UE Calcul différentiel **CC 19 avril 2006**

Aucun document n'est autorisé. *Durée : 3h*

Les exercices sont indépendants les uns des autres.

Exercice 1 . Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables au point 1, et soit

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & F(x,y) := f(xy) + g(x/y)\,. \end{array}$$

Montrer que F est différentiable en $(1,1)$ et calculer $\mathrm{d}F_{(1,1)}$.

Exercice 2 . On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire habituel $\langle .,. \rangle$ et de la norme euclidienne associée $||.||$. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ une application linéaire continue vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\,, \quad \langle u(x)\,,\, y \rangle \,=\, \langle x\,,\, u(y) \rangle\,.$$

1. Soit $f\,:\,\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) \,=\, \langle x\,,\,u(x)\rangle$. Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et calculer $\mathrm{d}f_x(y)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $y \in \mathbb{R}^n$.
2. Soit $g\,:\,\mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ définie par
$$g(x) \,=\, \frac{f(x)}{\|x\|^2}\,.$$
Montrer que g est différentiable sur $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ et calculer $\mathrm{d}g_x(y)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ et tout $y \in \mathbb{R}^n$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. Montrer que $\mathrm{d}g_a \,=\, 0$ si et seulement si a est un vecteur propre de u.

Exercice 3 . On considère les fonctions

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) := (\,\mathrm{e}^{x-y}\,,\, x^2 \,+\, y^2\,, x\,y\,)\,, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v,w) & \mapsto & g(u,v,w) := (\,u^2 \,+\, v^2 \,+\, w^2\,,\, u\,v\,w\,)\,. \end{array}$$

1. Montrer que f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur leurs domaines de définition.
2. Montrer $g \circ f$ est un difféomorphisme local en $(1,1)$.

Exercice 4 . Soit E un espace de Banach : $\mathscr{L}(E)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de E dans E munie de la norme $\|\cdot\|$ (subordonnée à celle de E). On note $I_E\,:\,x \mapsto x$ l'application identité sur E. Soit $\begin{array}{rccl} \Theta: & \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{L}(E) \\ & u & \mapsto & \Theta(u) \,:=\, u \circ u\,. \end{array}$

1. Montrer que Θ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{L}(E)$.
2. Calculer $\mathrm{d}\Theta_u$ pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$.
3. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $v \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $\|\,v \,-\, I_E\,\| \,<\, \varepsilon$, l'équation $u \circ u \,=\, v$ possède une solution dans $\mathscr{L}(E)$.

4. On suppose ici $E = \mathbb{R}^2$, et l'on considère les éléments u et h de $\mathscr{L}(E)$ dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont respectivement

$$U := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Calculer $\mathrm{d}\Theta_u(h)$. En déduire qu'il n'existe pas de fonction différentiable Ψ définie sur un voisinage $\mathscr{W}$ de I_E et à valeurs dans un voisinage de u dans $\mathscr{L}(E)$, telle que $\Psi(I_E) = u$ et $\Psi(w) \circ \Psi(w) = w$ pour tout $w \in \mathscr{W}$.

Exercice 5 . Soient $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels, muni d'une norme quelconque, $G = \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace des matrices antisymétriques, et $F = \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace des matrices symétriques. Pour tout matrice M, on notera M^{t} la matrice transposée de M, obtenue par échange des lignes et des colonnes. On rappelle que, par définition, une matrice A est antisymétrique si $A^{\mathrm{t}} = -A$, et qu'une matrice S est symétrique si $S^{\mathrm{t}} = S$. On notera I_n la matrice identité et 0_n la matrice nulle. On considère l'application

$$\begin{array}{rrcl} f : & G \times F & \to & F \\ & (A,S) & \mapsto & f(A,S) := (S+A)(S-A) - I_n . \end{array}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer $\mathrm{d}f_{(A,S)}$ pour tout $(A,S) \in G \times F$.
2. Montrer que la différentielle partielle de f par rapport à S, $\mathrm{d}_2 f$ est telle que $\mathrm{d}_2 f_{(0_n, I_n)}$ est un isomorphisme de F.
3. Déduire de ce qui précède qu'il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de 0_n dans G, un voisinage $\mathscr{W}$ de I_n dans F, et une application $\varphi : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ de classe $\mathscr{C}^1$ tels que, pour tout $(A,S) \in \mathscr{V} \times \mathscr{W}$, $f(A,S) = 0_n$ équivaut à $S = \varphi(A)$.
4. Calculer $\mathrm{d}\varphi_{0_n}$.
5. Démontrer que $E = F \oplus G$: pour toute matrice M, on calculera $S \in F$ et $A \in G$ en fonction de M et M^{t} tels que $M = S + A$.
6. Déduire de ce qui précède qu'il existe un voisinage $\mathscr{U}$ de I_n dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et une application $\psi : \mathscr{V} \to F$ de classe $\mathscr{C}^1$ tels que, $\psi(0_n) = I_n$, $\mathrm{d}\psi_{0_n} \equiv 0$, et pour tout $M \in \mathscr{U}$, $M\, M^{\mathrm{t}} = I_n$ équivaut à

$$M = \frac{M - M^{\mathrm{t}}}{2} + \psi\left(\frac{M - M^{\mathrm{t}}}{2}\right) .$$