Cours:

Définition des endomorphismes orthogonaux et propriété sur l'ensemble de ces derniers.

Exercice 1:

On appelle $\mathrm{Conf}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des points $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que $\forall i \neq j$ on ait $x_i \neq x_j$.

Montrer que $\mathrm{Conf}(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$.

On appelle $L_{(x_i,y_i)}(X)$ le polynôme de degrés $n-1$ tel que $\forall i, L(x_i) = y_i$. Après avoir justifié que ce polynôme existe et est unique, montrer que la fonction suivante est continue:

$$L_\bullet : \begin{cases} \mathrm{Conf}(\mathbb{R}^n) & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ (x_i, y_i) & \mapsto & L_{(x_i,yi)} \end{cases}$$

Exercice 2:

Soit u un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E de dimension n. On note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...\lambda_n$ les valeurs propres de u.
Démontrer que pour tout $x \in E$ on a:

$$\lambda_1 ||x||^2 \leq \langle u(x), x \rangle \leq \lambda_n ||x||^2$$

amiel@math.univ-lyon1.fr

Cours: Définition d'une fonction différentiable et caractérisation équivalente en termes de dérivées (directionnelles).

Exercice 1:

Soit $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, on note χ_M son polynôme caractéristique. Montrer que χ_M est bien un polynôme. On définit:

$$\chi_\bullet : \begin{cases} \mathbb{M}_n & \to & \mathbb{K}[X] \\ M & \mapsto & \chi_M \end{cases}$$

donner une norme sur $\mathbb{K}[X]$ telle que $\chi_\bullet$ soit une fonction continue.

On considère maintenant la fonction $\tilde{\chi}_\bullet : \mathbb{M}_n \to \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{K})$ définie de la même manière. Trouvez une norme sur ce nouvel espace telle que $\tilde{\chi}_\bullet$ soit continue (a priori, pas besoin que cette nouvelle norme se restreigne en la norme précédente sur l'espace des polynômes).

Exercice 2:

Soit E un euclidien et F et G des sous-espaces vectoriels.

1. Si $\dim F \neq \dim G$ montrer qu'il n'existe pas $u \in O(E)$ tel que $u(F) = G$.

2. Si $\dim F = \dim G$ montrer qu'il existe un tel u.

3. Si $\dim F = \dim G$ et que F et G sont orthogonaux, montrer qu'il existe $u \in O(E)$ tel que $u(F) = G$ et $u(G) = F$.

amiel@math.univ-lyon1.fr

Démonstration de cours:

Le spectre d'un endomorphisme orthogonal est inclus dans $\{-1;1\}$.

Exercice 1:

On note E l'espace vectoriel normé suivant:

$$\left(\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{K}), ||\cdot||_\infty\right)$$

On définit l'opération suivante:

$$* : \begin{cases} E^2 & \to & E \\ (f,g) & \mapsto & \left(x \mapsto \int_0^1 f(x-t)g(t)\mathrm{d}t\right) \end{cases}$$

Montrer que cette opération est continue.

Exercice 2:

Soit $(a_{ij}) = A \in O_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que:

$$\left|\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]} a_{ij}\right| \quad \leq \quad n \quad \leq \quad \sum_{i,j\in[\![1,n]\!]} |a_{ij}|$$

2. Montrer que:

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \quad |\lambda| = 1$$

amiel@math.univ-lyon1.fr

Cours: Définition d'une fonction différentiable et caractérisation équivalente en termes de dérivées (directionnelles).

Exercice 1:

On appelle $\mathrm{Conf}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des points $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que $\forall i \neq j$ on ait $x_i \neq x_j$.

Montrer que $\mathrm{Conf}(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$.

On appelle $L_{(x_i,y_i)}(X)$ le polynôme de degrés $n-1$ tel que $\forall i, L(x_i) = y_i$. Après avoir justifié que ce polynôme existe et est unique, montrer que la fonction suivante est continue:

$$L_\bullet : \begin{cases} \mathrm{Conf}(\mathbb{R}^n) & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ (x_i, y_i) & \mapsto & L_{(x_i, yi)} \end{cases}$$

Exercice 2:

Soit E un euclidien et F et G des sous-espaces vectoriels.

1. Si $\dim F \neq \dim G$ montrer qu'il n'existe pas $u \in O(E)$ tel que $u(F) = G$.

2. Si $\dim F = \dim G$ montrer qu'il existe un tel u.

3. Si $\dim F = \dim G$ et que F et G sont orthogonaux, montrer qu'il existe $u \in O(E)$ tel que $u(F) = G$ et $u(G) = F$.

Cours:

Définition des endomorphismes orthogonaux et propriété sur l'ensemble de ces derniers.

Exercice 1:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5x^2+5y^2-x^2y^3+x^8+y^6}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 5 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $\lim_{+\infty} |f| = +\infty$.
3. En déduire que $|f|$ admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2:

Soit $(a_{ij}) = A \in O_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que:

$$\left| \sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} a_{ij} \right| \quad \leq \quad n \quad \leq \quad \sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} |a_{ij}|$$

2. Montrer que:

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \quad |\lambda| = 1$$

amiel@math.univ-lyon1.fr

Démonstration de cours:

Le spectre d'un endomorphisme orthogonal.

Exercice 1: Soit u un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E de dimension n.
On note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...\lambda_n$ les valeurs propres de u.
Démontrer que pour tout $x \in E$ on a:

$$\lambda_1 ||x||^2 \leq \langle u(x), x\rangle \leq \lambda_n ||x||^2$$

Exercice 2:

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'espace des fonctions (bornées et) continues par morceau de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que l'on muni de la norme $||\cdot||_\infty$. Vérifier que cela forme un espace vectoriel normé, que l'on notera E.
On définit maintenant la famille d'applications suivantes:

$$\mathscr{L}_\varepsilon : \begin{cases} E & \to & E \\ f & \mapsto & \left(x \mapsto \frac{1}{2\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(t)\mathrm{d}t\right) \end{cases}$$

pour tous les $\varepsilon > 0$. Montrer que pour chaque ε (fixé donc...) la fonction $\mathscr{L}_\varepsilon$ est une fonction continue.

Montrer maintenant que: $\mathrm{Im}(\mathscr{L}_\varepsilon) \subset \left(\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty\right)$ et justifier l'appellation "application de lissage" pour $\mathscr{L}_\varepsilon$.

amiel@math.univ-lyon1.fr

On termine par montrer que pour f continue en x:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathscr{L}_\varepsilon\big(f\big)(x) = f(x)$$

amiel@math.univ-lyon1.fr

Cours: Définition des endomorphismes orthogonaux et propriété sur l'ensemble de ces derniers.

Exercice 1: Soit u un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E de dimension n.
On note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...\lambda_n$ les valeurs propres de u.
Démontrer que pour tout $x \in E$ on a:

$$\lambda_1 ||x||^2 \leq \langle u(x), x \rangle \leq \lambda_n ||x||^2$$

Exercice 2:

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'espace des fonctions (bornées et) continues par morceau de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que l'on muni de la norme $||\cdot||_\infty$. Vérifier que cela forme un espace vectoriel normé, que l'on notera E.
On définit maintenant la famille d'applications suivantes:

$$\mathscr{L}_\varepsilon : \begin{cases} E & \to & E \\ f & \mapsto & \left(x \mapsto \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(t) \mathrm{d}t \right) \end{cases}$$

pour tous les $\varepsilon > 0$. Montrer que pour chaque ε (fixé donc...) la fonction $\mathscr{L}_\varepsilon$ est une fonction continue.

Montrer maintenant que: $\mathrm{Im}(\mathscr{L}_\varepsilon) \subset \Big(\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), ||\cdot||_\infty \Big)$ et justifier l'appellation "application de lissage" pour $\mathscr{L}_\varepsilon$.
On termine par montrer que pour f continue en x:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathscr{L}_\varepsilon \big(f\big)(x) = f(x)$$

amiel@math.univ-lyon1.fr

Cours:

Définition d'une fonction différentiable et caractérisation équivalente en termes de dérivées (directionnelles).

Exercice 1:

Donner un exemple de fonction linéaire non-continue.

Exercice 2:

Soit E un euclidien et F et G des sous-espaces vectoriels.

1. Si $\dim F \neq \dim G$ montrer qu'il n'existe pas $u \in O(E)$ tel que $u(F) = G$.

2. Si $\dim F = \dim G$ montrer qu'il existe un tel u.

3. Si $\dim F = \dim G$ et que F et G sont orthogonaux, montrer qu'il existe $u \in O(E)$ tel que $u(F) = G$ et $u(G) = F$.

amiel@math.univ-lyon1.fr

Démonstration de cours:

Le spectre d'un endomorphisme orthogonal.

Exercice 1:

Soit E un euclidien et $u : E \to E$ une fonction (a priori pas linéaire) telle que:

$$\forall x, y \in E \qquad \langle u(x), y \rangle \;=\; \langle x, u(y) \rangle$$

Montrer que u est un opérateur auto-adjoint.

Exercice 2:

On note E l'espace vectoriel normé suivant:

$$\Big(\mathscr{C}^0\big([0,1], \mathbb{K}\big), ||\cdot||_\infty \Big)$$

On définit l'opération suivante:

$$* : \begin{cases} E^2 & \to & E \\ (f,g) & \mapsto & \Big(x \mapsto \int_0^1 f(x-t) g(t) \mathrm{d}t \Big) \end{cases}$$

Montrer que cette opération est continue.

amiel@math.univ-lyon1.fr