UE Calcul différentiel **Examen 7 juin 2007**

Aucun document n'est autorisé. *Durée : 3h*

Les exercices sont indépendants les uns des autres.

Exercice 1 . Soient

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & g(t) := (t-1)^2\,(t+1)\,, \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & \varphi(x,y,z) := x^2+y^2+z^2+xy-xz\,. \end{array}$$

1. Montrer que g' s'annule seulement en $t=1$.
2. Montrer que φ est à valeurs positives, et s'annule seulement en $(0,0,0)$.
3. Soit $f = g\circ\varphi$. Montrer que $a\in\mathbb{R}^3$ est un point critique de f si et seulement si $a=(0,0,0)$ ou $\varphi(a) = 1$.
4. Déterminer la matrice hessienne de f en $(0,0,0)$. En déduire la nature de ce point critique.
5. Montrer que f est à valeurs positives. En déduire que tout point critique non nul de f est un minimum global de f.

Exercice 2 . Pour $\ell\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ et $h\in\mathbb{R}^n$, on notera $\langle \ell, h\rangle = \ell(h)$. Soit $H\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, il existe $\mu>0$ tel que pour tout $h\in\mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{d}^2H_x(h,h) \ \geq\ \mu\,\|h\|^2\,,$$

et que l'application

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & \mathbb{R}^n & \to & \mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}) \\ & x & \mapsto & \Phi(x) := \mathrm{d}H_x \end{array}$$

est surjective.

1. Montrer que Φ est un difféomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer qu'il existe une application $P:\mathbb{R}^{2n}\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}))$ continue telle que $P(x,y) = P(y,x)$ et $\Phi(x)-\Phi(y) = P(x,y)\,(x-y)$ quel que soit $(x,y)\in\mathbb{R}^{2n}$, et vérifiant, d'une part,
$$\langle P(x,y)(h)\,,\,k\,\rangle \ =\ \langle P(x,y)(k)\,,\,h\,\rangle$$
pour tous $(x,y)\in\mathbb{R}^{2n}$ et $(h,k)\in\mathbb{R}^{2n}$. et d'autre part, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^{2n}$, il existe $\alpha>0$ tel que
$$\langle P(x,y)(h)\,,\,h\,\rangle \ \geq\ \alpha\,\|h\|^2$$
quel que soit $h\in X$. **Indication :** on exprimera $P(x,y)$ à l'aide d'une intégrale.
3. Déduire de ce qui précède que Φ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$.

Exercice 3 . Soit $E := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\,;\ \sup_n|x_n| < +\infty\}$, muni de la norme définie par $\|x\|_\infty = \sup_n|x_n|$: on rappelle que c'est un espace de Banach.

1. Pour tous $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on note xy la suite définie par $(xy)_n := x_ny_n$. On notera aussi $x^2=xx$.
   (a) Montrer que pour tous x, $y\in E$, la suite xy appartient à E, et que l'application
   $$\begin{array}{rccl} \varphi: & E\times E & \to & E \\ & (x,y) & \mapsto & xy \end{array}$$
   est de classe $\mathscr{C}^1$.

(b) Montrer que l'application

$$\Theta : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer $\mathrm{d}\theta_x(y)$ pour $x, y \in E$.

2. Soit $\Omega := \{\, x \in E\,;\ \inf_n |x_n| \,>\, 0\}$.

   (a) Montrer que Ω est un ouvert non vide.

   (b) Pour $x \in \Omega$ on note $1/x$ la suite définie par $(1/x)_n := 1/x_n$. Montrer que $1/x \in \Omega$.

   (c) Montrer que Θ est un difféomorphisme local au voisinage de chaque point de Ω.

3. On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & E \\ x & \mapsto & 1/x\,. \end{array}$$

   (a) Soit $a \in \Omega$. Montrer que $\mathrm{d}_2\varphi_{(a,1/a)}$ est un isomorphisme de E. En déduire qu'il existe un voisinage ouvert V de a inclus dans Ω tel que $f_{|V}$ soit de classe $\mathscr{C}^1$.

   (b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω et calculer $\mathrm{d}f_x$ quel que soit $x \in \Omega$.

Exercice 4 . On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \,=\, t\,x^2\,.$$

1. Dire pourquoi le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique à l'équation (E).

2. Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$, et I l'intervalle de définition de la solution maximale $x \in \mathscr{C}^1(I;\mathbb{R})$ de (E) telle que $x(t_0) = x_0$.

   (a) Dans le cas $x_0 = 0$, quel est I et que vaut $x(t)$ pour $t \in I$?

   (b) En supposant $x_0 > 0$, montrer que $x(t) > 0$ quel que soit $t \in I$.

   (c) Soit J l'intervalle de définition de la solution maximale $y \in \mathscr{C}^1(J;\mathbb{R})$ de (E) telle que $y(-t_0) = x_0$. Exprimer J et y à l'aide de I et x.

3. Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_0 t_0^2 < -2$. Calculer la solution maximale de (E) telle que $x(t_0) = x_0$. On précisera en particulier son intervalle de définition.