

Cours:

Donner deux définitions équivalentes de \mathcal{C}^1 .

Exercice 1:

Inverser la matrice suivante:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2:

Après avoir vérifié que GL_n est un ouvert de \mathbb{M}_n , montrer que l'application suivante est différentiable:

$$f : \begin{cases} GL_n & \rightarrow GL_n \subsetneq \mathbb{M}_n \\ M & \mapsto M^{-1} \end{cases}$$



Cours:

Définir la matrice Jacobienne.

Exercice 1:

Soit $f_{n,m,z} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par:

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f_{n,m,z}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^m + y^n}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ z & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. A quelle condition est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ?
2. A quelle condition est-elle différentiable?

Exercice 2:

Soit $M \in O_n \cap S_n$, on s'intéresse à la matrice M^2 .

Donner chaque valeur propre λ de M^2 ainsi que chaque sous-espace propre E_λ correspondant.



Cours:

Donner explicitement $O(2)$.

Exercice 1:

On appelle $\text{Conf}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des points:

$(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que $\forall i \neq j$ on ait $x_i \neq x_j$.

Montrer que $\text{Conf}(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert de \mathbb{R}^{2n} .

On appelle $L_{(x_i, y_i)}(X)$ le polynôme de degrés $n - 1$ tel que $\forall i, L(x_i) = y_i$. Justifiez dans un premier temps que si il existe, il est unique.

Construire ce polynôme afin de s'assurer qu'il existe. On pourra commencer par construire celui pour les valeurs $(x_1, \dots, x_n, \delta_{1,j}, \dots, \delta_{n,j})$ puis construire le cas général à partir.

Montrer que la fonction suivante est différentiable:

$$L_{\bullet} : \begin{cases} \text{Conf}(\mathbb{R}^n) & \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ (x_i, y_i) & \mapsto L_{(x_i, y_i)} \end{cases}$$



Exercice 2:

On travail dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 et on s'intéresse à l'opération $\langle x, y \rangle := x_1y_1 - x_2y_2$.

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique et en déduire si c'est un produit scalaire.

On appelle "boost" ou "boost de Lorentz" tout endomorphisme f tel que $\forall x, y$ on ait $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

Montrer que $O(1, 1)$, l'ensemble des boost, est un groupe (avec comme produit, la composition des endomorphismes).

Soit $f \in O(1, 1)$ montrer qu'il existe une unique triplet $(\theta, s_1, s_2) \in \mathbb{R} \times \{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \quad f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 x_1 \\ s_2 x_2 \end{pmatrix}$$

Cours

Donner deux définitions équivalentes de \mathcal{C}^1 .

Exercice 1:

Soit E un euclidien et F et G des sous-espaces vectoriels.

1. Si $\dim F \neq \dim G$ montrer qu'il n'existe pas $u \in O(E)$ tel que $u(F) = G$.
2. Si $\dim F = \dim G$ montrer qu'il existe un tel u .
3. Si $\dim F = \dim G$ et que F et G sont orthogonaux, montrer qu'il existe $u \in O(E)$ tel que $u(F) = G$ et $u(G) = F$.

Exercice 2:

Soit $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, on note χ_M son polynôme caractéristique. On définit:

$$\chi_{\bullet} : \begin{cases} \mathbb{M}_n & \rightarrow \mathbb{K}_n[X] \\ M & \mapsto \chi_M \end{cases}$$

donner une norme sur $\mathbb{K}_n[X]$ et une autre sur \mathbb{M}_n telle que χ_{\bullet} soit une fonction continue.

Avec ces normes, montrer que χ_{\bullet} est une fonction différentiable.



Cours: Définir la matrice Jacobienne.

Exercice 1:

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'espace des fonctions (bornées et) continues par morceau de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que l'on muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Vérifier que cela forme un espace vectoriel normé, que l'on notera E .

On définit maintenant la famille d'applications suivantes:

$$\mathcal{L}_\varepsilon : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ f & \mapsto \left(x \mapsto \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(t) dt \right) \end{cases}$$

pour tous les $\varepsilon > 0$. Montrer que pour chaque ε (fixé donc...) la fonction \mathcal{L}_ε est une fonction continue.

Montrer d'abord que: $\forall f \in E, \mathcal{L}_\varepsilon(f) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ puis que $\forall f \in \mathcal{C}^n, \mathcal{L}_\varepsilon(f) \in \mathcal{C}^{n+1}$ et justifier l'appellation "application de lissage" pour \mathcal{L}_ε .

On termine par montrer que pour f continue en x :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}_\varepsilon(f)(x) = f(x)$$

Exercice 2: Soit $(a_{ij}) = A \in O_n(\mathbb{C})$. Montrer que:

$$\left| \sum_{i,j \in [1,n]} a_{ij} \right| \leq n \leq \sum_{i,j \in [1,n]} |a_{ij}|$$



Cours:

Donner explicitement $O(2)$.

Exercice 1:

On appelle $\text{Conf}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des points:

$(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que $\forall i \neq j$ on ait $x_i \neq x_j$.

Montrer que $\text{Conf}(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert de \mathbb{R}^{2n} .

On appelle $L_{(x_i, y_i)}(X)$ le polynôme de degrés $n - 1$ tel que $\forall i, L(x_i) = y_i$. Justifiez dans un premier temps que si il existe, il est unique.

Construire ce polynôme afin de s'assurer qu'il existe. On pourra commencer par construire celui pour les valeurs $(x_1, \dots, x_n, \delta_{1,j}, \dots, \delta_{n,j})$ puis construire le cas général à partir.

Montrer que la fonction suivante est différentiable:

$$L_{\bullet} : \begin{cases} \text{Conf}(\mathbb{R}^n) & \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ (x_i, y_i) & \mapsto L_{(x_i, y_i)} \end{cases}$$



Exercice 2:

On travail dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 et on s'intéresse à l'opération $\langle x, y \rangle := x_1y_1 - x_2y_2$.

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique et en déduire si c'est un produit scalaire.

On appelle "boost" ou "boost de Lorentz" tout endomorphisme f tel que $\forall x, y$ on ait $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

Montrer que $O(1, 1)$, l'ensemble des boost, est un groupe (avec comme produit, la composition des endomorphismes).

Soit $f \in O(1, 1)$ montrer qu'il existe une unique triplet $(\theta, s_1, s_2) \in \mathbb{R} \times \{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \quad f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 x_1 \\ s_2 x_2 \end{pmatrix}$$

Cours:

Définir la matrice Jacobienne.

Exercice 1:

Soit $f_{n,m,z} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par:

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f_{n,m,z}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^m + y^n}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ z & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. A quelle condition est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ?
2. A quelle condition est-elle différentiable?

Exercice 2:

Soit $M \in O_n \cap S_n$, on s'intéresse à la matrice M^2 .

Donner chaque valeur propre λ de M^2 ainsi que chaque sous-espace propre E_λ correspondant.



Cours: Donner explicitement $O(2)$.

Exercice 1:

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'espace des fonctions (bornées et) continues par morceau de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que l'on muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Vérifier que cela forme un espace vectoriel normé, que l'on notera E .

On définit maintenant la famille d'applications suivantes:

$$\mathcal{L}_\varepsilon : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ f & \mapsto \left(x \mapsto \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(t) dt \right) \end{cases}$$

pour tous les $\varepsilon > 0$. Montrer que pour chaque ε (fixé donc...) la fonction \mathcal{L}_ε est une fonction continue.

Montrer d'abord que: $\forall f \in E, \mathcal{L}_\varepsilon(f) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ puis que $\forall f \in \mathcal{C}^n, \mathcal{L}_\varepsilon(f) \in \mathcal{C}^{n+1}$ et justifier l'appellation "application de lissage" pour \mathcal{L}_ε .

On termine par montrer que pour f continue en x :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}_\varepsilon(f)(x) = f(x)$$

Exercice 2: Soit $(a_{ij}) = A \in O_n(\mathbb{C})$. Montrer que:

$$\left| \sum_{i,j \in [1,n]} a_{ij} \right| \leq n \leq \sum_{i,j \in [1,n]} |a_{ij}|$$



Cours

Donner deux définitions équivalentes de \mathcal{C}^1 .

Exercice 1:

Soit E un euclidien et F et G des sous-espaces vectoriels.

1. Si $\dim F \neq \dim G$ montrer qu'il n'existe pas $u \in O(E)$ tel que $u(F) = G$.
2. Si $\dim F = \dim G$ montrer qu'il existe un tel u .
3. Si $\dim F = \dim G$ et que F et G sont orthogonaux, montrer qu'il existe $u \in O(E)$ tel que $u(F) = G$ et $u(G) = F$.

Exercice 2:

Soit $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, on note χ_M son polynôme caractéristique. On définit:

$$\chi_{\bullet} : \begin{cases} \mathbb{M}_n & \rightarrow \mathbb{K}_n[X] \\ M & \mapsto \chi_M \end{cases}$$

donner une norme sur $\mathbb{K}_n[X]$ et une autre sur \mathbb{M}_n telle que χ_{\bullet} soit une fonction continue.

Avec ces normes, montrer que χ_{\bullet} est une fonction différentiable.

