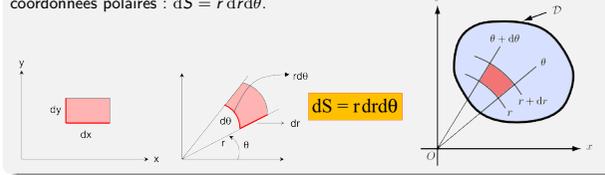
En reprenant l'exemple 2.5, dans le cas du rectangle $\mathcal{R} = ABCD$, on trouve

$$I_{\mathcal{R}} = \int_{x=0}^{x=2} \left(\int_{y=0}^{y=1} (xy) dy \right) dx = \left(\int_0^2 x dx \right) \times \left(\int_0^1 y dy \right) = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^2 \times \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

Le cas du triangle $\mathcal{T} = ABC$ et du quart de disque \mathcal{D} ne permettent pas d'utiliser la séparation des variables car ces domaines ne sont pas des pavés, donc les bornes sont dépendantes les unes des autres.

Coordonnées polaires

Partant du déplacement élémentaire $d\vec{OM}$ de $\vec{OM} = r \vec{e}_r$: $d\vec{OM} = (dr)\vec{e}_r + (r d\theta)\vec{e}_\theta$, on en déduit intuitivement la **surface élémentaire** dS en coordonnées polaires : $dS = r dr d\theta$.



Théorème 2.8 (Changement de variables en coordonnées polaires)

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

- 1 On remplace (x, y) par $(r \cos \theta, r \sin \theta)$,
- 2 On remplace $dx dy$ par $r dr d\theta$,
- 3 On trouve une description en polaire du domaine \mathcal{D} .

Propriété 3.4

Si $f(x, y, z) = 1$ alors on obtient simplement le volume du domaine \mathcal{D} puisqu'on somme les volumes élémentaires de tous les petits pavés qui constituent \mathcal{D} :

$$\iiint_{\mathcal{D}} dx dy dz = \text{Volume}(\mathcal{D})$$

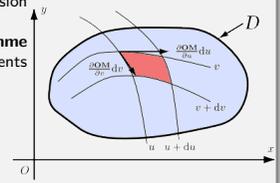
Changement de variable

$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy$ est la **somme infinie** pour chaque point $M(x, y) \in \mathcal{D}$ des **volumes** algébriques des parallélépipèdes rectangles de hauteur $f(x, y)$ et de base la **surface élémentaire** $dS = dx \times dy$ en coordonnées cartésiennes.

L'intégrale double $\iint_{\mathcal{D}} f$ peut donc s'écrire symboliquement $\iint_{M \in \mathcal{D}} f(M) dS$. Cette quantité ne dépend pas des coordonnées x et y mais uniquement du domaine \mathcal{D} .

Si on choisit des coordonnées (u, v) , la subdivision de \mathcal{D} se fait le long des courbes coordonnées. La surface élémentaire devient le **parallélogramme élémentaire** construit sur les vecteurs tangents $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial u} du$ et $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial v} dv$:

$$dS = \left\| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial u} du \wedge \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v} dv \right\|$$



Exemple 2.9 (Aire d'un disque)

Retrouvons l'aire d'un disque de rayon R à l'aide d'une intégrale double en polaires.

- La description **cartésienne** du disque $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ n'est pas pratique...
- La description **polaire** du disque en revanche est plus adaptée :

$$\Delta = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta < 2\pi\} = [0, R] \times [0, 2\pi[$$

Avec cette approche :

$$\begin{aligned} \text{Aire}(\mathcal{D}) &= \iint_{\mathcal{D}} dx dy = \iint_{\Delta} r dr d\theta = \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} r dr d\theta \\ &= \left(\int_0^R r dr \right) \times \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) = \frac{1}{2} R^2 \times 2\pi = \pi R^2 \end{aligned}$$

Principe d'intégrations successives

Une **intégrale triple** va pouvoir se décomposer en :

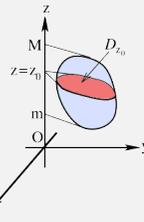
- une **intégrale simple** suivie d'une **intégrale double** : $\iiint_{\mathcal{D}} = \int \dots \int \dots$
- une **intégrale double** suivie d'une **intégrale simple** : $\iiint_{\mathcal{D}} = \int \dots \int \dots$
- trois **intégrales simples** successives : $\iiint_{\mathcal{D}} = \int \dots \int \dots \int \dots$

Intégrale double suivie d'une simple

Supposons que le domaine soit défini par ses coupes horizontales :

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : m \leq z \leq M, (x, y) \in D_z\}$$

où D_{z_0} représente la section du domaine D par le plan \mathcal{P}_{z_0} d'équation $z = z_0 : D_{z_0} = D \cap \mathcal{P}_{z_0}$



Théorème 3.5 (Théorème de Fubini)

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_{z=m}^{z=M} \left(\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

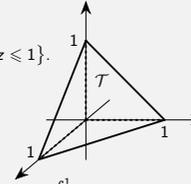
Remarque 3.6

On a privilégié la variable z , mais on pourrait faire de même en privilégiant x ou y .

Exemple 3.7 (Volume d'un tétraèdre)

Calculer le volume d'un tétraèdre régulier \mathcal{T} de côté 1.

- **Première méthode.** Description cartésienne de \mathcal{T} : $\mathcal{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$.
Pour $z \in [0, 1]$ fixé, \mathcal{T}_z est un triangle rectangle de côtés $1 - z$, donc d'aire $\frac{1}{2}(1 - z)^2$.



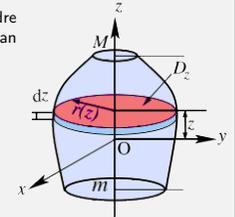
$$\begin{aligned} \text{Volume}(\mathcal{T}) &= \iiint_{\mathcal{T}} dx dy dz = \int_{z=0}^{z=1} \left(\iint_{\mathcal{T}_z} dx dy \right) dz = \int_0^1 (\text{Aire}(\mathcal{T}_z)) dz \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}(1 - z)^2 dz = \left[-\frac{1}{6}(1 - z)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

- **Deuxième méthode.** Description cartésienne de \mathcal{T} : $\mathcal{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$.
Donc $\text{Volume}(\mathcal{T}) = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} dz \right) dy \right) dx = \frac{1}{6}$.

Application : volume d'un solide de révolution

En tournant autour de l'axe (Oz) , une courbe engendre un solide de révolution \mathcal{D} . La coupe de \mathcal{D} avec le plan de cote z est un disque D_z de rayon $r(z)$. Le volume de \mathcal{D} est égal à :

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\mathcal{D}} dx dy dz = \int_{z=m}^{z=M} \left(\iint_{D_z} dx dy \right) dz \\ &= \int_m^M (\text{Aire}(D_z)) dz = \int_m^M \pi r^2(z) dz \end{aligned}$$



Interprétation : on découpe le solide \mathcal{D} en un nombre infini de tranches cylindriques élémentaires d'épaisseur dz et de volume $dV(z) = \pi r^2(z) dz : V = \int_m^M dV(z)$.

Exercice 3.8 (Volume d'un cône de révolution)

Retrouver la formule du volume d'un cône de révolution de hauteur h et de rayon R :

$$V = \frac{\pi}{3} R^2 h$$

Volume élémentaire

Si les nouvelles variables sont $(u, v, w) \in \Delta$ au lieu de $(x, y, z) \in D$, alors l'expression $f(x, y, z)$ devient une expression de la forme $g(u, v, w)$.

Le **déplacement élémentaire** $d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v} dv + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial w} dw$ issu du point M génère un **parallélépipède élémentaire** dont les arêtes sont construites selon les trois déplacements élémentaires $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial u} du, \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v} dv$ et $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial w} dw$.

Le volume de ce parallélépipède est donné par le produit mixte

$$\left| \left(\frac{\partial \vec{OM}}{\partial u} du, \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v} dv, \frac{\partial \vec{OM}}{\partial w} dw \right) \right|$$

Théorème 3.9 (Changement de variables)

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Delta} g(u, v, w) \left| \left(\frac{\partial \vec{OM}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{OM}}{\partial w} \right) \right| du dv dw$$

Volume élémentaire en cylindriques

Partant du vecteur déplacement

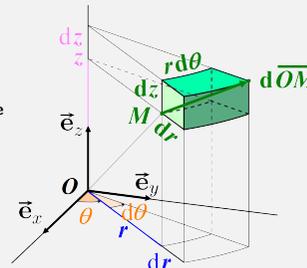
$$\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

conduisant au **déplacement élémentaire**

$$d\vec{OM} = dr\vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z,$$

on en tire le **volume élémentaire** :

$$dV = r dr d\theta dz$$



Théorème 3.10 (En coordonnées cylindriques)

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Delta} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz$$

Volume élémentaire en sphériques

Partant du vecteur déplacement

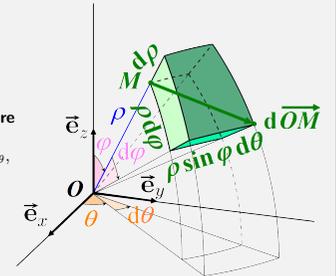
$$\vec{OM} = \rho \vec{e}_\rho$$

conduisant au **déplacement élémentaire**

$$d\vec{OM} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \vec{e}_\varphi + \rho \sin \varphi d\theta \vec{e}_\theta,$$

on en tire le **volume élémentaire** :

$$dV = \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi$$



Théorème 3.11 (En coordonnées sphériques)

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Delta} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi$$

Exemple 3.12 (Volume d'une boule)

Le volume de la boule \mathcal{B} de rayon R se calcule facilement en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\mathcal{B}} dV = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\rho^2 \sin \varphi) d\rho d\theta d\varphi = \int_0^R (\rho^2 d\rho) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \right) \\ &= \left(\int_0^R \rho^2 d\rho \right) \times \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \times \left(\int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \right) = 2 \times 2\pi \times \frac{4}{3} R^3 = \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

Résumé des changements de variables usuels (2D/3D)

$dS = dx dy$	(cartésiennes)
$= r d\rho d\theta$	(polaires)
$dV = dx dy dz$	(cartésiennes)
$= r dr d\theta dz$	(cylindriques)
$= \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi$	(sphériques)

Notions à retenir

- Intégrales doubles et triples
 - * Interprétation géométrique
 - * Maîtrise du calcul analytique :
 - * intégrations successives (théorème de Fubini)
 - * changements de variables (polaires, cylindriques, sphériques)

Annexes

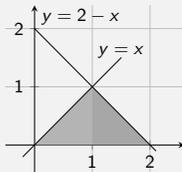
- Quelques exercices
- Applications à la géométrie des masses

Exercice A.1 (Domaine triangulaire)

Calculer $I = \iint_D y \, dx \, dy$ sur $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \text{ et } x + y \leq 2\}$.

Solution

D est un triangle plein. En traçant les deux droites frontières, il se décompose selon $D = D_1 \cup D_2$ où



$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1 \text{ et } 0 \leq y \leq x\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq 2 - x\}$$

avec $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

La relation de Chasles et le théorème de Fubini donnent

$$I = \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=x} y \, dy \right) dx + \int_{x=1}^{x=2} \left(\int_{y=0}^{y=2-x} y \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=x} dx + \int_1^2 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=2-x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 dx + \int_1^2 \frac{1}{2} (2-x)^2 dx = \dots = \frac{1}{3}$$

Objet à différentes échelles

- 1. **Échelle atomique** : il y a de l'espace entre la matière. La répartition des masses est **discrète** et la masse d'un objet D est

$$M = \sum_{\text{particules} \in D} m_{\text{particules}}$$

→ non calculable en pratique.

- 2. **Échelle intermédiaire** : la matière n'est plus considérée comme **discrète** mais **continue**. Autour de chaque point P de l'objet, la répartition des masses est considérée comme homogène et symboliquement

$$M = \int_{P \in D} dm(P)$$

(somme continue de toutes les petites masses élémentaires).

Définition B.2 (Centre d'inertie : cas discret)

Le **centre d'inertie** d'un objet assimilé à un ensemble de n points P_i de masse m_i est le barycentre des (P_i, m_i) . On le nomme aussi **centre de masse**, ou **centre de gravité** si le champ de gravité est uniforme.

$$M = \sum_{i=1}^n m_i \quad \text{et} \quad \vec{OG} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{OM}_i$$

En projetant cette relation vectorielle sur chacun des trois axes (on passe aux coordonnées), on obtient ses coordonnées :

$$x_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

$$y_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i$$

$$z_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i$$

Exercice A.2 (Domaine rectangulaire)

Calculer $K = \iint_R x e^{x+y} \, dx \, dy$ sur le rectangle $\mathcal{R} = [0, 1] \times [0, 1]$.

Solution

$K = \int_0^1 x e^x \, dx \times \int_0^1 e^y \, dy = 1 \times (e - 1)$ (à l'aide d'une intégration par parties pour la première intégrale).

Exercice A.3 (Domaine rectangulaire)

Calculer $J = \iint_R (x+y)^2 \, dx \, dy$ sur le domaine $\mathcal{R} = [0, 1] \times [0, 2]$.

Solution

On peut intégrer en x puis y , ou y puis x . Par exemple

$$J = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=2} (x+y)^2 \, dx \, dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{3} (x+y)^3 \right]_{y=0}^{y=2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{3} ((x+2)^3 - x^3) \, dx = \left[\frac{1}{12} ((x+2)^4 - x^4) \right]_0^1 = \frac{16}{3}$$

Masse volumique d'un solide homogène

La **masse volumique** ou **densité volumique** d'un solide est la masse par unité de volume (référence 1 pour l'eau : 1 litre d'eau pèse 1 kg) :

$$\rho = \frac{\text{Masse}}{\text{Volume}}$$

donc

$$M = \rho V$$

Masse volumique d'un solide non homogène

La **densité volumique** est définie localement en tout point P par $\rho(P)$. Un bout infinitésimal du solide autour du point P aura donc une densité volumique

$$\rho(P) = \frac{dm(P)}{dV}$$

Dans ce cas :

$$M = \iiint_D \rho(P) \, dV$$

Définition B.3 (Centre d'inertie : cas continu)

Dans le cas continu : le **centre d'inertie** d'un solide D de masse M et de masse volumique ρ est le point G défini par :

$$\vec{OG} = \frac{1}{M} \iiint_D \vec{OP} \rho(P) \, dV$$

De même cette relation vectorielle se traduit en projetant sur chaque axe par :

$$x_G = \frac{1}{M} \iiint_D x \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

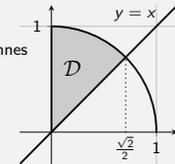
$$y_G = \frac{1}{M} \iiint_D y \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$$z_G = \frac{1}{M} \iiint_D z \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

Exercice A.4 (Domaine circulaire)

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq x, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Calculer $I = \iint_D x \, dx \, dy$ à l'aide des coordonnées cartésiennes puis des coordonnées polaires.



Solution

- **En cartésien** (pas adapté!) : $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$.

$$I = \int_{x=0}^{x=\sqrt{2}/2} \int_{y=x}^{y=\sqrt{1-x^2}} x \, dy \, dx = \int_{x=0}^{x=\sqrt{2}/2} x [y]_{y=x}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}/2} (x\sqrt{1-x^2} - x^2) dx = \left[-\frac{1}{3} ((1-x^2)^{3/2} + x^3) \right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$$

- **En polaire** (bien adapté!) : $D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq 1, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$.

$$I = \iint_D (r \cos \theta) (r \, dr \, d\theta) = \left(\int_0^1 r^2 \, dr \right) \times \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta \right) = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$$

Calcul de la masse d'un objet en dimension 1 ou 2

- Lorsqu'un objet est assimilé à un fil de longueur L (portion de courbe Γ), on parle de masse ou densité **linéique** et un morceau infinitésimal de la courbe est $d\ell$.

Masse M d'un solide Γ de masse linéique λ :

$$\text{Homogène : } M = \lambda L \quad \text{Non homogène : } M = \int_{\Gamma} \lambda(P) \, d\ell$$

- Lorsqu'un objet est assimilé à une plaque d'aire S (portion de surface Σ), on parle de masse ou densité **surfaccique** et un morceau infinitésimal est dS .

Masse M d'un solide Σ de masse surfaccique σ :

$$\text{Homogène : } M = \sigma S \quad \text{Non homogène : } M = \iint_{\Sigma} \sigma(P) \, dS$$

Exemple B.1

Le cube C est défini par les inégalités $0 \leq x, y, z \leq 2$ et de densité volumique donnée par $\rho(x, y, z) = \frac{1}{z+1} \text{ Kg.m}^{-3}$. Calculer sa masse.

$$M = \iiint_C \rho(P) \, dV = \iiint_C \frac{1}{z+1} \, dx \, dy \, dz = \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 \frac{1}{z+1} \, dx \, dy \, dz$$

$$= \left(\int_0^2 dx \right) \left(\int_0^2 dy \right) \left(\int_0^2 \frac{1}{z+1} dz \right) = 2 \times 2 \times [\ln(|z+1|)]_0^2 = 4 \ln 3 \text{ kg.}$$

L'étude des symétries permet de simplifier l'étude du centre d'inertie.

Propriété B.4 (Plan de symétrie)

Si l'objet D et sa distribution de masses admettent un plan de symétrie \mathcal{P} , alors le centre d'inertie G appartient à \mathcal{P} .

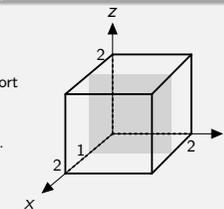
Exemple B.5 (Centre d'inertie d'une sphère)

Le centre d'inertie d'une sphère homogène est son centre car elle admet une infinité de plans de symétries passant tous par le centre.

Exemple B.6 (Centre d'inertie d'un cube)

Le cube de l'exemple B.1 est symétrique par rapport au plan d'équation $x = 1$.

Sa distribution de masses $\rho(x, y, z) = \frac{1}{z+1}$ aussi. Donc son centre d'inertie est dans le plan $x = 1$.



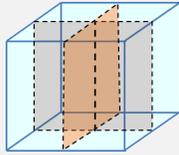
Exercice B.7

Déterminer le centre d'inertie G du cube C défini par les inéquations $0 \leq x, y, z \leq 2$ et de distribution de masse $\rho(x, y, z) = \frac{1}{z+1}$.

Solution

C et ρ sont symétriques par rapport au plan $x = 1$ donc $x_G = 1$.

C et ρ sont symétriques par rapport au plan $y = 1$ donc $y_G = 1$.



Calcul explicite :

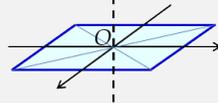
$$z_G = \frac{1}{M} \iiint_D z \frac{1}{z+1} dx dy dz = \frac{1}{4 \ln 3} \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 \frac{z}{z+1} dx dy dz$$

$$= \frac{1}{4 \ln 3} \int_0^2 dx \int_0^2 dy \int_0^2 \frac{z+1-1}{z+1} dz = \frac{1}{\ln 3} [z - \ln|z+1|]_0^2$$

$$= \frac{2 - \ln 3}{\ln 3} \approx 0,82$$

Exercice B.10 (Moment d'inertie d'une plaque rectangulaire)

Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène rectangulaire de côtés a et b de masse M par rapport à l'axe Δ perpendiculaire en son centre.



Solution (complément)

Déterminons les valeurs de a et b qui minimisent J_Δ en gardant M et S constants.

- Comme S est constante, $b = \frac{S}{a}$, donc

$$J_\Delta = \frac{M(a^2 + b^2)}{12} = \frac{M}{12} \left(a^2 + \frac{S^2}{a^2} \right)$$

- En dérivant cette fonction de a on obtient :

$$J'_\Delta(a) = \frac{M}{12} \left(2a - 2 \frac{S^2}{a^3} \right) = \frac{M}{6} \left(\frac{a^4 - S^2}{a^3} \right)$$

- Le minimum est atteint au point d'annulation de J'_Δ (on vérifie qu'il s'agit bien d'un minimum en contrôlant que J'_Δ est bien négative puis positive) :

$$J'_\Delta(a) = 0 \iff a^4 - S^2 = 0 \iff a = \sqrt{S} \iff a = b$$

Ainsi la plaque est carrée.

Le moment d'inertie J_Δ d'un solide S par rapport à un axe Δ caractérise sa distribution de masse autour de Δ . Sa valeur quantifie la résistance du solide à la mise en rotation d'axe Δ .

Définition B.8 (Moment d'inertie)

- Cas discret** : pour un solide constitué de n point P_i de masse m_i à une distance r_i d'un axe Δ , $J_\Delta = \sum_{i=1}^n r_i^2 m_i$.

- Cas continu** : pour un solide de densité ρ telle que $dm(P) = \rho(P) dV$,

$$J_\Delta = \iiint_S r^2(P) dm = \iiint_S \rho(P) r^2(P) dV$$

Il dépend de la masse et du carré de la distance par rapport à l'axe de rotation.

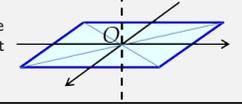
Remarque B.9

- Comme r représente la distance par rapport à l'axe de rotation, on utilisera fréquemment les coordonnées cylindriques.
- On peut de même définir le moment d'inertie J_O par rapport à un point O en prenant la distance par rapport à O .
- La formule s'adapte en dimensions 1 et 2 :

$$J_\Delta = \int_S \lambda(P) r^2(P) d\ell \quad \text{et} \quad J_\Delta = \iint_S \sigma(P) r^2(P) dS$$

Exercice B.10 (Moment d'inertie d'une plaque rectangulaire)

Calculer le moment d'inertie d'une plaque homogène rectangulaire de côtés a et b de masse M par rapport à l'axe Δ perpendiculaire en son centre.



Solution

$$J_\Delta = \iint_R \sigma(x, y) r(x, y)^2 dx dy$$

- Plaque homogène de masse M , de surface $S = ab$ donc $\sigma(x, y) = \sigma = \frac{M}{ab}$.
- Choix d'un repère où le paramétrage du rectangle est simple :

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2} \right\}$$

- Axe $\Delta = (Oz)$, distance d'un point $P(x, y)$ à Δ : $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\bullet \text{ Calcul : } J_\Delta = \iint_R \frac{M}{ab} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{M}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} \left[\int_{-b/2}^{b/2} (x^2 + y^2) dy \right] dx$$

$$= \frac{M}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{-b/2}^{b/2} dx = \frac{M}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} \left(bx^2 + \frac{b^3}{12} \right) dx$$

$$= \frac{M}{ab} \left[\frac{bx^3}{3} + \frac{b^3}{12} x \right]_{-a/2}^{a/2} = \frac{M(a^2 + b^2)}{12}$$