

Projet Licence. M2AO 2008/2009

Comparaison de schémas numériques pour des équations issues de la mécanique ou de la dynamique des populations

Le but de ce projet est de déterminer quels sont les schémas efficaces pour simuler numériquement des équations ou des systèmes d'équations différentielles intervenant en mécanique (pendule oscillant) ou en dynamique des populations (modèles de Lotka Volterra).

I Problème du pendule oscillant

On considère un pendule rigide de longueur l soumis à la seule force de gravité. Si on note θ l'angle que forme le pendule avec la verticale, on obtient en appliquant le principe fondamental de la mécanique l'équation différentielle

$$\ddot{\theta}(t) + gl \sin(\theta(t)) = 0.$$

où g désigne la constante de gravité. En cherchant des solutions de la forme $\theta(t) = \tilde{\theta}(\sqrt{gl}t)$, on se ramène à un problème adimensionné

$$\ddot{\tilde{\theta}}(\tau) + \sin(\tilde{\theta}(\tau)) = 0.$$

On sait que l'énergie mécanique du système

$$E = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\theta}}^2(\tau) - \cos(\tilde{\theta}(\tau))$$

est conservée au cours du temps. D'autre part, on montre aisément que si $E < -1$, il n'existe pas de solution au problème et si $-1 < E < 1$ alors toutes les solutions sont périodiques. Dans ce dernier cas, si on note $E = -\cos(\theta_0)$ alors la solution périodique est une oscillation entre les angles θ_0 et $-\theta_0$. On souhaite obtenir des schémas respectant autant que possible ces propriétés, en particulier la conservation d'énergie.

Etude théorique des schémas pour le pendule linéaire

On s'intéresse ici à la simulation numérique de $\ddot{\theta} + \theta = 0$. L'énergie associée à cette équation est $E = \frac{1}{2}(\dot{\theta}^2 + \theta^2)$.

- i) En posant $x = \theta$, $y = \dot{\theta}$, mettre l'équation différentielle sous la forme $\dot{X} = AX$ où $A \in M_2(\mathbb{R})$.
- ii) On définit les schémas d'Euler explicite, implicite et Crank Nicholson pour cette équation avec un pas de temps $\delta > 0$ donné:

$$\begin{aligned} (EE) : X_{n+1} &= X_n + \delta AX_n, & (EI) : X_{n+1} &= X_n + \delta AX_{n+1}, \\ (CN) : X_{n+1} &= X_n + \frac{\delta}{2}(AX_{n+1} + AX_n). \end{aligned}$$

On note $E_n = \frac{1}{2}(X_{n,1}^2 + X_{n,2}^2)$ l'énergie discrétisée associée à l'équation du pendule. Montrer les relations de récurrence $E_{n+1} = (1 + \delta^2)E_n$ pour Euler explicite, $E_n = (1 + \delta^2)E_{n+1}$ pour Euler implicite et $E_{n+1} = E_n$ pour Crank Nicholson.

Illustration numérique

i) Illustrer numériquement (sur le cas du pendule linéaire étudié précédemment) que pour un pas de temps $\delta > 0$ fixé, $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \infty$ pour le schéma d'Euler explicite, $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = 0$ pour Euler implicite. A-t-on un espoir d'obtenir des solutions périodiques dans ce cas là? Montrer que $E_n = E_0$ pour Crank Nicholson. On choisira la condition initiale $\theta(0) = \pi/6$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

ii) On reprend l'étude pour le pendule non linéaire $\ddot{\theta} + \sin(\theta) = 0$. Montrer graphiquement que les schémas d'Euler explicite et implicite ne conviennent pas (l'énergie du système soit diverge, soit tend vers 0).

iii) Montrer (graphiquement) que énergie du système calculée numériquement par le schéma de Crank Nicholson n'est pas conservée mais oscille autour d'une valeur moyenne.

iv) Comparer enfin le schéma de Crank Nicholson avec le schéma de Runge Kutta d'ordre 4.

II Modèle de dynamique des populations de Lotka Volterra

On considère un modèle de croissance de populations de type proie/prédateur. Soit x le nombre de proie et y le nombre de prédateur. Le système de Lotka Volterra donnant l'évolution de ces populations au cours du temps est donné par

$$\dot{x}(t) = ax(t) - bx(t)y(t), \quad \dot{y}(t) = cx(t)y(t) - dy(t), \quad (0.1)$$

où a, b, c, d sont des constantes strictement positives.

Etude théorique du modèle

i) Montrer que si (x, y) est une solution du système de Lotka Volterra définie sur un intervalle I et tel que $x(0) > 0$ et $y(0) > 0$ alors $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour tout $t > 0$.

ii) Calculer les solutions stationnaires de ce système.

iii) Chercher une quantité conservée au cours du temps sous la forme

$$E(t) = F(x(t)) + G(y(t)),$$

où $t \mapsto (x(t), y(t))$ est une solution du système de Lotka Volterra. En déduire que toutes les solutions du système de Lotka Volterra tel que $x(0) > 0$ et $y(0) > 0$ sont périodiques.

Illustration numérique

i) Illustrer numériquement pourquoi les schémas d'Euler Explicite ou implicite ne sont pas adaptés pour étudier le modèle de Lotka Volterra.

ii) Tracer dans le plan de phase plusieurs trajectoires (on choisira $a = b = c = d = 1$) et les conditions initiales $y(0) = 1$ avec successivement $x(0) = 1.1$, $x(0) = 2$, $x(0) = 4$ et un intervalle de simulation $(0, T)$ avec $T = 100$ (pas d'espace $\delta = 0.01$). On utilisera un schéma de Crank Nicholson et un schéma de Runge Kutta d'ordre 4.