Cours:

Définition d'un hyperplan et caractérisation via une droite vectorielle.

Exercice 1:

Merci de commencer par l'exo 1.
Désolé, il était long à écrire,
mais il n'est pas bien méchant.

Exercice 2:

Soit $u : E \to E$ une fonction à valeur dans un espace Euclidien telle que:

$$\forall x, y \in E \qquad \langle u(x), y \rangle \;=\; \langle x, u(y) \rangle$$

1. Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$.
2. En déduire que tous les zéros de la fonction u sont en somme directe orthogonale avec $\{u(x), x \in E\}$.

amiel@math.univ-lyon1.fr

Exercice 1:

Soit E un espace vectoriel normé. On appelle "recouvrement de $X \subseteq E$" une famille d'ouverts $(R_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}$ tels que $X \subseteq \cup_\alpha X_\alpha$. On dit qu'une partie X de E est "pré-compacte" lorsque **tout** recouvrement de X admet un sous recouvrement fini; c'est à dire, lorsque

$$\forall (R_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}\text{recouvrement}, \quad \exists I \subset \mathbb{I} : \ \#I < \infty \text{ et } X \subseteq \bigcup_{\alpha\in\mathbb{I}} X_\alpha$$

Le but de notre exercice est de montrer que les fermés précompactes sont tous des compactes.

1. Montrer que tout recouvrement $(R_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}$ peut être décomposé en recouvrement de boules ouvertes $(B_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{J}}$ que l'on précisera et en déduire que tous les précompactes sont bornés.

2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ un précompacte peut être recouvert par une famille finie de boules de rayon ε.

3. Soit (U_n) une suite à valeur dans un fermé précompcate, montrer qu'il existe une sous-suite qui, pour tout recouvrement de boules de rayon ε a, après un certain rang, touts ses elements dans la même boule du recouvrement (on pourra faire un dessin).

4. En déduire que cette sous-suite est convergente, puis que tout pré-compacte fermé est un compacte.

Cours:

Donner les quatres caractérisations equivalente de la continuité d'une fonction entre espaces vectoriels: définition (avec de boules), sequentielle (avec des suites), par image inverse (deux vertions).

Exercice 1:

Soit E un euclidien et F et G des sous-espaces vectoriels.

1. Si $\dim F \neq \dim G$ montrer qu'il n'existe pas $u \in O(E)$ tel que $u(F) = G$.
2. Si $\dim F = \dim G$ montrer qu'il existe un tel u.
3. Si $\dim F = \dim G$ et que F et G sont orthogonaux, montrer qu'il existe $u \in O(E)$ tel que $u(F) = G$ et $u(G) = F$.

Exercice 2:

Soit $d \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{R}_d$ l'ensemble des matrices de $\mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ qui sont de rang supérieur ou égal à d.
Montrer que $\mathcal{R}_d$ est dense dans $\mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.

On souhaite savoir si $\mathcal{R}_r$ est fermé et/ou ouvert.
Commencer par le cas fermé.

Cours:

Théorème spectral.

Exercice 1:

Soit E un espace vectoriel normé. On appelle "recouvrement de $X \subseteq E$" une famille d'ouverts $(R_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}$ tels que $X \subseteq \cup_\alpha X_\alpha$. On dit qu'une partie X de E est "précompacte" lorsque **tout** recouvrement de X admet un sous recouvrement fini; c'est à dire, lorsque

$$\forall (R_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}} \text{recouvrement}, \quad \exists I \subset \mathbb{I} : \ \#I < \infty \text{ et } X \subseteq \bigcup_{\alpha\in\mathbb{I}} X_\alpha$$

Le but de notre exercice est de montrer que les compactes sont précompactes.
1. Soit (K_n) une famille décroissante de compacte non vides. Montrer que leur intersection est non vide.
2. Soit $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille d'ouverts tels que $K \subseteq \cup_i U_i$. Montrer qu'il existe N tel que $K \subseteq \cup_i^N U_i$.
3. Dans le cas où il y a plus que $\mathbb{N}$ ouverts, justifier que la propriété est toujours valide.

Exercice 2: Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E de dimention n. On note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...\lambda_n$ les valeurs propres de u. Démontrer que pour tout $x \in E$ on a:

$$\lambda_1 ||x||^2 \leq \langle u(x), x\rangle \leq \lambda_n ||x||^2$$

Cours:

Définition d'un hyperplan et caractérisation via une droite vectorielle.

Exercice 1:

Merci de commencer par l'exo 1.
Désolé, il était long à écrire,
mais il n'est pas bien méchant.

Exercice 2:

Soit $u : E \to E$ une fonction à valeur dans un espace Euclidien telle que:

$$\forall x, y \in E \qquad \langle u(x), y \rangle \ = \ \langle x, u(y) \rangle$$

1. Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$.

2. En déduire que tous les zéros de la fonction u sont en somme directe orthogonale avec $\{u(x), x \in E\}$.

amiel@math.univ-lyon1.fr

Exercice 1:

Soit E un espace vectoriel normé. On appelle "recouvrement de $X \subseteq E$" une famille d'ouverts $(R_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{I}}$ tels que $X \subseteq \cup_\alpha X_\alpha$. On dit qu'une partie X de E est "pré-compacte" lorsque **tout** recouvrement de X admet un sous recouvrement fini; c'est à dire, lorsque

$$\forall (R_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{I}} \text{recouvrement}, \quad \exists I \subset \mathbb{I} : \#I < \infty \text{ et } X \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathbb{I}} X_\alpha$$

Le but de notre exercice est de montrer que les fermés précompactes sont tous des compactes.

1. Montrer que tout recouvrement $(R_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{I}}$ peut être décomposé en recouvrement de boules ouvertes $(B_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{J}}$ que l'on précisera et en déduire que tous les précompactes sont bornés.

2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ un précompacte peut être recouvert par une famille finie de boules de rayon ε.

3. Soit (U_n) une suite à valeur dans un fermé précompcate, montrer qu'il existe une sous-suite qui, pour tout recouvrement de boules de rayon ε a, après un certain rang, touts ses elements dans la même boule du recouvrement (on pourra faire un dessin).

4. En déduire que cette sous-suite est convergente, puis que tout pré-compacte fermé est un compacte.

Cours:

Théorème spectral.

Exercice 1:

Soit E un euclidien et F et G des sous-espaces vectoriels.

1. Si $\dim F \neq \dim G$ montrer qu'il n'existe pas $u \in O(E)$ tel que $u(F) = G$.
2. Si $\dim F = \dim G$ montrer qu'il existe un tel u.
3. Si $\dim F = \dim G$ et que F et G sont orthogonaux, montrer qu'il existe $u \in O(E)$ tel que $u(F) = G$ et $u(G) = F$.

Exercice 2:

Soit $d \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{R}_d$ l'ensemble des matrices de $\mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ qui sont de rang supérieur ou égal à d.
Montrer que $\mathcal{R}_d$ est dense dans $\mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.

On souhaite savoir si $\mathcal{R}_r$ est fermé et/ou ouvert.
Commencer par le cas fermé.

 amiel@math.univ-lyon1.fr

Cours: Donner les quatres caractérisations equivalente de la continuité d'une fonction entre espaces vectoriels: définition (avec de boules), sequentielle (avec des suites), par image inverse (deux vertions).

Exercice 1:

Soit E un espace vectoriel normé. On appelle "recouvrement de $X \subseteq E$" une famille d'ouverts $(R_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}$ tels que $X \subseteq \cup_\alpha X_\alpha$. On dit qu'une partie X de E est "précompacte" lorsque **tout** recouvrement de X admet un sous recouvrement fini; c'est à dire, lorsque

$$\forall (R_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}} \text{recouvrement}, \quad \exists I \subset \mathbb{I} : \#I < \infty \text{ et } X \subseteq \bigcup_{\alpha\in\mathbb{I}} X_\alpha$$

Le but de notre exercice est de montrer que les compactes sont précompactes.

1. Soit (K_n) une famille décroissante de compacte non vides. Montrer que leur intersection est non vide.
2. Soit $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille d'ouverts tels que $K \subseteq \cup_i U_i$. Montrer qu'il existe N tel que $K \subseteq \cup_i^N U_i$.
3. Dans le cas où il y a plus que $\mathbb{N}$ ouverts, justifier que la propriété est toujours valide.

Exercice 2: Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E de dimention n. On note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...\lambda_n$ les valeurs propres de u. Démontrer que pour tout $x \in E$ on a:

$$\lambda_1 ||x||^2 \leq \langle u(x), x\rangle \leq \lambda_n ||x||^2$$

 amiel@math.univ-lyon1.fr

Cours:

Théorème spectral.

Exercice 1:

Soit E un euclidien et F et G des sous-espcaes vectoriels.

1. Si $\dim F \neq \dim G$ montrer qu'il n'existe pas $u \in O(E)$ tel que $u(F) = G$.
2. Si $\dim F = \dim G$ montrer qu'il existe un tel u.
3. Si $\dim F = \dim G$ et que F et G sont orthogonaux, montrer qu'il existe $u \in O(E)$ tel que $u(F) = G$ et $u(G) = F$.

Exercice 2:

Soit $d \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{R}_d$ l'ensemble des matrices de $\mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ qui sont de rang supérieur ou égal à d.
Montrer que $\mathcal{R}_d$ est dense dans $\mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.

On souhaite savoir si $\mathcal{R}_r$ est fermé et/ou ouvert.
Commencer par le cas fermé.

amiel@math.univ-lyon1.fr

Cours:

Donner les quatres caractérisations equivalente de la continuité d'une fonction entre espaces vectoriels: définition (avec de boules), sequentielle (avec des suites), par image inverse (deux vertions).

Exercice 1:

Soit $f : X \to Y$ une fonction continue. La propriété suivante est-elle vraie?

> *f est continue si et seulement si pour tout compact K, son image réciproque par f est un compact.*

Donner un cas particulier (i.e. des hypothèses en plus sur f) où cette propriété devient vraie.

Exercice 2:

Soit $(a_{ij}) = A \in O_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que:

$$\left| \sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} a_{ij} \right| \quad \leq \quad n \quad \leq \quad \sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} |a_{ij}|$$

2. Montrer que:

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \quad |\lambda| = 1$$

amiel@math.univ-lyon1.fr

Cours:

Définition d'un hyperplan et caractérisation via une droite vectorielle.

Exercie 1:

Soit $G \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ un ensemble fermé de matrices qui forme également un groupe. On rapelle que l'on appel un "ouvert de G" tout ensemble qui s'écrit de la forme $G \subseteq U$ avec U un ouvert de $\mathbb{M}_n$.

Justifier que le produit du groupe ainsi que son invertion sont des fonctions continues.

Exercice 2:

Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E de dimention n. On note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...\lambda_n$ les valeurs propres de u.
Démontrer que pour tout $x \in E$ on a:

$$\lambda_1 ||x||^2 \leq \langle u(x), x\rangle \leq \lambda_n ||x||^2$$

amiel@math.univ-lyon1.fr