UE Calcul différentiel **Contrôle Partiel du 4 avril 2007**

Aucun document n'est autorisé. *Durée : 3h*

Les exercices sont indépendants les uns des autres.

Exercice 1 . Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $g(u,v) = f(\cos u + \sin v, \sin u + \cos v, \mathrm{e}^{u-v})$, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$.
2. On suppose que la matrice jacobienne de f au point $a = (1,1,1)$ est

$$\mathrm{D}f_a = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Calculer $\mathrm{d}g_b(h)$ pour $b = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, et $h \in \mathbb{R}^2$ quelconque.

Exercice 2 . Soit φ une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) := \displaystyle\int_0^{x+y} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccl} g : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & g(x,y) := \displaystyle\int_0^{xy} \varphi(t)\,\mathrm{d}t\,. \end{array}$$

1. Montrer que f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les différentielles de f et g, c'est-à-dire $\mathrm{d}f_{(x,y)}(h,k)$ et $\mathrm{d}g_{(x,y)}(h,k)$ quels que soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(h,k) \in \mathbb{R}^2$.
3. On définit ensuite

$$\begin{array}{rccl} F : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & F(x,y) := (f(x,y), g(x,y))\,. \end{array}$$

   (a) On note $B :=]-1,1[\times]-1,1[$, et pour fixer les idées, on munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que F est Lipschitzienne sur B, c'est-à-dire qu'il existe $k > 0$ tel que pour tous $(x_1,y_1),\ (x_2,y_2) \in B$,

$$\|F(x_1,y_1) - F(x_2,y_2)\|_\infty \;\leq\; k\,\|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)\|_\infty\,.$$

   (On s'efforcera de donner la constante k optimale.)

   (b) En supposant $\varphi(0) \neq 0$ et $\varphi(1) \neq 0$, montrer que F est un difféomorphisme local au point $(0,1)$. Dire pourquoi il en est de même au point $(1,0)$.

   (c) En supposant que $\varphi(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, montrer que la restriction de F à

$$D \;:=\; \{(x,y)\,;\; x < y\}$$

   est un difféomorphisme de D sur $F(D)$. On commencera par justifier que D est un ouvert.

Exercice 3 . On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire habituel $\langle .,. \rangle$ et de la norme euclidienne associée $||.||$. Soit une fonction dérivable $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction $g : x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \mapsto f(\|x\|)$ est différentiable, et exprimer sa différentielle à l'aide de la dérivée de f.
2. Soit $e : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n$ définie par
$$e(x) = \frac{x}{\|x\|}\,.$$
Montrer que e est différentiable sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et calculer $\mathrm{d}e_x(h)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$.
3. Soit $v : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n$ définie par
$$v(x) = f(\|x\|)\, e(x)\,.$$
Montrer que v est différentiable et exprimer
$$\mathrm{div}\, v(x) = \mathrm{tr}\, \mathrm{d}v_x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x)$$
à l'aide de n, f et de f'.

Exercice 4 . Soit E un espace de Banach. On désigne par $\mathscr{L}(E)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans E, que l'on munit de la norme, notée $\|\cdot\|$, subordonnée à celle de E. On note $I_E : x \mapsto x$ l'application identité sur E. Quel que soit $u \in \mathscr{L}(E)$, on a par convention $u^0 = I_E$, et pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit u^n par la formule récurrence $u^n = u \circ u^{n-1}$.

1. Montrer que pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u^n}{n!}$ converge dans $\mathscr{L}(E)$. On notera e^u sa somme. Pour la suite, on *admettra* la propriété suivante :
$$\forall\, u,\, v \in \mathscr{L}(E)\,,\ \left(v \circ u = u \circ v \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{u+v} = e^u \circ e^v\right)\,.$$
2. On fixe $u \in \mathscr{L}(E)$ et l'on définit :
$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R} & \to & \mathscr{L}(E) \\ & t & \mapsto & \mathrm{e}^{tu}\,. \end{array}$$
Montrer que φ est différentiable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\varphi'(t) = u \circ \varphi(t)\,.$$
(On rappelle que $\varphi'(t) = \mathrm{d}\varphi_t(1)$.)