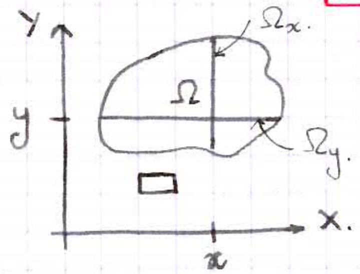
Rem: on peut affaiblir les hypothèses de la m̂ façon.

Mesures produits.



1. Tribu produit.

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ $(Y, \mathcal{B}, \lambda)$ deux espaces mesurés.

Définit° : On appelle rectangle mesurable toute partie R de $X \times Y$ de la forme $R = A \times B$ $A \in \mathcal{A}$ $B \in \mathcal{B}$

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des tous les rectangles (mesurables) et $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ la tribu engendrée par $\mathcal{E}$.

Notat° : $\Omega \subset X \times Y$ $\Omega_x = \{ y \in Y \,/\, (x,y) \in \Omega \}$.

$\Omega^y = \{ x \in X \,/\, (x,y) \in \Omega \}$.

Théorème 1 : si $\Omega \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, alors $\begin{cases} \forall x \in X, \ \Omega_x \in \mathcal{B}. \\ \forall y \in X, \ \Omega^y \in \mathcal{A}. \end{cases}$

dem : soit $\mathcal{D} = \{ \Omega \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \,/\, \forall x \in X \ \Omega_x \in \mathcal{B} \}$.

On veut m.q $\mathcal{D} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

Pour cela m.q $\mathcal{D}$ est une tribu contenant ts les rectangles.

1). Soit $A \times B$ un rectangle. $(A \times B)_x = \begin{cases} \emptyset & si\ x \notin A \\ B & si\ x \in A. \end{cases} \Rightarrow \in \mathcal{B}$.

2) $\mathcal{D}$ est une tribu. $*$ $\emptyset \in \mathcal{D}$ $(\emptyset)_x = \emptyset$.

$*$ $\Omega \in \mathcal{D}$ $(\Omega^c)_x = \Omega_x^c$ Or $\Omega_x \in \mathcal{B} \Rightarrow (\Omega^c)_x \in \mathcal{B}$.

$*$ $(\Omega_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}^*}$.

$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ $\Omega_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Omega_n)_x$. $(\Omega_n)_x \in \mathcal{B} \Rightarrow \Omega_x \in \mathcal{B} \Rightarrow \Omega \in \mathcal{D}$.

$\Rightarrow \mathcal{D} \supset \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Or $\mathcal{D} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ par construct° $\Rightarrow \mathcal{D} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

Notation : $f : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}, \ldots$

$x \in X \qquad f_x : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C} \ldots$
$\qquad\qquad y \longmapsto f_x(y) = f(x,y).$

$y \in Y \qquad f^y : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C} \ldots$
$\qquad\qquad x \longmapsto f^y(x) = f(x,y).$

Théorème 2 : soit $f : (X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}, \ldots$ mesurable.

Alors $\begin{cases} \forall x \in X & f_x : (Y, \mathcal{B}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}, \ldots \text{ est mesurable.} \\ \forall y \in Y & f^y : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} . \end{cases}$

dem : U un mesurable de l'espace d'arrivée.

$x \in X$. $\quad f_x^{-1}(U) = \{ y \in Y / f(x,y) \in U \} = (f^{-1}(U))_x$.

Or $f^{-1}(U) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. $\Rightarrow (f^{-1}(U))_x \in \mathcal{B}$.

Quelques propriétés des rectangles.

Définition : On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des réunions finies de rectangles.

$R \in \mathcal{R} \iff \exists A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{A} \quad \exists B_1, \ldots, B_N \in \mathcal{B},$

$R = \bigcup_{j=1}^{N} (A_j \times B_j).$

Prop : $\forall A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B, A \cap B, A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{R}.$

et tout A dans $\mathcal{R}$ est réunion finie de rectangles 2 à 2 disjoints.

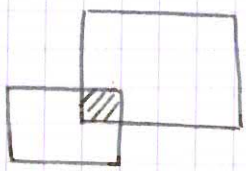
dem : * $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$ trivial.

* $A, B \in \mathcal{R}$: $\quad A = \bigcup_{j=1}^{N} A_j \quad A_j$ rectangle

$B = \bigcup_{k=1}^{M} B_k \quad B_k$ ______ .

$A \cap B = \bigcup_{j,k} (A_j \cap B_k).$

Or $A_j \cap B_k$ est un rectangle.



$$* \quad (A \setminus B) = \bigcup_{j=1}^{N} (A_j \setminus B)$$

On peut supp. A rectangle.

$A \setminus B = A \cap (B^c) = A \cap (B_1^c \cap \dots \cap B_n^c)$

$= (A \cap B_1^c) \cap \dots \cap (A \cap B_M^c)$.

→ il suffit montrer la prop. pour A et B rectangles.

$$* \quad A \in \mathcal{R}. \quad A = A_1 \cup \dots \cup A_N \quad A_j \text{ rectangles.}$$

récurrence sur N.

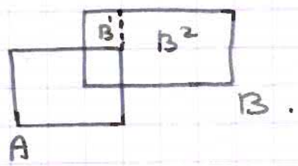
vrai $N = 1$

si vrai au rang $N-1$,

$A_2 \cup \dots \cup A_N = B_1 \cup \dots \cup B_M \qquad B_j$ 2 à 2 disjoints.

$A_1 \cup (A_2 \cup \dots \cup A_N) = A_1 \cup (B_1 \cup \dots \cup B_M)$.

$= A_1 \cup (B_1^1 \cup B_1^2) \cup \dots \cup (B_M^1 \cup B_M^2)$.



$A \cup B = A \cup B^1 \cup B^2$.

2. Mesure produit.

Définit° : soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

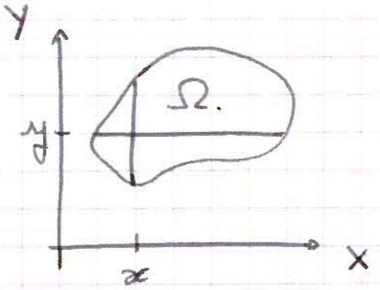
On dit que μ est σ-finie ssi $\begin{cases} X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \quad X_n \in \mathcal{A} \\ (X_n \cap X_m = \phi) \\ \mu(X_n) < \infty. \end{cases}$

Ex : 1) la mesure de Lebesgue est σ-finie.

2) la mesure de comptage sur $[0,1]$ n'est pas σ-finie.

(car $[0,1]$ n'est pas dénombrable).

Théorème : $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \lambda)$ deux espaces mesurés tq μ et λ soient σ-finies.



Pour tout $\Omega \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, posons $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$

$$\varphi(x) = \lambda(\Omega_x)$$

$$\psi(y) = \mu(\Omega^y).$$

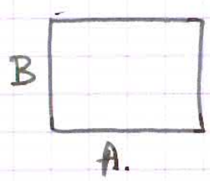
$$(*) \begin{cases} \text{Alors } \varphi(x) \text{ est } \mathcal{A}\text{-mesurable } (\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}^+) \\ \quad\quad\ \psi(y) \text{ est } \mathcal{B}\text{-mesurable } (\psi : Y \to \overline{\mathbb{R}}^+). \\ \text{et } \int_X \varphi \, d\mu = \int_Y \psi \, d\lambda. \end{cases}$$

dem:

1ère étape : Notons $\mathcal{D} = \{ \Omega \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \ / \ (*) \text{ vraie} \}$.

① $\mathcal{D}$ contient les rectangles (mesurables).

si $A \times B \in \mathcal{E}$:



$$\varphi(x) = \chi_A(x) \cdot \lambda(B).$$

$$\psi(y) = \chi_B(y) \cdot \mu(A).$$

$\Rightarrow \varphi$ et ψ sont mesurables et $\int_X \varphi \, d\mu = \mu(A)\lambda(B)$
$= \int_Y \psi \, d\lambda.$

② $\mathcal{D}$ est stable par réunion croisste.

$\Omega_1 \subset \dots \subset \Omega_n \subset \dots$ $\quad \Omega_i \in \mathcal{D}$. $\quad \Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

$\varphi_j(x) = \lambda(\Omega_{j\,x})$ $\quad \psi_j(y) = \mu(\Omega_j^y)$. $\quad \varphi(x) = \lambda(\Omega_x)$

$\psi(x) = \mu(\Omega^y)$

$\Omega_x = \bigcup_{j \nearrow} \Omega_{j,x}$. $\Rightarrow \lambda(\Omega_x) = \lim_{j \to \infty} \lambda(\Omega_{j,x})$. $\Longleftrightarrow$

$\varphi(x) = \lim_{j \to \infty} \varphi_j(x)$. avec φ_j $\mathcal{A}$-mesurables

$\Rightarrow \varphi$, lim^{te} simple de fon^{cts} mesurables, est $\mathcal{A}$ mesurable.

De m̂ $\psi = \lim\limits_{i \to \infty} \psi_i \Rightarrow \psi$ est $\mathcal{B}$ mesurable.

$\varphi = \lim\limits_{j\to\infty} \varphi_j$ $\quad \varphi_j(x) \leq \varphi_{j+1}(x) \quad \Rightarrow$ d'après le th. de Beppo-Lévi (convergence monotone),

$$\int_X \varphi \, d\mu = \lim_{j \to \infty} \int_X \varphi_j \, d\mu.$$

De même $\displaystyle\int_Y \psi \, d\lambda = \lim_{j \to \infty} \int_Y \psi_j \, d\lambda.$

$\Omega_j \in \mathcal{D} \Rightarrow \displaystyle\int_X \varphi_j \, d\mu = \int_Y \psi_j \, d\lambda.$

$\Rightarrow$ à la lim^{te} $\displaystyle\int_X \varphi \, d\mu = \int_Y \psi \, d\lambda.$

③. si $\Omega_n \in \mathcal{D}$ et $\Omega_n \cap \Omega_m = \emptyset$ $n \neq m \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n \in \mathcal{D}$.

en effet : si $\Omega_1 \in \mathcal{D}$ $\quad \Omega_2 \in \mathcal{D}$ $\quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$.

alors $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ $\qquad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \quad \psi = \psi_1 + \psi_2$.

Donc c'est vrai pour une réunion finie (de parties 2 à 2 disjointes)

donc pour une réunion d'après ②.

④. $\mathcal{D}$ stable pour $\cap$ décroiss^{te}.

$A \in \mathcal{A}$ $\quad B \in \mathcal{B}$ $\qquad \mu(A) < \infty \quad \lambda(B) < \infty$.

$(A \times B) \supseteq \Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \ldots \supset \Omega_n \supset \ldots \qquad \Omega_n \in \mathcal{D}$

alors $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega \quad \in \mathcal{D}$. (on sait déjà que $\Omega \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$).

$\varphi_j(x) = \lambda(\Omega_{j,x}) \quad \psi_j, \ \varphi, \psi \ldots$

$\Omega_{j,x} \subset B \quad \lambda(B) < \infty.$

B 

A

$\Rightarrow \lim\limits_{j \to \infty} \varphi_j(x) = \varphi(x) \Rightarrow \varphi$ mesurable.

idem $\Rightarrow \psi$ mesurable.

$\forall x, \forall j \quad \varphi_j(x) \leq \chi_A(x) \cdot \lambda(B)$.

$\Rightarrow$ d'après le th. de Lebesgue (convergence dominée),

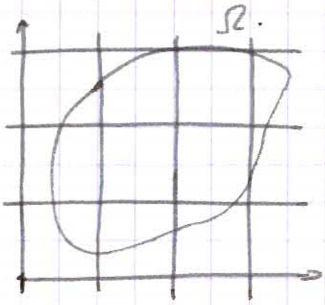
$$\int_X \varphi \, d\mu = \lim_{j \to \infty} \int_X \varphi_j \, d\mu.$$

on conclut de la m̂ façon qu'au ②.

<u>2e étape:</u> les mesures λ et μ sont σ-finies

$$\Rightarrow X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \qquad X_n \cap X_m = \emptyset \ (n \neq m)$$

$$\mu(X_n) < \infty.$$



$$Y = \bigcup_{m=1}^{\infty} X_m \qquad Y_m \cap Y_n = \emptyset \ (n \neq m)$$

$$\lambda(Y_m) < \infty.$$

$$X \times Y = \bigcup_{(n,m)} (X_n \times Y_m).$$

$\Omega \subset X \times Y$ notons $\Omega_{nm} = \Omega \cap (X_n \times Y_m)$.

Ω est réunion disjointe des Ω_{nm}.

Soit $\mathcal{M} = \{\Omega \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \ / \ \forall n, m \ \ \Omega_{n,m} \in \mathcal{D}\}$.

<u>$\mathcal{M}$ vérifie la propriété suivante:</u>

(**) $\begin{cases} 1) \ \mathcal{M} \text{ contient } \mathcal{R} \\ 2) \ \mathcal{M} \text{ est stable par } \bigcap\searrow \text{ et } \bigcup\nearrow \end{cases}$

<u>en effet:</u> 1) $\mathcal{M}$ contient les rectangles.

(si Ω rectangle, $\Omega_{n,m}$ rectangle $\in \mathcal{D}$ qui contient les rectangles).

2) de plus $\mathcal{M}$ est stable $\bigcup\nearrow$

(si $\Omega = \bigcup \Omega^j \quad \Omega_{n,m} = \bigcup\nearrow \Omega^j_{n,m}$)

$\Rightarrow$ on applique ②.

$\mathcal{M}$ est stable $\bigcap\searrow$

(si $\Omega = \bigcap\searrow \Omega^j \quad \Omega_{n,m} = \bigcap\searrow \Omega^j_{n,m}$).

$\Rightarrow$ puisque $\Omega_{n,m} \subset X_n \times Y_n$ $\mu(X_n) < \infty$ $\lambda(Y_n) < \infty$,

$\mathcal{M}$ est stable par $\cup$ disjointe.

$\left(\Omega^1 \cap \Omega^2 = \phi \Rightarrow \Omega^1_{n,m} \cap \Omega^2_{n,m} = \phi .. \right)$.

donc $\mathcal{M}$ contient les réunions finies de rectangles

ie $\mathcal{M}$ contient $\mathcal{R}$.

Introduisons $\overline{\mathcal{M}}$ = + petit ss-ensble de $\mathcal{P}(X \times Y)$ vérifiant $(**)$.

$\overline{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$.

Lemme: $\forall P, Q \in \overline{\mathcal{M}}$, $P \cup Q$, $P \setminus Q$, $Q \setminus P \in \overline{\mathcal{M}}$.

preuve: soit $P \in \overline{\mathcal{M}}$. Notons $\Delta_P = \{ Q \,/\, P \cup Q, P \setminus Q, Q \setminus P \in \overline{\mathcal{M}} \}$.

si P est un rectangle; si Q est un rectangle.

$P \cup Q, P \setminus Q, Q \setminus P \in \mathcal{R} \subset \overline{\mathcal{M}}$ par déf.

$\Rightarrow Q \in \Delta_P$. $\Rightarrow$ les rectangles sont dans Δ_P.

$\Rightarrow \mathcal{R} \subset \Delta_P$.

Or Δ_P est stable par $\cup \uparrow$ et $\cap \downarrow$

$\Rightarrow \Delta_P$ vérifie $(**)$ $\Rightarrow \overline{\mathcal{M}} \subset \Delta_P$.

si $P \in \overline{\mathcal{M}}$: $\forall Q$ rectangle $P \in \Delta_Q \Leftrightarrow Q \in \Delta_P$.

$\Rightarrow \Delta_P$ contient les rectangles $\Rightarrow$ $\mathcal{R} \subset \Delta_P$.

id. $\Rightarrow$ Δ_P vérifie $(**)$ $\Rightarrow$ $\overline{\mathcal{M}} \subset \Delta_P$.

d'où $\forall P, Q \in \overline{\mathcal{M}}$ $P \cup Q$ et $P \setminus Q \in \overline{\mathcal{M}}$.

Or $X \times Y \in \overline{\mathcal{M}}$ (car $X \times Y$ rectangle).

$Q \in \overline{\mathcal{M}} \Rightarrow (X \times Y) \setminus Q = Q^c \in \overline{\mathcal{M}}$.

donc $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. (car $\overline{\mathcal{M}}$ est une tribu).
contenant $\mathcal{R}$
incluse ds $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

Donc $\mathcal{D} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

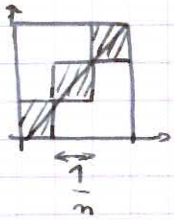
car $\Omega \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \Rightarrow \forall n, m \ \Omega_{n,m} \in \mathcal{D} \Rightarrow \Omega = \bigcup_{\text{disjointe}} \Omega_{n,m} \in \mathcal{D}$.

($\mathcal{D}$ stable par réunion disjointe).

<u>Contrexemple:</u> si λ n'est pas σ-fini.

$(\underbrace{[0,1]}_{X}, \underbrace{\text{Lebesgue}}_{\mu}) \times (\underbrace{[0,1]}_{Y}, \underbrace{\text{décompte}}_{\lambda})$

$\Omega = \{(x,x) \ x \in [0,1]\}$ est ds $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ (comme $\cap \downarrow$ de réunions finies de rectangles



$\varphi(x) = 1 \ \forall x$.

$\psi(y) = 0$.

$\Rightarrow \int \varphi \, d\mu = 1$ et $\int \psi \, d\lambda = 0$.

<u>Rem:</u> on a vu au cours de la dém. que

si $\mathcal{H} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ contient les réunions finies de rectangles mesurables et est stable par $\cup \nearrow$ et $\cap \searrow$, alors $\mathcal{H} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

<u>Définition de la mesure produit</u>:

<u>Notaθ</u> $\mu \otimes \lambda$.

$\forall \Omega \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \quad (\mu \otimes \lambda)(\Omega) = \int_X \varphi \, d\mu = \int_Y \psi \, d\lambda$.

<u>Rem:</u> La mesure produit est l'unique mesure ν définie sur $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ vérifiant $\forall A \in \mathcal{A}, \ \forall B \in \mathcal{B} \quad \nu(A \times B) = \mu(A)\lambda(B)$.

<u>en effet</u>:

Soit $\{\Omega \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} / \forall n, m \ \ \nu(\Omega_{n,m}) = (\mu \otimes \lambda)(\Omega_{n,m})\} = \mathcal{H}$.

Alors $\mathcal{H} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. (d'après prop. d'une mesure)

3 - Théorème de Fubini.

* théorème de Fubini - Tonelli.

$f : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ $\mathcal{AB}$ mesurable

Alors f_x est $\mathcal{B}$ - mesurable $\forall x \in X$.

f_y est $\mathcal{A}$ ———— $\forall y \in Y$.

et si $\varphi(x) = \int_Y f_x \, d\lambda$ et $\psi(y) = \int_X f^y \, d\mu$,

φ et ψ sont mesurables et $\int_X \varphi \, d\mu = \int_Y \psi \, d\lambda = \int_{X \times Y} f \, d(\mu \otimes \lambda)$

dem: ce résultat est vrai lorsque $f = \chi_\Omega$ $\Omega \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

(c'est le th. précᵗ).

$\Rightarrow$ par linéarité, c'est vrai pour tte f. étagée.

Si f est qq (mais mesurable).

$f = \lim\nearrow f_n$ f_n étagée.

Th. Beppo Lévi (convergence monotone) :

$\Rightarrow \int_Y f_x \, d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int_Y f_{n,x} \, d\lambda$. $\Rightarrow \varphi$ est mesurable $(\varphi = \lim\nearrow \varphi_n)$.

de m̂ ψ est mesurable $(\psi = \lim\nearrow \psi_n)$.

$$\underbrace{\int_X \varphi_n \, d\mu}_{\downarrow \int_X \varphi \, d\mu} = \underbrace{\int_Y \psi_n \, d\lambda}_{\downarrow \int_Y \psi \, d\lambda} = \underbrace{\int_{X \times Y} f_n \, d(\mu \otimes \lambda)}_{\downarrow \int_{X \times Y} f \, d(\mu \otimes \lambda)}.$$

(d'après th. de convergence monotone encore).

* th. de Fubini.

$f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ mesurable et intégrable ($f \in \mathcal{L}^1_{X\times Y}(\mu \otimes \lambda)$).

Alors :

Pour presque tout x, $f_x \in \mathcal{L}^1_Y(\lambda)$

——————— y, $f^y \in \mathcal{L}^1_X(\mu)$.

et si $\varphi(x) = \int_Y f_x \, d\lambda$, $\psi(y) = \int_X f^y \, d\mu$ (prolongées par 0 éventuellt)

sont mesurables $\varphi \in \mathcal{L}^1_X(\mu)$ $\psi \in \mathcal{L}^1_Y(\lambda)$

$$\text{et } \int_X \varphi \, d\mu = \int_Y \psi \, d\lambda = \int_{X\times Y} f \, d(\mu\otimes\lambda).$$

<u>dem:</u> On peut supposer $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$.

(Sinon on conclut pour $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$..).

$f = f^+ - f^-$ $f^+ = \sup(f, 0)$ $f^- = -\inf(f, 0)$.

par hyp. $\begin{cases} \int_{X\times Y} f^+ \, d(\mu\otimes\lambda) < +\infty. \\ \int_{X\times Y} f^- \, d(\mu\otimes\lambda) < +\infty. \end{cases}$

$(f_x)^+ = f_x^+$ $(f_x)^- = (f^-)_x$.

D'après le th. précᵗ $\varphi_1(x) = \int_Y f_x^+ \, d\lambda$ est mesurable et

$\int_X \varphi_1 \, d\mu = \int_{X\times Y} f^+ \, d(\mu\otimes\lambda) < +\infty.$ $\Rightarrow \varphi_1$ est intégrable

$\Rightarrow \varphi_1$ est finie presque partout. $\Rightarrow$ f_x^+ est intégrable presque partout
(ie $\varphi_1 < +\infty$)

De m̂ f_x^- est intégrable presque partout.

$\Rightarrow f_x$ est intégrable presque partout.

et presque partout $\int_Y f_x \, d\lambda = \varphi_1(x) - \varphi_2(x) = \varphi(x)$

$\Rightarrow \varphi$ est mesurable. idem $\Rightarrow$ ψ est mesurable.

et $\int_X \varphi\, d\mu = \int_X \varphi_1 d\mu - \int_X \varphi_2 d\mu$

$$= \int_{X\times Y} f^+ d(\mu\otimes\lambda) - \int_{X\times Y} f^- d(\mu\otimes\lambda)$$

$$= \int_{X\times Y} f\, d(\mu\otimes\lambda).$$

id. pour ψ. CQFD.

* Remarque :

pour vérifier que $f \in \mathcal{L}^1_{X\times Y}(\mu\otimes\lambda)$, il suffit de vérifier que $\int_X d\mu \int_Y |f(x,y)|\, d\lambda < +\infty$

$$\left(\text{ou } \int_Y d\lambda \int_X |f(x,y)|\, d\mu < +\infty \right).$$

4 – Produit d'un nbre fini d'espaces mesurés tous σ-finis.

Tribus produits

$(X_i, \mathcal{A}_i)$ $i \in \{1,2,3\}$.

$(\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2)\times\mathcal{A}_3$; $\mathcal{A}_1\times(\mathcal{A}_2\times\mathcal{A}_3)$; $\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2\times\mathcal{A}_3 =$ tribu engendrée par les cubes (ie de la forme $A_1\times A_2\times A_3$ $A_i\in\mathcal{A}_i$) sont des tribus de $X_1\times X_2\times X_3$.

En fait, elles sont égales.

dem : $\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2\times\mathcal{A}_3 \subset (\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2)\times\mathcal{A}_3$: évident.

autre sens : il suffit de montrer que

$\forall \Omega \in \mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2$ $\forall C \in \mathcal{A}_3$ $\Omega\times C \in \mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2\times\mathcal{A}_3$.

Soit donc $C \in \mathcal{A}_3$.

$\{\Omega \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \,/\, \Omega \times C \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_3\}$ est une tribu

car $\emptyset \in ..$

stable par $\bigcup_n$

$\Omega^c \times C = (\Omega \times C)^c \cap (X_1 \times X_2 \times C)$. $\longrightarrow$ stable par passage au complémentaire.

$\Rightarrow \forall \Omega \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \quad \Omega \times C \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_3$.

CQFD.

Mesures produits.

μ_1, μ_2, μ_3 σ-finies. $(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3)$ notée $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3$.

D'où les théorèmes de Fubini ...

sur $(X_1 \times X_2) \times X_3$ $(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3$ est l'unique mesure vérifiant $((\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3)(\Omega \times C) = (\mu_1 \otimes \mu_2)(\Omega).\mu_3(C)$ $\quad (\Omega \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$.

Calculons donc $(\mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3))(\Omega \times C) \overset{?}{=} (\mu_1 \otimes \mu_2)(\Omega)\,\mu_3(C)$.

soit $\{\Omega \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ qui vérifient $*\}$:

cet ens. contient les réunions finies de rectangles, stable par $\cup\uparrow$, par $\cap\downarrow$ (les mesures st σ-finies) - d'où rés.

Rappel: $\Omega \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

$$(\mu \otimes \lambda)(\Omega) = \int_X \lambda(\Omega_x)\, d\mu = \int_Y \mu(\Omega^y)\, d\lambda.$$

Vérifions que c'est bien une mesure.

* $(\mu \otimes \lambda)(\emptyset) = 0$.
* $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 2 à 2 disjoints $\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n$

$\Omega_x = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_{n,x}$. les $\Omega_{n,x}$ sont 2 à 2 disjoints et $\Omega_{n,x} \in \mathcal{B}$.

$$\Rightarrow \lambda(\Omega_x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(\Omega_{n,x}).$$

$$\Rightarrow (\mu\otimes\lambda)(\Omega) = \int_X \lambda(\Omega_x)\, d\mu = \underbrace{\int_X \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(\Omega_{n,x})\, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_X \lambda(\Omega_{n,x})\, d\mu}_{\text{(fonctions positives)}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\mu\otimes\lambda)(\Omega_n).$$

cas part. du th. de Fubini-Tonelli
pour la mesure discrète
mais on l'utilise pour dém. le dit th.

Exemple : mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Lemme : $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^p) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$.

tribus boréliennes.

dém : $\subset$:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p & \\ {}^{p_1}\swarrow & & \searrow^{p_2} \\ \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^p \end{array}$$

p_1 et p_2 sont continues donc mesurables pour les tribus boréliennes

$\Rightarrow \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $A \times \mathbb{R}^p \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$

$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$, $\mathbb{R}^n \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$.

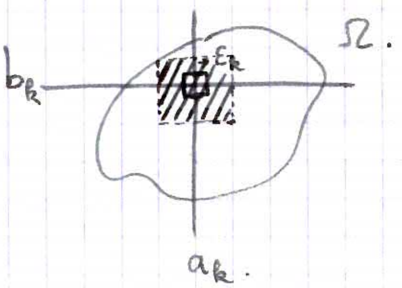
$\Rightarrow A \times B = (A \times \mathbb{R}^p) \cap (\mathbb{R}^n \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$.

$\Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$ est une tribu contenant les rectangles.

$\Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p) \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$.

$\supset$: soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.

$\{(a_k, b_k)\}_{k\geq 1}$ $a_k \in \mathbb{R}^n$ $b_k \in \mathbb{R}^p$; les coordonnées de a_k et b_k étant rationnelles. et $(a_k, b_k) \in \Omega$.



$\forall k, \exists \varepsilon_k$ / $\underbrace{B(a_k,\varepsilon_k)}_{} \times \underbrace{B(b_k,\varepsilon_k)}_{} \subset \Omega$.

$\varepsilon_k = 2^{-(\cdot)} d((a_k,b_k), \Omega^c)$. boules euclidiennes

$\Rightarrow \Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(a_k,\varepsilon_k) \times B(b_k,\varepsilon_k)$: réunion dénombrable de rectangles

$\Rightarrow \Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$

$\Rightarrow \quad \underleftrightarrow{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)}$

tribu borélienne
(ie engendrée par les ouverts).

Définition:

Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$: λ_n la mesure définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ par $\lambda_n = \lambda_1 \otimes \lambda_1 \dots \otimes \lambda_1$ où λ_1 est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

$$\Big(\underbrace{\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \dots \times \mathcal{B}(\mathbb{R})}_{n \text{ fois}} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \Big).$$

La tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est la complétée de la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ie $A \subset \mathbb{R}^n$ est Lebesgue mesurable ssi $\exists B, C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ / $B \subset A \subset C$; $\lambda_n(C \setminus B) = 0$.

⚠ $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}) \not\subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

ex: $E \subset \mathbb{R}$, non mesurable ie $E \notin \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

soit $\Omega = \{(0,x) / x \in E\}$.

$\Omega \subset (0 \times \mathbb{R})$ borélien de mesure nulle

$\Rightarrow \Omega \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

mais $\Omega \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}) \times \mathcal{L}(\mathbb{R})$ car $\Omega_0 = E \notin \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Exemples: (Fubini). $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \lambda_2)$.

$$f(x,y) = \frac{1}{(1+|y|)(1+|y|x^2)} . \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

f est continue donc mesurable.

f est positive.

$$\int \frac{1}{1+|y|}\left(\int \frac{dx}{1+|y|x^2}\right) dy = \int \frac{\pi}{\sqrt{|y|}\,(1+|y|)} dy \quad < +\infty.$$

Pour $y=0$ $\displaystyle\int \frac{dx}{1+|y|x^2} = +\infty.$

Pour $y \neq 0$ $\displaystyle\int \frac{dx}{1+|y|x^2} = \frac{\pi}{\sqrt{|y|}}.$

$\Rightarrow f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^2}$. (rem : Fubini $\rightarrow$ pour presque tout y $f^y \in \mathcal{L}^1$)

$$\boxed{\begin{array}{l} \left(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \underset{\lambda_n}{\overset{}{dx}}\right). \quad (dx = \lambda_n) \\ f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^\alpha} \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad x^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2. \\ f \text{ est intégrable ssi } \alpha > \dfrac{n}{2}. \end{array}}$$

en effet :

récurrence sur n :

$$\int f(x_1,\dots,x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \int dx_1 \dots dx_{n-1} \int f(\overbrace{x_1,\dots}^{x'}, x_n)\, dx_n$$

$\uparrow$ Fubini-Tonelli.

$$\int f(x_1,\dots,x_n)\, dx_n = \int \frac{dx_n}{(1+x'^2+x_n^2)^\alpha} = \frac{(1+x'^2)^{1/2}}{(1+x'^2)^\alpha} \int \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha}$$

$x_n = (1+x'^2)^{1/2}\, t.$

si $\alpha \leq \frac{1}{2}$: $\displaystyle\int \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha} = +\infty \Rightarrow f \notin \mathcal{L}^1.$

si $\alpha > \frac{1}{2}$: $\displaystyle\frac{1}{(1+x'^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}} \in \mathcal{L}^1 \iff \alpha - \frac{1}{2} > \frac{n-1}{2}.$ (hyp. récurrence)

$\iff \alpha > \frac{n}{2}.$