UE Calcul différentiel **Examen 24 mai 2006**

Aucun document n'est autorisé. *Durée : 3h*

Les exercices sont indépendants les uns des autres.

Les réponses non justifiées ne seront pas comptabilisées.

Exercice 1 . Soient $U = \{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \, ; \; x_i > 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \}$, $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, et

$$\begin{array}{rccl} f : & U & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x = (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & f(x) := \displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k + \alpha^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \, . \end{array}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur U.
2.
   (a) Calculer $\mathrm{d}f_x$ pour tout $x \in U$.

   (b) Montrer que f admet un unique point critique $a \in U$ (c'est-à-dire tel que $\mathrm{d}f_a = 0$).
3.
   (a) Calculer $\mathrm{d}^2 f_x$ pour tout $x \in U$.

   (b) Montrer que a est un minimum local strict pour f.

   (c) Dans quel cas simple peut-on dire que a est un minimum global ?

Exercice 2 . Soient I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, E un espace de Banach et $f : I \rightarrow E$ une application de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Soit $a \in I$. Montrer que pour tout $(x, y) \in I \times I$ avec $x \neq y$,

$$\left\| \frac{1}{x - y} \left(f(x) - f(y) \right) - f'(a) \right\| \leq \sup_{z \in]x, y[} \| \mathrm{d}f_z - \mathrm{d}f_a \| \, .$$

2. Soit

$$\begin{array}{rccl} g : & I \times I & \rightarrow & E \\ & (x, y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{x - y} \left(f(x) - f(y) \right) & \text{si } x \neq y \\ \\ f'(x) & \text{si } x = y \end{cases} \end{array}$$

   (a) Montrer que g est continue sur $I \times I$.

   (b) Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $(I \times I) \backslash \Delta$, où $\Delta := \{ (x, x) \, ; \; x \in I \}$.
3. Soit $a \in I$. On suppose que f est deux fois différentiable en a, et l'on veut montrer que g est différentiable en (a, a).

   (a) Quelle est la relation entre $f''(a)$ (dérivée seconde de f au point a) et $\mathrm{d}^2 f_a$ (différentielle seconde de f au point a) ?

   (b) En supposant que g est différentiable en (a, a), calculer un candidat pour $\mathrm{d}g_{(a,a)}$ à l'aide de $f''(a)$.

   (c) Démontrer que g est différentiable en (a, a).

Exercice 3 . Soient $\Omega \;:=\; \{\,(t,x)\in\mathbb{R}^2\,;\ (t-x)\,x\,+\,1\;>\;0\,\}$ et

$$\begin{array}{rccl} f\ : & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \mapsto & f(t,x)\;:=\;\sqrt{(t-x)\,x\,+\,1}\,-\,1\,. \end{array}$$

1. L'ensemble Ω est-il ouvert, et pourquoi ? L'application f est-elle bornée sur Ω ?
2. Existe-t-il $L\in\mathbb{R}^{+*}$ tel que

   $$|f(t,x)\,-\,f(t,y)|\;\leq\;L\,|x-y|$$

   pour tous t, x, y tels que $(t,x)\in\Omega$ et $(t,y)\in\Omega$?
3. On considère l'équation différentielle

   $$(\mathrm{E})\qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\;=\;f(t,u)\,.$$

   Il n'est pas question de chercher des solutions explicites de cette équation différentielle.
   (a) Soit $(t_0,u_0)\in\Omega$. Montrer qu'il existe des intervalles ouverts I et U avec U centré en u_0 tels que $(t_0,u_0)\in I\times U\subset\Omega$, ainsi que des réels strictement positifs M et L tels que pour tout $t\in I$, pour tout $x\in U$, pour tout $y\in U$,

   $$|f(t,x)|\;\leq\;M \quad\text{et}\quad |f(t,x)\,-\,f(t,y)|\;\leq\;L\,|x-y|\,.$$

   (b) Soit $J\subset I$ un intervalle contenant t_0 et de longueur strictement inférieure à celle de U divisée par $2M$. En adaptant la preuve d'un théorème du cours, démontrer qu'il existe $u\in\mathscr{C}^1(J;U)$ solution de (E) telle que $u(t_0)\;=\;u_0$.
   (c) Supposons ici $u_0\;=\;0$. Que vaut alors la solution u ? On justifiera la réponse en faisant appel à un résultat du cours que l'on énoncera avec soin.
   (d) Supposons maintenant $u_0>0$. Démontrer que $u(t)\;>\;0$ pour tout $t\in J$.
   (e) Montrer qu'il existe $v\in\mathscr{C}^1(-J;-U)$ solution de (E) telle que $v(-t_0)\;=\;-u_0$.
   (f) Existe-t-il une relation entre u et v, et si oui, laquelle ?

Exercice 4 . Soit E un espace de Banach. On note $\mathrm{Isom}(E)$ l'ensemble des isomorphismes de E : on rappelle que c'est un ouvert de $\mathscr{L}(E)$ (espace des applications linéaires continues de E dans E, muni de la norme subordonnée à celle de E).

1. Soit

   $$\begin{array}{rccl} \Theta\ : & \mathrm{Isom}(E) & \to & \mathrm{Isom}(E) \\ & u & \to & \Theta(u)\;:=\;u^{-1}\,. \end{array}$$

   (a) En admettant que Θ est différentiable, calculer un candidat pour sa différentielle.
   (b) Démontrer que Θ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
2. Soit U un ouvert de E, et une application $f\;:\;U\;\to\;E$ de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que $\mathrm{d}f_x\in\mathrm{Isom}(E)$ pour tout $x\in U$, et l'on considère l'application

   $$\begin{array}{rccl} \varphi\ : & U & \to & E \\ & x & \mapsto & \varphi(x)\;:=\;x\,-\,(\mathrm{d}f_x)^{-1}(f(x))\,. \end{array}$$

   (a) Démontrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$.
   (b) Calculer la différentielle de φ.