

Exercice 1 .

1. On calcule $g'(t) = (t - 1)(3t + 1)$ et comme $-1/3 \notin \mathbb{R}^+$ (le domaine de définition de g et donc de g'), on en déduit que g' s'annule seulement en $t = 1$.
2. On a $2\varphi(x, y, z) := (x + y)^2 + (x - y)^2 + y^2 + z^2 \geq 0$ comme somme de termes positifs ou nuls, et $\varphi(x, y, z) = 0$ si et seulement tous ces termes sont nuls, ce qui équivaut à $z = 0, y = 0$ et $x = 0$.
3. Par la formule de différentiation des fonctions composées on a $df_a(h) = g'(\varphi(a)) d\varphi_a(h)$. Ainsi $df_a \equiv 0$ si et seulement si $g'(\varphi(a)) = 0$ ou $d\varphi_a \equiv 0$. Comme φ est à valeurs dans \mathbb{R}^+ , $g'(\varphi(a)) = 0$ équivaut d'après le 1) à $\varphi(a) = 1$. D'autre part, pour $a = (a_1, a_2, a_3)$ et $h = (h_1, h_2, h_3)$ on a

$$d\varphi_a(h) = (2a_1 + a_2 - a_3)h_1 + (2a_2 + a_1)h_2 + (2a_3 - a_1)h_3,$$

et par conséquent $d\varphi_a \equiv 0$ équivaut à

$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 - a_3 = 0, \\ 2a_2 + a_1 = 0, \\ 2a_3 - a_1 = 0, \end{cases}$$

système linéaire dont la seule solution est $a = (0, 0, 0)$.

4. Par la formule de différentiation des fonctions composées on a pour tout $h, k \in \mathbb{R}^3$,

$$d^2 f_a(h, k) = g''(\varphi(a)) d\varphi_a(k) d\varphi_a(h) + g'(\varphi(a)) d^2 \varphi_a(h, k).$$

En particulier, pour $a = (0, 0, 0)$ le premier terme est nul et il reste

$$d^2 f_{(0,0,0)}(h, k) = g'(0) d^2 \varphi_{(0,0,0)}(h, k) = -d^2 \varphi_{(0,0,0)}(h, k).$$

Par conséquent la matrice hessienne de f au point $(0, 0, 0)$ est l'opposé de la matrice hessienne de φ au même point. Elle s'écrit

$$D^2 f_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Comme φ est quadratique définie positive d'après le 2), sa hessienne $D^2 \varphi_{(0,0,0)}$ est aussi définie positive (on a $d^2 \varphi_a(h, h) = 2\varphi(h)$ pour tout $h \in \mathbb{R}^3$) et $(0, 0, 0)$ est donc *maximum* local de f .

5. Le point $t = 1$ est un minimum global de la fonction g (qui est décroissante sur $[0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[)$, donc g est à valeurs positives, et par conséquent f aussi. Si $a \neq (0, 0, 0)$ est un point critique de f , alors d'après le 3) on a $\varphi(a) = 1$ et donc $f(a) = g(1) = 0$, ce qui montre que a est un minimum global puisqu'on vient de montrer que pour tout $b \in \mathbb{R}^3$, $f(b) \geq 0$.

Exercice 2 .

1. La fonction $\Phi = dH$ est de classe \mathcal{C}^1 puisque H est supposée de classe \mathcal{C}^2 (c'est du cours). Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Pour montrer que l'application linéaire $d\Phi_x$ est un isomorphisme de \mathbb{R}^n sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, espace de même dimension que \mathbb{R}^n , il suffit de montrer que $d\Phi_x$ est injective. Or, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $d\Phi_x(h) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ est relié à $d^2 H$ par

$$\langle d\Phi_x(h), k \rangle = d^2 H_x(h, k) \quad \forall k \in \mathbb{R}^n.$$

(C'est la définition de $d^2 H_x$ donnée en cours.) Par suite, si $d\Phi_x(h)$ est nul alors en particulier

$$0 = \langle d\Phi_x(h), h \rangle = d^2 H_x(h, h) \geq \mu \|h\|^2$$

avec $\mu > 0$ par hypothèse, et donc $h = 0$. Ceci prouve que $d\Phi_x$ est injective.

2. D'après la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1,

$$\Phi(x) - \Phi(y) = \int_0^1 d\Phi_{y+t(x-y)}(x-y) dt = P(x, y)(x-y)$$

avec

$$P(x, y) := \int_0^1 d\Phi_{y+t(x-y)} dt \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})).$$

L'égalité $P(x, y) = P(y, x)$ s'obtient en faisant le changement de variables $t \mapsto 1-t$ dans l'intégrale. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \langle P(x, y)(h), k \rangle &= \int_0^1 \langle d\Phi_{y+t(x-y)}(h), k \rangle dt = \int_0^1 d^2H_{y+t(x-y)}(h, k) dt \\ &= \int_0^1 \langle d\Phi_{y+t(x-y)}(k), h \rangle dt = \langle P(x, y)(k), h \rangle \end{aligned}$$

d'après le théorème de Schwarz. Enfin,

$$\langle P(x, y)(h), h \rangle = \int_0^1 d^2H_{y+t(x-y)}(h, h) dt \geq \alpha \|h\|^2$$

avec

$$\alpha = \inf \{ d^2H_{y+t(x-y)}(h, h); t \in [0, 1], \|h\| = 1 \}.$$

Cette borne inférieure est atteinte sur le compact $[0, 1] \times \mathbb{S}^{n-1}$ par continuité de l'application $(t, h) \mapsto d^2H_{y+t(x-y)}(h, h)$, composée de $(t, h) \mapsto (d^2H_{y+t(x-y)}, h) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ et de $(\phi, h) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \mapsto \phi(h, h)$. Donc $\alpha > 0$ d'après l'hypothèse sur d^2H .

3. Par hypothèse Φ est surjective, et d'après le 1) c'est un difféomorphisme local en tout point. Il reste à montrer qu'elle est injective. Si $\Phi(x) = \Phi(y)$ alors $P(x, y)(x-y) = 0$, d'où

$$0 = \langle P(x, y)(x-y), x-y \rangle \geq \alpha \|x-y\|^2$$

et donc $x = y$. Ceci prouve que Φ est un difféomorphisme de \mathbb{R}^n sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$.

Exercice 3 . Soit $E := \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \sup_n |x_n| < +\infty\}$, muni de la norme définie par $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$: on rappelle que c'est un espace de Banach.

1. Pour tous $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on note xy la suite définie par $(xy)_n := x_n y_n$. On notera aussi $x^2 = xx$.

(a) Si $x, y \in E$, alors pour tout n , $|x_n y_n| \leq \|x\|_\infty \|y\|_\infty$ et donc xy appartient à E avec $\|xy\|_\infty \leq \|x\|_\infty \|y\|_\infty$. Ceci montre en outre que l'application bilinéaire

$$\begin{aligned} \varphi : E \times E &\rightarrow E \\ (x, y) &\mapsto xy \end{aligned}$$

est continue, donc de classe \mathcal{C}^∞ .

(b) L'application

$$\begin{aligned} \Theta : E &\rightarrow E \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

est composée de l'application $x \mapsto (x, x)$, qui est linéaire continue donc de classe \mathcal{C}^∞ , et de φ , donc elle est de classe \mathcal{C}^∞ . On a $d\theta_x(y) = 2xy$ pour $x, y \in E$.

2. (a) L'ensemble $\Omega = \{x \in E; \inf_n |x_n| > 0\}$ contient évidemment la suite de terme général 1 (par exemple) : il est donc non vide. Si $x \in \Omega$, soit $\varepsilon := \frac{1}{2} \inf_n |x_n|$, alors pour tout $y \in E$ tel que $\|x - y\| \leq \varepsilon$ on a pour tout n , $|y_n| \geq -\|x_n - y_n\|_\infty + |x_n| \geq \varepsilon > 0$ donc $y \in \Omega$. Ceci montre que Ω est ouvert.
- (b) Pour $x \in \Omega$, $\|x\|_\infty \neq 0$, et $1/\|x\|_\infty \leq |1/x_n| \leq 1/\inf |x_n|$, donc $1/x \in E$ avec $\|1/x\|_\infty \leq 1/\inf |x_n|$ et $1/x \in \Omega$ puisque $\inf |1/x_n| \geq 1/\|x\|_\infty$.
- (c) L'application Θ est de classe \mathcal{C}^1 . De plus, si $x \in \Omega$, $d\Theta_x$ est un isomorphisme car $d\Theta_x(y) = z$ équivaut à $y_n = z_n/(2x_n)$ quel que soit n .
3. (a) Pour $a \in \Omega$, $d_2\varphi_{(a,1/a)}(h) = ah$ donc $d_2\varphi_{(a,1/a)}$ est un isomorphisme de E (même raison que pour $d\Theta_x$). Comme $\varphi(a, 1/a) = 1$ et φ est de classe \mathcal{C}^1 , d'après le théorème des fonctions implicites, qu'il existe un voisinage ouvert V de a et un voisinage ouvert W de $1/a$ inclus dans Ω et $f: V \rightarrow W$ de classe \mathcal{C}^1 tels que, pour $(x, y) \in V \times W$ on ait $\varphi(x, y) = 1$ si et seulement si $y = \tilde{f}(x)$. Par suite, $f|_V = \tilde{f}$ est de classe \mathcal{C}^1 .
- (b) D'après la question précédente, f est de classe \mathcal{C}^1 en tout point de Ω . On peut alors calculer $df_x(h)$ en utilisant la relation $\varphi(x, f(x)) = 1$, valable en tout point $x \in \Omega$, et la formule de différentiation des fonctions composées. On obtient ainsi (ce à quoi on s'attendait) $df_x(h) = -h/x^2$.

Exercice 4. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad \frac{dx}{dt} = tx^2.$$

1. La fonction $(t, x) \mapsto tx^2$ est de classe \mathcal{C}^∞ donc en particulier continue et localement Lipschitzienne par rapport à x , donc le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique à (E).
2. (a) La fonction nulle étant solution évidente, d'après l'unicité des solutions, si $x_0 = 0$ alors $I = \mathbb{R}$ et $x(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- (b) Si $x_0 > 0$, supposons qu'il existe $t \in I$ tel que $x(t) \leq 0$. Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il devrait exister $t_1 \in I$ tel que $x(t_1) = 0$. Mais comme $x(t_0) > 0$ par hypothèse, c'est impossible d'après le 1).
- (c) D'après l'unicité des solutions, $J = -I$ et $y(t) = x(-t)$.
3. Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_0 t_0^2 < -2$. Alors $x(t)$ ne s'annule pas. Donc $x'(t)/x(t)^2 = t$, d'où par intégration, $-1/x(t) + 1/x_0 = \frac{1}{2}(t^2 - t_0^2)$, soit encore $1/x(t) = 1/x_0 + \frac{1}{2}(t_0^2 - t^2)$. Une borne de I est obtenue lorsque le second membre s'annule (car alors $|x(t)|$ tend vers $+\infty$), c'est-à-dire pour $t^2 = 2/x_0 + t_0^2$. Par hypothèse, x_0 ne peut être que négatif, et $t_0^2 > 2/x_0 + t_0^2 > 0$. Donc, si $t_0 > 0$, $I =]\sqrt{2/x_0 + t_0^2}, +\infty[$, et si $t_0 < 0$, $I =]-\infty, -\sqrt{2/x_0 + t_0^2}[$. Dans tous les cas,

$$x(t) = \frac{1}{1/x_0 + \frac{1}{2}(t_0^2 - t^2)}.$$