

**Exercice 1.** Si  $U = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_i > 0 \ \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ , et

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x) := \prod_{k=1}^n x_k + \alpha^{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}$$

1. l'application  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , car c'est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas dans  $U$ .

2.

(a) Pour tout  $x \in U$  et pour tout  $h \in \mathbb{R}^n$  on a

$$df_x(h) = \sum_{j=1}^n \left( \prod_{k \neq j} x_k - \alpha^{n+1} \frac{1}{x_j^2} \right) h_j.$$

(b) Si  $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$  est tel que  $df_a = 0$  alors pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\prod_{k \neq j} a_k = \alpha^{n+1} \frac{1}{a_j^2}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad a_j \prod_{k=1}^n a_k = \alpha^{n+1}.$$

Par conséquent les  $a_j$  sont tous égaux à  $\alpha$ ; autrement dit  $a = (\alpha, \dots, \alpha)$ . Inversement, ce point est évidemment un point critique.

3.

(a) Pour tout  $x \in U$  et pour tous  $h, h' \in \mathbb{R}^n$  on a

$$d^2 f_x(h, h') = \sum_{j=1}^n \sum_{k \neq j} \prod_{m \neq j, k} x_m h_j h'_k + 2 \sum_{j=1}^n \frac{\alpha^{n+1}}{x_j^3} h_j h'_j.$$

(b) En particulier on a,

$$d^2 f_a(h, h) = \alpha^{n-2} \sum_{j=1}^n \sum_{k \neq j} h_j h_k + 2 \alpha^{n-2} \sum_{j=1}^n h_j^2,$$

soit encore

$$\alpha^{2-n} d^2 f_a(h, h) = \sum_{j=1}^n h_j^2 + \left( \sum_{j=1}^n h_j \right)^2 \geq \sum_{j=1}^n h_j^2 = \|h\|^2$$

si  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^n$ . Donc (puisque  $\alpha > 0$ ), d'après un théorème du cours,  $a$  est un minimum local strict pour  $f$ .

(c) Dans le cas  $n = 1$ , la fonction  $f : x \mapsto x + \alpha^2/x$  atteint son minimum sur  $\mathbb{R}^{+*}$  ( $2\alpha$ ) au point  $a = \alpha$  (d'après l'identité remarquable  $x^2 + \alpha^2 - 2\alpha x = (x - \alpha)^2$  !)

**Exercice 2.** Si  $f : I \rightarrow E$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ ,

1. alors pour tout  $a \in I$ , pour tout  $(x, y) \in I \times I$  avec  $x \neq y$ , l'application

$$F : z \mapsto \frac{1}{x-y} (f(z) - f(y) - (z-y) f'(a))$$

est aussi de classe  $\mathcal{C}^1$ , et sa différentielle est donnée par

$$dF_z(h) = \frac{1}{x-y} (df_z(h) - h f'(a)) = \frac{1}{x-y} (df_z - df_a)(h).$$

Donc d'après le théorème des accroissements finis (version "raffinée"),

$$\|F(x) - F(y)\| \leq |x-y| \sup_{z \in ]x,y[} \left\| \frac{1}{x-y} (df_z - df_a) \right\|,$$

ce qui donne

$$\left\| \frac{1}{x-y} (f(x) - f(y)) - f'(a) \right\| \leq \sup_{z \in ]x,y[} \|df_z - df_a\|.$$

2. L'application

$$g : I \times I \rightarrow E$$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x-y} (f(x) - f(y)) & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

- (a) est continue sur l'ouvert  $(I \times I) \setminus \Delta$  comme composée de  $(x, y) \mapsto (f(x) - f(y), x - y)$  et de  $(u, s) \in E \times \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{s} u$ . De plus, d'après la question 1),

$$\|g(x, y) - g(a, a)\| \leq \sup_{z \in ]x,y[} \|df_z - df_a\|,$$

ce qui tend vers 0 lorsque  $(x, y)$  tend vers  $(a, a)$ , par continuité de  $df$  au point  $a$ . (On peut aussi remarquer que

$$g(x, y) = \int_0^1 f'(x + t(y-x)) dt$$

pour tout  $(x, y) \in I \times I$ , et appliquer le théorème de Lebesgue.)

- (b) Par la même décomposition que ci-dessus, on voit que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'ouvert  $(I \times I) \setminus \Delta$ .
3. Soit  $a \in I$ . On suppose que  $f$  est deux fois différentiable en  $a$ , et l'on veut montrer que  $g$  est différentiable en  $(a, a)$ .

- (a) Comme on l'a déjà utilisé, on a  $df_a(h) = h f'(a)$ , d'où encore  $d^2 f_a(h, h) = h^2 f''(a)$  quel que soit  $h \in \mathbb{R}$ . Par suite, on a tout simplement  $f''(a) = d^2 f_a(1, 1)$ .

- (b) Si  $g$  est différentiable en  $(a, a)$ , alors en différentiant l'application  $x \mapsto g(x, x) = f'(x)$  au point  $a$ , on obtient

$$d_1 g_{(a,a)}(h) + d_2 g_{(a,a)}(h) = h f''(a).$$

De plus,  $g$  étant symétrique, ses différentielles partielles  $d_1 g$  et  $d_2 g$  coïncident. Par conséquent,

$$d_1 g_{(a,a)}(h) = d_2 g_{(a,a)}(h) = \frac{h}{2} f''(a),$$

d'où

$$dg_{(a,a)}(h, k) = d_1 g_{(a,a)}(h) + d_2 g_{(a,a)}(k) = \frac{h+k}{2} f''(a).$$

(c) On a

$$g(x, y) - g(a, a) - \frac{x - a + y - a}{2} f''(a) = \int_0^1 (f'(x + t(y - x)) - f'(a) - (x + t(y - x) - a) f''(a)) dt.$$

Or, comme  $f'$  est différentiable en  $a$ , il existe une fonction  $\varphi$  tendant vers 0 au point  $a$  telle que pour tout  $x \in I$ ,

$$f'(z) - f'(a) - (z - a) f''(a) = (z - a) \varphi(z).$$

Soit donc  $\varepsilon > 0$ , et  $\eta > 0$  tel que  $|z - a| \leq \eta$  implique  $|\varphi(z)| \leq \varepsilon$ . Alors, pour tout  $(x, y) \in I \times I$  tel que  $|x - a| \leq \eta$  et  $|y - a| \leq \eta$ ,

$$\left| g(x, y) - g(a, a) - \frac{x - a + y - a}{2} f''(a) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} (|x - a| + |y - a|).$$

Ceci montre que  $g$  est différentiable en  $(a, a)$ , de différentielle donnée (comme prévu) par  $dg_{(a,a)}(h, k) = \frac{h+k}{2} f''(a)$ .

**Exercice 3.** L'ensemble  $\Omega := \{(t, x) \in \mathbb{R}^2; (t - x)x + 1 > 0\}$

1. est ouvert comme image réciproque de l'ouvert  $\mathbb{R}^{+*}$  par l'application continue  $(t, x) \mapsto (t - x)x + 1$ . L'application

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) \mapsto f(t, x) := \sqrt{(t - x)x + 1} - 1$$

n'est pas uniformément bornée sur  $\Omega$  : elle tend vers  $+\infty$  par exemple lorsque  $t = 2x$  et  $x$  tend vers  $+\infty$ .

2. Elle n'est pas non plus uniformément Lipschitzienne par rapport à  $x$  : d'après le théorème des accroissements finis (version avec égalité pour les fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ) pour tout  $(t, x, y)$  avec  $(t, x) \in \Omega$ ,  $(t, y) \in \Omega$ , il existe  $z$  dans le segment  $[x, y]$  tel que

$$\frac{f(t, x) - f(t, y)}{x - y} = f'(z),$$

et  $|f'(z)|$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  et  $y$ , et donc aussi  $z$ , tendent vers  $t \pm \sqrt{t^2 + 1}$ .

3. Soit l'équation différentielle

$$(E) \quad \frac{du}{dt} = f(t, u).$$

- (a) L'application  $f$  étant continue dans  $\Omega$ , elle est localement bornée, et comme elle est même de classe  $\mathcal{C}^1$ , elle localement Lipschitzienne d'après le théorème des accroissements finis. Donc pour tout  $(t_0, u_0) \in \Omega$  (ouvert), il existe des intervalles ouverts  $I$  et  $U$  tels que  $(t_0, u_0) \in I \times U \subset \Omega$ , et des réels strictement positifs  $M$  et  $L$  tels que pour tout  $t \in I$ , pour tout  $x \in U$ , pour tout  $y \in U$ ,

$$|f(t, x)| \leq M \quad \text{et} \quad |f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|.$$

On peut bien sûr supposer  $U$  centré en  $u_0$ . (Le nombre  $L$  est obtenu en prenant un majorant de  $df$  au voisinage de  $(t_0, u_0)$ .)

- (b) Soit  $J \subset I$  un intervalle contenant  $t_0$  de longueur  $\tau$  avec  $\tau < \rho/M$ , où  $\rho$  désigne le rayon de  $U$ . On peut supposer que  $J$  est fermé (donc compact),  $\tau \leq R/M$  avec  $R < \rho$ , et construire  $u \in \mathcal{C}^1(J; V)$  solution de (E) telle que  $u(t_0) = u_0$ , où  $V \subset U$  est un intervalle fermé contenant  $u_0$  et de rayon  $R$ . La construction passe par une récurrence : posant  $u^0 \equiv u_0$ , on construit une suite  $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{C}(J; V)$  grâce à la formule intégrale

$$u^{k+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u^k(s)) ds.$$

La restriction  $\tau \leq R/M$  assure que  $u^k$  reste à valeurs dans  $V$ . On montre de plus que la suite est de Cauchy dans  $\mathcal{C}(J; V)$  (cf cours). Sa limite  $u$  donne la solution cherchée, car elle vérifie

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

et elle est donc de classe  $\mathcal{C}^1$  par dérivation sous le signe somme.

- (c) La fonction nulle étant une solution évidente de (E), si  $u_0 = 0$  alors  $u$  est identiquement nulle d'après l'unicité des solutions.
- (d) Si  $u_0 > 0$  alors  $u$  ne peut s'annuler (sinon elle serait identiquement nulle d'après la question précédente) et donc  $u(t) > 0$  pour tout  $t \in J$ .
- (e) L'équation (E) est invariante par le changement  $(t, u) \mapsto (-t, -u)$ . Donc la même construction que précédemment donne  $v \in \mathcal{C}^1(-J; -U)$  solution de (E) telle que  $v(-t_0) = -u_0$ .
- (f) Et en fait  $v(-t) = -u(t)$  car les deux fonctions  $t \mapsto v(-t)$  et  $-u$  sont solutions du même problème de Cauchy.

#### Exercice 4 .

##### 1. L'application

$$\begin{aligned} \Theta : \text{Isom}(E) &\rightarrow \text{Isom}(E) \\ u &\rightarrow \Theta(u) := u^{-1}. \end{aligned}$$

- (a) a sa différentielle donnée par (cf cours)

$$d\Theta_u(k) = -u^{-1} \circ k \circ u^{-1}.$$

- (b) On commence par démontrer que  $\Theta$  est effectivement différentiable, en revenant à la définition de la différentiabilité (cf TDs). Puis on montre par récurrence sur  $k$  qu'elle est de classe  $\mathcal{C}^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , grâce à l'expression de sa différentielle, composée de  $u \mapsto (\Theta(u), \Theta(u))$  et de l'application bilinéaire continue

$$(\ell, \ell') \in \mathcal{L}(E)^2 \mapsto \phi(\ell, \ell') \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E)); \phi(\ell, \ell')(h) = -\ell \circ h \circ \ell'.$$

2. Si  $f : U \rightarrow E$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , telle que  $df_x \in \text{Isom}(E)$  pour tout  $x \in U$ , l'application

$$\begin{aligned} \varphi : U &\rightarrow E \\ x &\mapsto \varphi(x) := x - (df_x)^{-1}(f(x)). \end{aligned}$$

- (a) est de classe  $\mathcal{C}^1$  comme composée  $x \mapsto (x, f(x), \Theta(df_x))$  et de  $(x, y, u) \mapsto x - u(y)$ .
- (b) La différentielle de  $\varphi$  est donnée par

$$d\varphi_x(h) = h - d\Theta_{df_x}(d(df_x)_x(h))(f(x)) - \Theta(df_x)(df_x(h)),$$

soit encore, après simplifications,

$$d\varphi_x(h) = (df_x)^{-1}(d^2 f_x(h, (df_x)^{-1}(f(x))).$$