

Cours:

Définition du polynôme caractéristique et propriété de ce dernier dans le cas des matrices symétriques.

Exercice 1:

Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel ouvert. Montrer que $F = E$.

Exercice 2:

Soient E un espace euclidien et p un projecteur de E .

1. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si, pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.
2. Si p et q sont deux projecteurs orthogonaux, montrer qu'ils commutent si et seulement si $p \circ q$ est un projecteur.



Cours:

Définition d'une fonction continue entre espaces vectoriels normés et caractérisation séquentielle de la continuité.

Exercice 1:

Calculer le cardinal de l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des entiers relatifs.

Exercice 2:

Soit $C := \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $F := \{f \in C \mid f(0) = 0\}$.

1. Montrer que F est fermé dans $(C, \|\cdot\|_\infty)$.
2. Montrer que F est dense dans $(C, \|\cdot\|_1)$.
3. Déterminer son adhérence dans chaque cas.



Cours:

Définition de l'adjoint d'un endomorphisme dans un espace préhilbertien. Donner une propriété (de votre choix) faisant intervenir des adjoints.

Exercice 1:

Donner un exemple d'une partie X d'un espace vectoriel normé (de votre choix) tel que :

$$X, \overset{\circ}{X}, \bar{X}, \bar{\bar{X}} \text{ et } \overset{\circ}{\bar{X}}$$

soit des ensembles tous distincts.

Exercice 2:

Soit f un endomorphisme antisymétrique d'un espace euclidien E de dimension n .

1. Montrer que pour tout $x \in E$, $\langle f(x), x \rangle = 0$.
2. Montrer que $g := \text{Id} + f$ et $g' := \text{Id} - f$ sont des automorphismes de E .
3. Montrer que $h := g' \circ g^{-1}$ est une rotation.



Cours : Caractérisation de la continuité d'une fonction entre espaces vectoriels normés par son image réciproque.

Exercice 1: Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $X \subseteq E$ tel que $\overset{\circ}{X} = \bar{X}$.

1. Montrer que X est un ouvert.
 2. Montrer que X est un fermé.
 3. Montrer que X a comme frontière \emptyset .
- Soit la fonction suivante:

$$\mathbb{1}_X : \begin{cases} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in X \\ 0 & \text{si } x \notin X \end{cases} \end{cases}$$

4. Montrer que $\mathbb{1}_X$ est une fonction continue.

Soit $x \in X$, et $y \in (E \setminus X)$ (dont on suppose l'existence):

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda x + (1 - \lambda)y \in X \\ 0 & \text{si } \lambda x + (1 - \lambda)y \notin X \end{cases} \end{cases}$$

5. Montrer que f est continue et en déduire la valeur exacte de l'ensemble X .

Exercice 2: Soit E un préhilbertien. Caractériser la dimension de E en fonction de la compacité de la boule unité (fermée) de E .



Cours:

Théorème de Bolzano-Weierstrass (dans les espaces vectoriels normés).

Exercice 1:

Soit x_1, \dots, x_n des réels dont la somme des carrés vaut

1. On note $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{ij} := x_i x_j$.

1) Montrer que A est la matrice d'une projection orthogonale (que l'on précisera).

2) Montrer que $2A - \mathbb{I}_n$ est une matrice orthogonale.

Exercice 2:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est bornée pour une certaine norme. On définit:

$$B_p := \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} A^k$$

1. Montrer que (B_p) admet au moins une valeur d'adhérence que l'on notera B_∞ .

2. Montrer que $B_\infty(\mathbb{I}_n - A) = 0$.

3. En déduire que $B_\infty^2 = B_\infty$.

4. Montrer que B_∞ est le projecteur sur $\text{Ker}(A - \mathbb{I}_n)$ parallèlement à $\text{Im}(A - \mathbb{I}_n)$.

5. Montrer que la suite (B_p) converge vers B .



Cours:

Définition du polynôme caractéristique et propriété de ce dernier dans le cas des matrices symétriques.

Exercice 1:

On note $l^\infty(\mathbb{R})$ l'espace des suites bornées et $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'espace des suites presque nulles.

Après avoir vérifié que $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \subsetneq l^\infty(\mathbb{R})$, trouver si:

- $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est un ouvert de $l^\infty(\mathbb{R})$;
- $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est un fermé de $l^\infty(\mathbb{R})$.

Exercice 2:

Soit $a < b$ des réels et $N : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une application continue telle que $\#\{x \in [a, b] \mid N(x) = 0\} < \infty$.

1. Montrer que $\langle P, Q \rangle := \int_a^b N(t) \bar{P}(t) Q(t) dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{C}[X]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Démontrer que

$$\alpha_n := \min_{(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^n} \int_a^b N(t) \left| f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k \right|^2 dt$$

est bien défini.

On note $(a_i) \in \mathbb{C}^n$ le point où ce minimum est atteint.

3. Démontrer que $\alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.



Cours : Caractérisation de la continuité d'une fonction entre espaces vectoriels normés par son image réciproque.

Exercice 1: Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $X \subseteq E$ tel que $\overset{\circ}{X} = \bar{X}$.

1. Montrer que X est un ouvert.
 2. Montrer que X est un fermé.
 3. Montrer que X a comme frontière \emptyset .
- Soit la fonction suivante:

$$\mathbb{1}_X : \begin{cases} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in X \\ 0 & \text{si } x \notin X \end{cases} \end{cases}$$

4. Montrer que $\mathbb{1}_X$ est une fonction continue.

Soit $x \in X$, et $y \in (E \setminus X)$ (dont on suppose l'existence):

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda x + (1 - \lambda)y \in X \\ 0 & \text{si } \lambda x + (1 - \lambda)y \notin X \end{cases} \end{cases}$$

5. Montrer que f est continue et en déduire la valeur exacte de l'ensemble X .

Exercice 2: Soit E un préhilbertien. Caractériser la dimension de E en fonction de la compacité de la boule unité (fermée) de E .



Cours:

Définition d'une fonction continue entre espaces vectoriels normés et caractérisation séquentielle de la continuité.

Exercice 1:

Soit x_1, \dots, x_n des réels dont la somme des carrés vaut

1. On note $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{ij} := x_i x_j$.

1) Montrer que A est la matrice d'une projection orthogonale (que l'on précisera).

2) Montrer que $2A - \mathbb{I}_n$ est une matrice orthogonale.

Exercice 2:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est bornée pour une certaine norme. On définit:

$$B_p := \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} A^k$$

1. Montrer que (B_p) admet au moins une valeur d'adhérence que l'on notera B_∞ .

2. Montrer que $B_\infty(\mathbb{I}_n - A) = 0$.

3. En déduire que $B_\infty^2 = B_\infty$.

4. Montrer que B_∞ est le projecteur sur $\text{Ker}(A - \mathbb{I}_n)$ parallèlement à $\text{Im}(A - \mathbb{I}_n)$.

5. Montrer que la suite (B_p) converge vers B .



Cours:

Distance à un sous-espace vectoriel dans un préhilbertien.

Exercice 1:

On note $l^\infty(\mathbb{R})$ l'espace des suites bornées et $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'espace des suites presque nulles.

Après avoir vérifié que $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \subsetneq l^\infty(\mathbb{R})$, trouver si:

- $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est un ouvert de $l^\infty(\mathbb{R})$;
- $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est un fermé de $l^\infty(\mathbb{R})$.

Exercice 2:

Soit $a < b$ des réels et $N : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une application continue telle que $\#\{x \in [a, b] \mid N(x) = 0\} < \infty$.

1. Montrer que $\langle P, Q \rangle := \int_a^b N(t) \bar{P}(t) Q(t) dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{C}[X]$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Démontrer que

$$\alpha_n := \min_{(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^n} \int_a^b N(t) \left| f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k \right|^2 dt$$

est bien défini.

On note $(a_i) \in \mathbb{C}^n$ le point où ce minimum est atteint.

3. Démontrer que $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

