Un exemple d'application du théorème de Brouwer

Nous utiliserons le résultat suivant concernant les équations différentielles.

Theoreme 1 (de redressement du flot)**.** *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *de classe* $\mathscr{C}^2$*. Soit* $x \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $f(x) \neq 0$*. Alors il existe* $\tau > 0$*,* $r > 0$ *et un hyperplan* $H \subset \mathbb{R}^n$ *tels que, en notant* $V_r := x + H \cap B(0; r)$*, le flot de d'équation différentielle*

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f(u)$$

définisse un $\mathscr{C}^1$*-difféomorphisme :*

$$\begin{array}{rccl} \Phi : &]-\tau, \tau[\times V_r & \to & B := \Phi(]-\tau, \tau[\times V_r) \\ & (t, v) & \mapsto & \phi_t(v)\,. \end{array}$$

En outre, pour tout $y \in B$*, il existe un unique* $t \in]-\tau, \tau[$ *tel que* $\phi_t(y) \in V_r$*.*

L'ouvert B est appelé une *boîte à flot.*

Démonstration. Puisque $f(x) \neq 0$, il existe un hyperplan H tel que

$$\mathbb{R}\, f(x) \oplus H = \mathbb{R}^n\,.$$

Il s'agit alors d'appliquer le théorème d'inversion locale. D'après le théorème du flot, la fonction Φ est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ pour τ et r assez petits. Rappelons que par définition, $\phi_t(v)$ est la valeur à l'instant t de la solution du problème de Cauchy

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f(u)\,, \quad u(0) = v\,.$$

On a donc :

$$\partial_t \Phi(t, v) = f(\Phi(t, v))\,, \quad \Phi(0, v) = v\,, \quad \mathrm{d}_v \Phi(0, v) = \mathrm{Id}\,.$$

Par suite, la différentielle de Φ au point $(0, x)$ est donnée par

$$\mathrm{d}\Phi(0, 0) \cdot (s, k) = s\, f(x) + k \quad \text{pour tout } (s, k) \in \mathbb{R} \times H\,.$$

C'est une bijection de $\mathbb{R} \times H$ sur $\mathbb{R}^n$ puisque $\mathbb{R}\, f(x) \oplus H = \mathbb{R}^n$. Par conséquent (toutes les applications linéaires étant continues en dimension finie), Φ est un difféomorphisme local, et donc un difféomorphisme de $]-\tau, \tau[\times V_r$ sur son image, quitte à réduire τ et r.

Ceci implique que pour tout $y \in B$, il existe un unique $(t, v) \in]-\tau, \tau[\times V_r$ tel que

$$\phi_t(v) = y\,,$$

d'où $\phi_{-t}(y) = v \in V_r$. Inversement, si $s \in]-\tau, \tau[$ est tel que $\phi_s(y) = w \in V_r$, alors $y = \phi_{-s}(w)$ et donc $s = -t$ et $v = w$. □

Remarque 1. *Le difféomorphisme inverse* Φ^{-1} *opère un* redressement du flot *au sens où l'image réciproque d'une orbite* $\{\, \phi_t(v) \in B\,;\ t \in]-\tau, \tau[\,\}$ *avec* $v \in V_r$ *n'est autre que le segment de droite* $\{\, (t, v)\,;\ t \in]-\tau, \tau[\}$*.*

Theoreme 2. *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *de classe* $\mathscr{C}^2$*. On suppose que* $K \subset \mathbb{R}^n$ *est un convexe compact invariant par le flot de d'équation différentielle*

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f(u)\,.$$

Alors K *contient un zéro de* f*.*

Démonstration. Nous allons voir que c'est un corollaire du théorème de point fixe de Brouwer et du théorème de redressement du flot. Remarquons d'abord que pour tout $v \in K$, la solution du problème de Cauchy

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f(u)\,, \quad u(0) = v\,,$$

est par hypothèse à valeurs dans le compact K, donc elle est globale d'après le théorème des bouts. Autrement dit, le flot $\phi_t(v)$ est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$. De plus, $\phi_t : K \to K$ est continue. D'après le théorème de Brouwer, il existe donc $x_t \in K$ tel que $\phi_t(x_t) = x_t$. On définit ainsi une suite $(x_{1/n})_n \in N$ d'éléments du compact K. À l'extraction d'une sous-suite près, on peut supposer qu'elle converge vers $x_0 \in K$. Montrons qu'alors $f(x_0) = 0$. Si ce n'était pas le cas, on pourrait appliquer le théorème de redressement du flot en x_0. Or il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$, $1/n < \tau$ et $x_{1/n} \in B$. Comme $x_{1/n} = \phi_0(x_{1/n})$, il est impossible qu'on ait aussi $x_{1/n} = \phi_{1/n}(x_{1/n})$. □

Remarque 2. *Lorsque $n = 2$, le convexe compact K peut être obtenu comme la région du plan limitée par une orbite périodique : elle est invariante d'après l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz.*