Cours: Définir un compact.

Exercice 1:

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ des suites nulles à partir d'un certain rang. Construire deux normes non-équivalentes sur cet espace.

Exercice 2:

Soient E un espace euclidien et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On appelle i_α l'application de $E\backslash\{0\}$ dans $E\backslash\{0\}$, définie par $i_\alpha(x) = \frac{\alpha}{||x||^2}x$.

1. Montrer que $i_\alpha \circ i_\alpha = \mathrm{Id}$.
2. Soit S la sphère de centre a passant par 0. Montrer que $i_\alpha(S\backslash\{0\})$ est un hyperplan affine orthogonal à a, ne passant pas par 0.
3. Réciproquement, étudier l'image par i_α d'un hyperplan affine ne passant pas par 0.
4. Soit S' une sphère de rayon r et de centre a ne passant pas par 0. Montrer que si $\alpha = ||a||^2 - r^2$, alors $i_\alpha(S) = S$.
5. Déterminer $i_\alpha(S')$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

amiel@math.univ-lyon1.fr

Cours:

Propriétés sur les ouverts d'un espace vectoriel.

Exercice 1:

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ des suites nulles à partir d'un certain rang. Construire deux normes non-équivalentes sur cet espace.

Exercice 2:

Soit E et $\mathfrak{J}$ deux ensembles. On appelle $P(E, \mathfrak{J})$ la propriété suivante:
$\forall U \in \mathfrak{J} \quad U \subseteq E$; + *insérer les propriétés de la question de cours*

Lorsqu'elle est vérifiée, on dira que "$\mathfrak{J}$ définie une topologie sur E". Soit:

$$Z : \begin{cases} \mathbb{R}[X_1, ..., X_n] & \rightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \\ P & \mapsto & \{(x_i) \in \mathbb{R}^n | P(x_1, ..., x_n) = 0\} \end{cases}$$

et $\mathfrak{J} := \left\{ \mathbb{R}^n \backslash Z(P) \quad | \quad P \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n] \right\}$

Montrer que $\mathfrak{J}$ ainsi construit définit une topologie sur $E = \mathbb{R}^n$. Existe-t-il une norme sur $\mathbb{R}^n$ dont les ouverts serait tous les éléments de $\mathfrak{J}$?

amiel@math.univ-lyon1.fr

Cours:

Identité du parallélogramme.

Exercice 1:

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ des suites nulles à partir d'un certain rang. Construire deux normes non-équivalentes sur cet espace.

Exercice 2:

Soit E un espace Euclidien. Soit $f : E \to E$ une fonction telle que $f(0) = 0$ et telle que $\forall x, y \in E$, on ait $||f(x) - f(y)|| = ||x - y||$.

1. Montrer que $||f(x)|| = ||x||$.
2. Montrer que $\langle f(x)|f(y)\rangle = \langle x|y\rangle$.
3. Soit (e_i) une base ortho-normée de E, exprimer f en fonction de $(f(e_i))$.
4. En déduire que f est un automorphisme orthogonal de E.
5. Que ce passe-t-il si $f(0) \neq 0$.

amiel@math.univ-lyon1.fr

Cours:

Définition des normes équivalentes et Théorème(s) d'Équ
des Normes

Exercice 1:

On travail dans l'espace vectoriel $C = \mathscr{C}^0\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. On considère la suite $(f_n) \in C^{\mathbb{N}}$ définie par:

$$f_n : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} 2nt & \text{si} & t \in [0, \frac{1}{2n}] \\ -2nt+2 & \text{si} & t \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si} & t \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases} \end{cases}$$

Montrer que $||\cdot||_\infty$, $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_2$ ne sont pas équivalentes sur C.

Exercice 2:

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie de votre choix. Construire deux normes non-équivalentes dessus.

amiel@math.univ-lyon1.fr

Cours:

Expliquer le procédé de Gram-Schmidt.

Exercice 1:

Considérons l'espace vectoriel $C = \mathscr{C}^1\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. On définit:

$$||\cdot|| : \begin{cases} C & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & ||f||_\infty + ||f'||_\infty \end{cases}$$

Montrer que $||\cdot||$ est une norme et dire si elle est équivalente à $||\cdot||_\infty$ sur C.

Exercice 2:

Caractériser la compacité de $B_F(0,1)$ dans un espace préhilbertien quelconque.

amiel@math.univ-lyon1.fr

Cours Définir un espace préhilbertien.

Exercice:

On définit, pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^\beta(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la notation $||f||_{\alpha,\beta} := \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha f^{(\beta)}(x)|$. On appel $\mathcal{S}$ l'ensemble:

$$\mathcal{S} := \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \quad | \quad \forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^2 \quad ||f||_{\alpha,\beta} < \infty \right\}$$

1. Montrer que chaque $||\cdot||_{\alpha,\beta}$ définit une norme sur un espace vectoriel que l'on précisera;
2. Montrer que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel;
3. Calculer $\dim(\mathcal{S})$.
4. Monter que $(\mathcal{S}, ||\cdot||_\infty)$ est un espace vectoriel normé.
5. $\mathcal{S}$ admet-il une structure d'espace préhilbetien?
6. Montrer que $\forall p \in [1,\infty[$ la paire $(\mathcal{S}, ||\cdot||_p)$ est un espace vectoriel normé.

Exercice 2:

Caractériser la compacité de $B_F(0,1)$ dans un espace préhilbertien quelconque.

amiel@math.univ-lyon1.fr

Cours:

Formule de la projection orthogonale.

Exercice 1:

Montrer que la fonction suivante définit un produit scalaire:

$$\langle\cdot|\cdot\rangle : \begin{cases} \mathbb{M}_n(\mathbb{R})^2 & \to & \mathbb{R} \\ M, N & \mapsto & \mathrm{Tr}({}^tM \cdot N) \end{cases}$$

Exercice 2:

1) Soit E un espace vectoriel normé de boule unité B. Montrer que la fonction suivante définit une norme sur un certain espace vectoriel que l'on définira.

$$||\cdot||_{\mathrm{op}} : \begin{cases} \mathrm{End}(E) & \to & \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \\ L & \mapsto & \sup_{x \in B} ||L(x)||_E \end{cases}$$

2) Si $E = \mathbb{R}^n$, en considérant que $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, cette norme et celle de l'exercice précédent sont-elles égales? équivalentes?

3) Montrer que $||M{}^tM||_{\mathrm{op}} = ||{}^tM|| \cdot ||M||$.

amiel@math.univ-lyon1.fr

Cours:

Définir un convexe.

Exercice:

On travail dans l'espace vectoriel $C = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On appelle:

$$\Phi := \left\{\varphi \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}^+) \quad | \quad \#(\varphi^{-1}(\{0\}) < \infty\right\}$$

et pour chaque $\varphi \in \Phi$, on définit:

$$||\cdot||_\varphi : \begin{cases} C & \to & ? \\ f & \mapsto & \int_0^1 \varphi(t)\,|f(t)|\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

1. Montrer que pour chaque $\varphi \in \Phi$, $||\cdot||_\varphi$ est une norme.

2. Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ tels que $\varphi_1^{-1}(\{0\}) = \varphi_2^{-1}(\{0\}) = \emptyset$. Montrer que les normes $||\cdot||_{\varphi_1}$ et $||\cdot||_{\varphi_2}$ sont équivalentes.

3. Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ quelconques, leurs normes sont-elles toujours équivalentes?

amiel@math.univ-lyon1.fr

Pas de question de cours ; mais les rappels de cours demandés dans l'exercice qui suit seront à traiter avec autant de rigueur.

Exercice:

Soit $\big(E, (\cdot,\cdot)\big)$ un euclidien et $t \in E\backslash\{0\}$. On définit $T = \mathbb{R}\cdot t$ et $S = T^\perp$.

1. Montrer que $S \oplus T = E$.
2. Rappeler la définition des projections orthogonales $p_T : E \to T$ et $p_S : E \to S$.

Soit : $\langle\cdot|\cdot\rangle : \begin{cases} E^2 & \to \quad \mathbb{R} \\ v, w & \mapsto \big(p_S(v), p_S(w)\big) - \big(p_T(v), p_T(w)\big) \end{cases}$

3. $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est-il un produit scalaire?
4. Dans le cas $E = \mathbb{R}^2$, dessiner la boule unité $\mathcal{B}_{\langle\cdot|\cdot\rangle}(0,1) := \{v \in E | 0 \leq \langle v|v\rangle \leq 1\}$.
5. On appelle $P^+ := \{v \in E | (t, v) \geq 0\}$. Dire si $\mathcal{B}^+(0,1) := P^+ \cap \mathcal{B}_{\langle\cdot|\cdot\rangle}(0,1)$ est convexe.

On note $\mathcal{B}^+(v, \varepsilon) := v + \varepsilon\mathcal{B}^+(0,1)$. On appelle "ouvert en futur" tout ensemble U tel que pour tout $x \in U$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathcal{B}^+(x, x) \subseteq U$.

6. Après avoir rappeler les propriétés d'intersection et d'union des ouverts de E, dire si les ouverts en futur vérifient ces même propriétés.

amiel@math.univ-lyon1.fr