UE Calcul différentiel **Examen 9 juin 2008**

Aucun document n'est autorisé. *Durée : 3h*

Les exercices sont indépendants les uns des autres.

Exercice 1 . Soit $\phi \in \mathscr{L}_2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ une forme bilinéaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. On la suppose symétrique et sans vecteur isotrope, c'est-à-dire que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^n\,,\ \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad \phi(x,y) = \phi(y,x)\,, \\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0 \implies \phi(x,x) \neq 0\,. \end{cases}$$

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application deux fois différentiable telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n\,,\ \forall h \in \mathbb{R}^n\,,\ \phi(\mathrm{d}f_x(h), \mathrm{d}f_x(h)) = \phi(h,h)\,.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, pour tous h, $k \in \mathbb{R}^n$,

$$\phi(\mathrm{d}f_x(h), \mathrm{d}f_x(k)) = \phi(h,k)\,.$$

2. Montrer que $\mathrm{d}^2 f$ est identiquement nulle (on pourra commencer par montrer que $\phi(\mathrm{d}^2 f_x(h,k), \mathrm{d}f_x(y)) = 0$ quels que soient h, k et $y \in \mathbb{R}^n$).
3. En déduire qu'il existe $\ell \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ et $b \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n\,, \quad f(x) = \ell(x) + b\,.$$

4. Montrer que f est un difféormorphisme de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2 . Soit $n \geq 2$. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ associée à un produit scalaire noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$: on rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, tel que $\langle x, h\rangle = 0$. Soient deux vecteurs distincts a et b de $\mathbb{R}^n$, et soit

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \|x-a\|^2\,\|x-b\|^2\,. \end{array}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.
2. Calculer la différentielle et la différentielle seconde de f.
3. Trouver tous les points critiques de f, c'est-à-dire les vecteurs $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $\mathrm{d}f_x \equiv 0$.
4. La fonction f possède-t-elle des extrema locaux dans $\mathbb{R}^n$? des extrema globaux dans $\mathbb{R}^n$?

Exercice 3 . Soient des nombres réels strictement positifs $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, et soit

$$\begin{array}{rccl} f: & (\mathbb{R}^+)^n & \to & \mathbb{R} \\ & x = (x_1,\dots,x_n) & \mapsto & x_1^{\alpha_1} \times \cdots \times x_n^{\alpha_n}\,. \end{array}$$

On notera

$$C := \{x = (x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n\,;\ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 1\}\,.$$

1. Montrer (par un argument de nature topologique) qu'il existe $a = (a_1,\dots,a_n) \in C$ tel que $f(a) = \sup_{x\in C} f(x)$, et que $a_i > 0$ pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$.
2. Trouver (en utilisant un théorème du cours) tous les points $a \in C$ tels que $f(a) = \sup_{x\in C} f(x)$. En déduire que pour tout $x \in C$, $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \leq 1$.

3. Montrer que pour tout $x \in (\mathbb{R}^+)^n$,

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \,.$$

   Dans quel(s) cas a-t-on égalité ?

4. On considère dans $\mathbb{R}^3$ un parallélépipède rectangle dont les côtés ont respectivement pour longueur x, y, et z. On note V son volume et S l'aire de sa surface. En exprimant S et V en fonction de x, y, z, et en utilisant ce qui précède montrer que

$$V^{2/3} \leq S/6 \,.$$

   Comment obtenir un un parallélépipède rectangle de surface minimale à volume donné ?

Exercice 4 . Soient E et F des espaces de Banach, soit U un ouvert de E et $f : U \to F$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que

(i) pour tout $x \in U$, $\mathrm{d}f_x$ est un isomorphisme de E sur F (c'est-à-dire $\mathrm{d}f_x \in \mathrm{Isom}(E;F)$),

(ii) il existe $k > 0$ tel que pour tous x et $y \in U$,

$$\|\mathrm{d}f_x - \mathrm{d}f_y\|_{\mathscr{L}(E;F)} \;\leq\; k\,\|x-y\|_E \,.$$

On rappelle que l'application

$$\begin{array}{rccc} H: & \mathrm{Isom}(E;F) & \to & \mathscr{L}(F;E) \\ & u & \mapsto & u^{-1} \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$. On fixe $a \in U$ et l'on note $b = f(a)$. Pour $r > 0$, $B(a;r)$ désignera la boule ouverte de centre a et de rayon r.

1. Soit

$$\begin{array}{rccc} A: & U & \to & \mathscr{L}(F;E) \\ & x & \mapsto & (\mathrm{d}f_x)^{-1} \,. \end{array}$$

   Montrer que A est continue, et qu'il existe $\alpha > 0$, $r > 0$, tels que, pour tous x, $y \in B(a;r)$,

$$\|A(x) - A(y)\|_{\mathscr{L}(F;E)} \leq \alpha \|x-y\|_E \,.$$

2. Soit $y_0 \in F$, $y_0 \neq 0$. Montrer (en utilisant un théorème du cours) qu'il existe un intervalle J de $\mathbb{R}$ contenant 0 et une application $\varphi : J \to U$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\varphi(0) = a$ et pour tout $t \in J$,

$$\varphi'(t) = (\mathrm{d}f_{\varphi(t)})^{-1}(y_0) \,.$$

3. Soit $\Theta = f \circ \varphi$. Dire pourquoi Θ est de classe $\mathscr{C}^1$, et calculer $\Theta'(t)$ pour $t \in J$.

4. En déduire que pour tout $t \in J$,

$$f(\varphi(t)) = ty_0 + b \,.$$

5. Montrer qu'il existe un voisinage $V \subset U$ de a, et un voisinage W de b tels que f soit un difféomorphisme de V sur W.

6. Montrer qu'il existe un intervalle $I \subset J$ de $\mathbb{R}$ contenant 0 tel que $\varphi(I)$ est inclus dans V. Expliciter alors $\varphi(t)$ pour $t \in I$.