Cours:

Intérieur, adhérence et frontière.

Exercice 1:

Soit E un espace euclidien. Montrer que tout fermé de E est une union dénombrable de compactes.

Exercice 2:

1. Montrer qu'il existe une suite (P_n) de polynômes dans $\mathbb{R}[X]$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\deg(P_n) = n \quad \wedge \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \int_0^1 \frac{P_n(t)_n^P(t)}{\sqrt{t(1-t)}} \mathrm{d}t = \delta_{n,m}$$

2. Soit $n \geq 2$, supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ tel que $P_n(\alpha) = 0$. Montrer qu'il existe $T \in \mathbb{R}_2[X]$ unitaire et irréductible et $P \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ tel que $P_n = TP$.

3. En déduire que les racines de P_n sont toutes réelles.

4. Montrer que les racines de P_n sont simples et dans $]0, 1[$.

amiel@math.univ-lyon1.fr

Cours:

Théorème de Bolzano-Weistrass.

Exercice 1:

Donner tous les produits scalaires de l'espace vectoriel $M_{1,n}(\mathbb{R})$.

Exercice 2:

Soit K un compacte non-vide d'un certain espace vecoriel normé.
On définit l'application distance $d : K \times K \to \mathbb{R}$ par $d(x, y) = ||x - y||$.
Soit $f : K \to K$ une application telle que:

$$x \neq y \quad \Longrightarrow \quad d(f(x), f(y)) \ < \ d(x, y)$$

Montrer que f admet exactement un seul point fixe.

Cours:

Distance à un sous-espace vectoriel admettant un suplémentaire orthogonal.

Exercice 1:

Caractériser la dimention d'un préhilbertien E en fonction de la compacité de $S := \{e \in E \mid \quad ||e|| = 1\}$.

Exercice 2:

On fixe $n \in \mathbb{N}$.

1. Vérifier que $\varphi : (B, C) \mapsto \mathrm{tr}(B \cdot^t C)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

2. Soit $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ les antisymétriques. Montrer que $A_n(\mathbb{R})$ est le supplémentaire orthogonal de $S_n(\mathbb{R})$.

3. Soit $A = (a_{ik}) \in \mathbb{M}_n)$. Calculer

$$\inf \left\{ \sum_{i,j \in \mathbb{N}} (a_{ij} - m_{ij})^2 | (m_{ij}) \in S_n(\mathbb{R}) \right\}$$

en fonction des coeficients de A.

amiel@math.univ-lyon1.fr

Cours:

Procédure de Grahm Smidth.

Exercice 1:

Caractériser la dimension d'un préhilbertien E en fonction de la compacité de $B := \{e \in E \mid \quad ||e|| \leq 1\}$.

Exercice 2:

1. Montrer qu'il existe une suite (P_n) de polynômes dans $\mathbb{R}[X]$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\deg(P_n) = n \quad \wedge \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \int_0^1 \frac{P_n(t)P_m(t)}{\sqrt{t(1-t)}} \mathrm{d}t = \delta_{n,m}$$

2. Soit $n \geq 2$, supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ tel que $P_n(\alpha) = 0$. Montrer qu'il existe $T \in \mathbb{R}_2[X]$ unitaire et irréductible et $P \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ tel que $P_n = TP$.

3. En déduire que les racines de P_n sont toutes réelles.

4. Montrer que les racines de P_n sont simples et dans $]0, 1[$.

amiel@math.univ-lyon1.fr

Cours:

A dense dans B (definition + exemple).

Exercice 1:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x := (x_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ une base d'un préhilbertien réel. Montrer qu'il existe une unique base orthonormée $e := (e_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ de cet espace tel que la matrice de passage de e vers x est triangulaire supérieure, avec des coefficients diagonaux des réels strictement positifs.

Exercice 2:

Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, différent de $\{0\}$.

1. Montrer qu'il existe $a := \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$.

2. Montrer que $a > 0 \implies G = a\mathbb{Z}$.

3. Montrer que $a = 0$ implies that G is dense in $\mathbb{R}$.

4. On dit que $x \in G$ est *isolé* si il existe un ouvert U tel que $U \cap G = \{x\}$ et on dit que G est discret si tous ses elements sont isolés. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que G soit discret.

5. Soit $a, b \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est discret si et seulement si $a/b \in \mathbb{Q}$.

amiel@math.univ-lyon1.fr

Cours:

Distance à un sous-espace vectoriel admettant un suplémentaire orthogonal.

Exercice 1:

Soit E un espace euclidien. Montrer que tout fermé de E est une union dénombrable de compactes.

Exercice 2:

1. Pour tout $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ on note $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 \overline{P(t)}Q(t)\mathrm{d}t$. Vérifier que c'est un produit scalaire hermitien.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe:

$$\delta_n := \min_{(x_O,\ldots x_{n-1})\in\mathbb{C}^n} \int_0^1 \left| t^n + \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k \right|^2 \mathrm{d}t$$

On note $(a_0, ..., a_{n-1})$ un élément de $\mathbb{C}^n$ où ce minimum est atteint.
3. Montrer que $\forall m \in [\![0, n[\![$, $\int_0^1 t^m \left(t^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k\right)\mathrm{d}t = 0$.

On pose $F(X) := \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{X+k+1}$ avec $a_n := 1$.
4. Calculer $F(m)$ pour tout $m \in [\![0, n[\![$.
5. Exprimer δ_n via F.
6. Calculer F en fonction de n.
7. Calculer δ_n en fonction de n.

amiel@math.univ-lyon1.fr

Cours:

Différentes caractérisations des compactes.

Exercice 1:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x := (x_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ une base d'un préhilbertien réel. Montrer qu'il existe une unique base orthonormée $e := (e_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ de cet espace tel que la matrice de passage de e vers x est triangulaire supérieure, avec des coefficients diagonaux des réels strictement positifs.

Exercice 2:

Soit E un espace vectoriel normé et K un compact (non-vide) de E.
Soit $f : K \to K$ une application telle que pour tous $x, y \in K$:

$$x \neq y \quad \Longrightarrow \quad ||f(x) - f(y)|| \ < \ ||x - y||$$

Montrer que

$$\exists! \ l \ \in K \quad : \quad f(l) = l$$

amiel@math.univ-lyon1.fr

Cours:

A dense dans B (definition + exemple).

Exercice 1:

Donner tous les produits scalaires de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. (On pourra utiliser un isomorphims vers un espace vectoriel plus simple, ou juste une base.)

Exercice 2:

Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, différent de $\{0\}$.

1. Montrer qu'il existe $a := \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$.
2. Montrer que $a > 0 \implies G = a\mathbb{Z}$.
3. Montrer que $a = 0$ implies that G is dense in $\mathbb{R}$.
4. On dit que $x \in G$ est *isolé* si il existe un ouvert U tel que $U \cap G = \{x\}$ et on dit que G est discret si tous ses elements sont isolés. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que G soit discret.
5. Soit $a, b \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est discret si et seulement si $a/b \in \mathbb{Q}$.

amiel@math.univ-lyon1.fr

Cours:

Définition du groupe orthogonal.

Exercice 1:

Caractériser la dimension d'un préhilbertien E en fonction de la compacité de

$$B := \{e \in E \mid \quad 1/2 \leq ||e|| \leq 2\}$$

Exercice 2:

1. Pour tout $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ on note $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 \overline{P(t)} Q(t) \mathrm{d}t$. Vérifier que c'est un produit scalaire hermitien.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe:

$$\delta_n := \min_{(x_O, \dots x_{n-1}) \in \mathbb{C}^n} \int_0^1 \left| t^n + \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k \right|^2 \mathrm{d}t$$

On note $(a_0, ..., a_{n-1})$ un élément de $\mathbb{C}^n$ où ce minimum est atteint.
3. Montrer que $\forall m \in [\![0, n[\![, \int_0^1 t^m \left(t^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k\right) \mathrm{d}t = 0$.

On pose $F(X) := \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{X+k+1}$ avec $a_n := 1$.
4. Calculer $F(m)$ pour tout $m \in [\![0, n[\![$.
5. Exprimer δ_n via F.
6. Calculer F en fonction de n.
7. Calculer δ_n en fonction de n.

amiel@math.univ-lyon1.fr