

Cours:

Théorème spectral

Exercice 1:

Calculer tous les produits scalaires de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n (on recommande, par soucis de lisibilité de voir \mathbb{R}^n comme $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

Exercice 2:

Soit E un espace vectoriel normé. Soit A une partie non-vidée et bornée de E . On définit $d(A) := \sup\{\|y - x\|, x, y \in A\}$.

- Montrer que \bar{A} et $\text{Fr}(A)$ sont également bornés.
- Comparer $d(A)$, $d(\bar{A})$ et $d(\overset{\circ}{A})$.
- Montrer que $d(\text{Fr}(A)) \leq d(A)$.
- Soit $x \in A$ et $0 \neq u \in E$. On considère $X := \{t \leq 0 | x + tu \in A\}$ montrer que $\sup(X)$ existe.
- En déduire que toute demi-droite issue d'un point $x \in A$ coupe $\text{Fr}(A)$.
- En déduire que $d(\text{Fr}(A)) = d(A)$.



Cours:

Rapeller la définition du polynôme caractéristique d'une matrice puis donner une propriété de ce dernier dans le cas des matrices symétriques.

Exercice 1:

Soient U et V ouverts et dense dans un espace vectoriel normé E . Démontrer que $U \cap V$ est dense dans E .

Exercice 2:

Soit u un endomorphisme auto-adjoint d'un espace préhilbertien E vérifiant:

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x), x \rangle = 0$$

Que peut-on dire de u ?



Cours:

Donner les quatres caractérisations equivalente de la continuité d'une fonction entre espaces vectoriels: définition (avec de boules), sequentielle (avec des suites), par image inverse (deux vertions).

Exercice 1:

Soit:

- $C := \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$
- $P := \{f \in C : f(1) > 0\}$
- $N := \left\{f \in C : \int_0^1 f \leq 0\right\}$

Dire pour chacun de ces ensembles si il est ouvert ou fermé pour la topologie associée à $\|\cdot\|_\infty$ et celle à $\|\cdot\|_1$.

Exercice 2:

Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E de dimention n . On note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \lambda_n$ les valeurs propres de u . Démontrer que pour tout $x \in E$ on a:

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle u(x), x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2$$



Cours:

Rappeller puis démontrer la caractérisation équivalente des endomorphisme définis positifs via leur spectre.

Exercice 1:

Soient U et V ouverts et dense dans un espace vectoriel normé E . Démontrer que $U \cap V$ est dense dans E .

Exercice 2:

Soit u un endomorphisme auto-adjoint d'un espace préhilbertien E vérifiant:

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x), x \rangle = 0$$

Que peut-on dire de u ?



Cours:

Donner les quatres caractérisations equivalente de la continuité d'une fonction entre espaces vectoriels: définition (avec de boules), séquentielle (avec des suites), par image inverse (deux vertions).

Exercice 1:

Soit:

- $C := \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$
- $P := \{f \in C : f(1) > 0\}$
- $N := \left\{f \in C : \int_0^1 f \leq 0\right\}$

Dire pour chacun de ces ensembles si il est ouvert ou fermé pour la topologie associée à $\|\cdot\|_\infty$ et celle à $\|\cdot\|_1$.

Exercice 2:

Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E de dimention n . On note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \lambda_n$ les valeurs propres de u . Démontrer que pour tout $x \in E$ on a:

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle u(x), x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2$$



Cours:

Théorème spectral

Exercice 1:

Calculer tous les produits scalaires de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n (on recommande, par soucis de lisibilité de voir \mathbb{R}^n comme $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

Exercice 2:

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie non-vide et bornée de E .

On définit $d(A) := \sup\{\|y - x\|, x, y \in A\}$.

- Montrer que \bar{A} et $\text{Fr}(A)$ sont également bornés.
- Comparer $d(A)$, $d(\bar{A})$ et $d(\overset{\circ}{A})$.
- Montrer que $d(\text{Fr}(A)) \leq d(A)$.
- Soit $x \in A$ et $0 \neq u \in E$. On considère $X := \{t \leq 0 \mid x + tu \in A\}$ montrer que $\sup(X)$ existe.
- En déduire que toute demi-droite issue d'un point $x \in A$ coupe $\text{Fr}(A)$.
- En déduire que $d(\text{Fr}(A)) = d(A)$.



Cours:

Rapeller la définition du polynôme caractéristique d'une matrice puis donner une propriété de ce dernier dans le cas des matrices symétriques.

Exercice 1:

Soit $(a_{ij}) = A \in O_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que:

$$\left| \sum_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} a_{ij} \right| \leq n \leq \sum_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} |a_{ij}|$$

2. Montrer que:

$$\forall \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \quad |\lambda| = 1$$

Exercice 2:

Soit $d, p \in \mathbb{N}^*$ et $(P_\alpha) \in (\mathbb{R}[X_1, \dots, X_d])^p$.

Montrer que l'ensemble suivant est un fermé de \mathbb{R}^d :

$$Z := \{(x_i) \in \mathbb{R}^d \mid \forall \alpha, P_\alpha(x_i) = 0\}$$

Question bonus: donner un espace de fonctions bien plus grand que $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ qui pourrait le remplacer tout en gardant cette propriété valide.



Cours:

Donner les quatre caractérisations équivalentes de la continuité d'une fonction entre espaces vectoriels: définition (avec de boules), séquentielle (avec des suites), par image inverse (deux versions).

Exercice 1:

Donner un exemple d'une partie X d'un espace vectoriel normé (de votre choix) tel que :

$$X, \overset{\circ}{X}, \bar{X}, \bar{\bar{X}} \text{ et } \overset{\circ}{\bar{X}}$$

soit des ensembles tous distincts.

Exercice 2:

Soit u un endomorphisme hermitien d'un espace euclidien E et $a \leq b$ deux réels. Démontrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes:

- $\text{Sp}(u) \subset [a, b]$
- $\forall x \in E \quad \langle u(x) - ax, u(x) - bx \rangle \leq 0$



Cours:

Rapeller la définition du polynôme caractéristique d'une matrice puis donner une propriété de ce dernier dans le cas des matrices symétriques.

Exercice 1:

Soit E un espace vectoriel euclidien.

Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ on note:

$$\begin{aligned}\rho(f) &:= \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(f)\} \\ \|f\| &:= \sup\{\|f(x)\|, \|x\| \leq 1\}\end{aligned}$$

Montrer que si f est hermitien, alors, $\|f\| = \rho(f)$.

Exercice 2:

Soit $C := \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $F := \{f \in C \mid f(0) = 0\}$.

1. Montrer que F est fermé dans $(C, \|\cdot\|_\infty)$.
2. Montrer que F est dense dans $(C, \|\cdot\|_1)$.
3. Déterminer son adhérence dans chaque cas.

