

**Exercice 1 .**

1. En appliquant l'hypothèse au vecteur  $h + k$  on a l'égalité

$$\phi(df_x(h + k), df_x(h + k)) = \phi(h + k, h + k),$$

qui se « développe » par bilinéarité et donne, en utilisant à nouveau l'hypothèse, pour les vecteurs  $h$  et  $k$ , ainsi que la symétrie de  $\phi$ ,

$$\phi(df_x(h), df_x(k)) = \phi(h, k).$$

2. Par différentiation de la fonction (identiquement nulle !)  $x \mapsto \phi(df_x(h), df_x(k)) - \phi(h, k)$  dans la direction  $y$  on obtient

$$\phi(d^2f_x(h, y), df_x(k)) + \phi(df_x(h), d^2f_x(k, y)) = 0,$$

ou encore, par symétrie de  $\phi$ ,

$$\phi(d^2f_x(h, y), df_x(k)) = -\phi(d^2f_x(k, y), df_x(h)).$$

Par suite, en échangeant les rôles de  $y$  et de  $h$ ,

$$\phi(d^2f_x(y, h), df_x(k)) = -\phi(d^2f_x(k, h), df_x(y)),$$

tandis qu'en échangeant les rôles de  $y$  et de  $k$ ,

$$\phi(d^2f_x(h, k), df_x(y)) = -\phi(d^2f_x(y, k), df_x(h)).$$

Enfin, par symétrie de  $d^2f_x$  (lemme de Schwarz) on déduit de ces trois égalités

$$\phi(d^2f_x(h, k), df_x(y)) = -\phi(d^2f_x(h, k), df_x(y)),$$

d'où  $\phi(d^2f_x(h, k), df_x(y)) = 0$ . Or,  $\phi$  n'ayant pas de vecteur isotrope on a  $\phi(df_x(y), df_x(y)) = \phi(y, y) \neq 0$  quel que soit  $y \neq 0$ , et donc  $df_x(y) \neq 0$ . Ceci montre que l'application linéaire  $df_x$  est injective sur  $\mathbb{R}^n$ , et donc bijective. Donc le résultat précédent implique  $\phi(d^2f_x(h, k), z) = 0$  quel que soit  $z \in \mathbb{R}^n$ , d'où  $d^2f_x(h, k) = 0$  en utilisant à nouveau le fait que  $\phi$  soit sans vecteur isotrope.

3. D'après ce qui précède, la différentielle de  $df$  est identiquement nulle, et pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $df_x$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}^n$ . Toute fonction de différentielle nulle sur un ouvert connexe étant constante,  $df_x =: \ell$  est donc un isomorphisme indépendant de  $x$ , et pour la même raison, la fonction  $f - \ell$  est constante. Si l'on note  $b \in \mathbb{R}^n$  sa valeur, on a par définition

$$f(x) = \ell(x) + b, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

4. L'application  $f$  est injective sur  $\mathbb{R}^n$  car  $\ell$  l'est : si  $f(x) = f(y)$  alors  $\ell(x) = \ell(y)$  et donc  $x = y$ . Elle est aussi surjective car  $\ell$  l'est : pour tout  $z \in \mathbb{R}^n$ , il existe  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\ell(x) = z - b$ , et donc  $f(x) = z$ . De plus,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  comme somme d'une application constante et d'une application linéaire continue, et pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $df_x = \ell$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}^n$ . Donc d'après le théorème d'inversion globale,  $f$  est un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbb{R}^n$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Exercice 2 .**

## 1. La fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x - a\|^2 \|x - b\|^2 \end{aligned}$$

est la composée de l'application affine  $x \in \mathbb{R}^n \mapsto (x - a, x - a, x - b, x - b) \in (\mathbb{R}^n)^4$  et de la forme quadrilinéaire  $(w, x, y, z) \in (\mathbb{R}^n)^4 \mapsto \langle w, x \rangle \langle y, z \rangle$ , qui sont toutes deux de classe  $\mathcal{C}^\infty$  d'après le cours (les applications affines étant elles-mêmes sommes d'applications linéaires et d'applications constantes).

2. On différencie  $f$  grâce à cette décomposition :

$$df_x(h) = 2\|x - b\|^2 \langle x - a, h \rangle + 2\|x - a\|^2 \langle x - b, h \rangle,$$

$$d^2 f_x(h, k) = 2(\|x - a\|^2 + \|x - b\|^2) \langle h, k \rangle + 4\langle x - a, h \rangle \langle x - b, k \rangle + 4\langle x - a, k \rangle \langle x - b, h \rangle.$$

## 3. On peut réécrire par linéarité

$$df_x(h) = 2\langle \|x - b\|^2(x - a) + \|x - a\|^2(x - b), h \rangle.$$

Par suite, si  $df_x$  est identiquement nulle on doit avoir

$$\|x - b\|^2(x - a) + \|x - a\|^2(x - b) = 0.$$

Des solutions évidentes sont  $x = a$  et  $x = b$ . Si  $x \neq a$  et  $x \neq b$ , l'égalité ci-dessus implique que les deux vecteurs  $(x - a)$  et  $(x - b)$  sont colinéaires : en posant par exemple  $x - b = \alpha(x - a)$  on trouve de plus que  $\alpha^2 + \alpha = 0$  et donc  $\alpha = -1$ , ce qui donne finalement  $x = (a + b)/2$ . Les points critiques de  $f$  sont donc  $a, b$  et  $(a + b)/2$ .

4. Les points  $a$  et  $b$  sont des minima globaux (et a fortiori locaux), puisque  $f(a) = f(b) = 0$  et  $f(x) \geq 0$  quel que soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . Pour le point critique  $c := (a + b)/2$  on a

$$d^2 f_c(h, h) = \|b - a\|^2 \|h\|^2 - 2\langle b - a, h \rangle^2.$$

On constate en particulier que  $d^2 f_c(b - a, b - a) = -\|b - a\|^4 < 0$ , tandis que pour  $h \neq 0$  orthogonal à  $(b - a)$ , on a  $d^2 f_c(h, h) = \|b - a\|^2 \|h\|^2 > 0$ . Donc  $d^2 f_c$  n'est ni définie positive ni définie négative et par conséquent  $c$  n'est pas un extremum local de  $f$  (ni a fortiori global).

**Exercice 3.** Soient des nombres réels strictement positifs  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tels que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ , et soit

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}^+)^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto x_1^{\alpha_1} \times \dots \times x_n^{\alpha_n}. \end{aligned}$$

1. L'ensemble  $C$  est fermé comme image réciproque du singleton  $\{1\}$  par l'application

$$\begin{aligned} g : (\mathbb{R}^+)^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \end{aligned}$$

restriction à  $(\mathbb{R}^+)^n$  d'une forme linéaire sur  $\mathbb{R}^n$ , qui est donc continue. De plus  $C$  est borné : pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in C$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on a  $0 \leq \alpha_i x_i \leq 1$  et donc  $0 \leq x_i \leq 1/\alpha_i$  puisque  $\alpha_i > 0$  par hypothèse. Donc  $C$  est un compact de  $\mathbb{R}^n$ , et comme  $f$  est continue (comme fonction polynômiale), elle atteint son maximum sur  $C$  : il existe  $a \in C$  tel que  $f(a) = \max_{x \in C} f(x)$ . De plus, les composantes de  $a$  sont strictement positives car si l'une était nulle on aurait  $f(a) = 0$ . Or  $f$  prend des valeurs strictement positives (par exemple  $f(1, \dots, 1) = 1$ ), donc  $a$  ne pourrait pas être un maximum de  $f$ .

2. D'après ce qui précède, les points  $a \in C$  tels que  $f(a) = \sup_{x \in C} f(x)$  sont dans l'ouvert  $]0, +\infty[^n$ . Ce sont en outre des extrema de  $f$  sous la contrainte  $g(x) = 1$ . Donc d'après le théorème des multiplicateurs de Lagrange, si  $a$  est l'un d'entre eux, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $df_a = \lambda dg_a$ . Or

$$df_a(h) = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i^{\alpha_i - 1} h_i \prod_{j \neq i} a_j^{\alpha_j}, \quad dg_a(h) = \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i,$$

donc pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\alpha_i a_i^{\alpha_i - 1} \prod_{j \neq i} a_j^{\alpha_j} = \lambda \alpha_i,$$

ou encore

$$a_i = \frac{1}{\lambda} \prod_{j=1}^n a_j^{\alpha_j}.$$

Donc  $a = (\xi, \dots, \xi)$  et  $\lambda = \xi^{n-1}$ . Puisque  $\sum_i \alpha_i = 1$ ,  $a = (\xi, \dots, \xi) \in C$  si et seulement si  $\xi = 1$ . Donc le seul point de  $C$  où  $f$  peut atteindre son maximum est  $a = (1, \dots, 1)$ . Comme on sait que ce point existe, on en déduit que  $f(1, \dots, 1) = \sup_{x \in C} f(x)$ . Enfin, comme  $f(1, \dots, 1) = 1$ , on a donc  $f(x) = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \leq 1$  pour tout  $x \in C$ .

3. Soit  $x \in (\mathbb{R}^+)^n$ . Si  $x = (0, \dots, 0)$  alors on a  $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} = \sum_i \alpha_i x_i = 0$ . Si  $x \neq (0, \dots, 0)$ , on a nécessairement  $s := \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \neq 0$ . Soit alors  $\tilde{x} := x/s$ . On a  $\tilde{x} \in C$  et donc  $\tilde{x}_1^{\alpha_1} \dots \tilde{x}_n^{\alpha_n} \leq 1$ , d'où

$$x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \leq s^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} = s.$$

On a égalité si  $x = (0, \dots, 0)$  ou bien  $f(\tilde{x}) = 1$ , et donc  $\tilde{x} = (1, \dots, 1)$ , ce qui équivaut à  $x = (\xi, \dots, \xi)$  pour un  $\xi \in \mathbb{R}^{+*}$ . Les points où il y a égalité sont donc tous les points de la forme  $x = (\xi, \dots, \xi)$  avec  $\xi \in \mathbb{R}^+$ .

4. Un parallélépipède rectangle de côtés  $x$ ,  $y$ , et  $z$  a pour volume  $V = xyz$  et pour surface  $S = 2xy + 2yz + 2zx$ . D'après ce qui précède appliqué à  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1/3$  et  $x_1 = xy$ ,  $x_2 = yz$ ,  $x_3 = zx$ , on a

$$V^{2/3} = (xy)^{1/3} (yz)^{1/3} (zx)^{1/3} \leq \frac{1}{3}(xy) + \frac{1}{3}(yz) + \frac{1}{3}(zx) = \frac{S}{6},$$

avec égalité si et seulement si  $xy = yz = zx$ . Pour  $xyz \neq 0$  ceci équivaut à  $x = y = z$  : à volume donné  $V$ , le parallélépipède rectangle de surface minimale est le cube de côté  $x = \sqrt[3]{V}$ .

#### Exercice 4 .

1. L'application

$$\begin{aligned} A : U &\rightarrow \mathcal{L}(F; E) \\ x &\mapsto (df_x)^{-1} \end{aligned}$$

est continue comme composée de  $df$  (qui est continue puisque  $f$  est supposée de classe  $\mathcal{C}^1$ ) et de  $H$ . De plus, comme  $H$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  elle est localement Lipschitzienne : il existe  $\beta > 0$ ,  $R > 0$ , tels que, pour tous  $u, v \in \text{Isom}(E; F)$  tels que  $\|u\| \leq R$ ,  $\|v\| \leq R$ ,

$$\|u^{-1} - v^{-1}\| \leq \beta \|u - v\|.$$

Or, par continuité de  $df$ , il existe  $r > 0$  tel que pour  $x \in B(a, r)$ ,  $\|df_x\| < R$ . Donc pour  $x, y \in B(a, r)$ ,

$$\|A(x) - A(y)\| \leq \beta \|df_x - df_y\| \leq k\beta \|x - y\|$$

d'après les hypothèses (i) et (ii).

2. L'application  $A$  étant localement Lipschitzienne, la fonction  $F : x \mapsto A(x)(y_0)$  l'est aussi, et donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz l'équation différentielle

$$\frac{dw}{dt} = F(w)$$

admet une solution locale unique  $\varphi : J \rightarrow U$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $\varphi(0) = a$ .

3. La fonction  $\Theta = f \circ \varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  comme composée de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ . Et l'on a  $\Theta'(t) = df_{\varphi(t)}(\varphi'(t)) = df_{\varphi(t)}((df_{\varphi(t)}^{-1})(y_0)) = y_0$ .
4. La dérivée de  $\Theta$  étant constante égale à  $y_0$ ,  $\Theta$  est affine et de la forme  $\Theta(t) = ty_0 + b$ , avec  $b = f(a)$  puisque  $\varphi(0) = a$ .
5. Comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $df_a$  est un isomorphisme de  $E$  sur  $F$ , d'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage  $V \subset U$  de  $a$ , et un voisinage  $W$  de  $b$  tels que  $f$  soit un difféomorphisme de  $V$  sur  $W$ .
6. Comme  $\varphi(0) = a \in V$ , par continuité de  $\varphi$ , il existe un intervalle  $I \subset J$  de  $\mathbb{R}$  contenant 0 tel que  $\varphi(I) \subset V$ . Comme on a  $f(\varphi(t)) = ty_0 + b$ , on en déduit  $\varphi(t) = f^{-1}(ty_0 + b)$  pour tout  $t \in I$ .