

M2AO, Correction TD1

Rappels sur les EDOs

Autant que possible, les commentaires — élargissant le sens des questions, rappelant une définition ou illustrant l'intérêt de la question — seront signalés hors de la rédaction lorsqu'ils ne servent pas directement à répondre à la question.

1 Étude qualitative des EDOs.

Exercice 1 *Étude qualitative d'une équation scalaire.*

1. Pour toute pente $p \in \mathbf{R}$, cherchons à tracer l'isocline Γ_p de pente p

$$\Gamma_p = \{ (x, t) \mid x^2 - t = p \} .$$

Pour $p \in \mathbf{R}$, L_p est une parabole d'équation $t = x^2 - p$, c'est donc la translatée de la parabole $t = x^2$ passant par $(0, -p)$.

Remarque : Reste encore à tracer effectivement ces paraboles (dans le plan (x, t)) pour répondre à la question. Par ailleurs, éclairons l'intérêt d'un tel tracé pour l'étude de l'équation différentielle : quand une trajectoire de l'équation intersecte une isocline Γ_p , elle est dirigée par le vecteur $(p, 1)$ (dans le plan (x, t)) puisqu'en cette intersection $x'(t) = p$.

2. Soit $x : I \rightarrow \mathbf{R}$ une solution de l'équation (où I est un intervalle ouvert non trivial de \mathbf{R}). On cherche à déterminer ses points d'inflexion, c'est-à-dire ceux où sa dérivée seconde change de signe. Or, en dérivant l'équation, on a

$$\begin{aligned} x''(t) &= 2x'(t)x(t) - 1 \\ &= 2x^3(t) - 2tx(t) - 1 . \end{aligned}$$

Si $x(t) = 0$, alors $x''(t) = -1 \neq 0$. Les éventuels points d'inflexion sont donc situés sur

$$J = \left\{ (x, t) \mid t = x^2 - \frac{1}{2x}, x \neq 0 \right\}$$

Reste à vérifier que si $(x(t_0), t_0)$ appartient à J (pour un certain $t_0 \in I$), alors $x''(t)$ change de signe en t_0 ; il suffit pour cela de vérifier que $x'''(t_0) \neq 0$. Or en un tel t_0 , on a

$$\begin{aligned} x'''(t_0) &= 2x''(t_0)x(t_0) + 2(x'(t_0))^2(t_0) \\ &= 2(x'(t_0))^2(t_0) = \frac{1}{2x^2(t_0)} \neq 0 . \end{aligned}$$

J est donc bien la courbe des points d'inflexion.

Par ailleurs, puisqu'en $(x, t) = (0, 0)$ on a $2x^3 - 2tx - 1 < 0$, par continuité, on déduit que :

- $x''(t) > 0$ si et seulement si $(x(t), t)$ est situé à l'extérieur des deux branches de J ;
- $x''(t) < 0$ si et seulement si $(x(t), t)$ est situé entre les deux branches de J .

Remarque : Reste à tracer J . Incidemment l'on notera qu'on peut étudier de même toute dérivée de $x(\cdot)$ puisque l'on peut obtenir plus généralement (et pour toute équation différentielle) une formule du type $x^{(k)}(t) = F(x(t), t)$ en dérivant l'équation et en substituant suffisamment de fois. Par ailleurs, il faut noter que connaître les points d'inflexion aide à tracer puisqu'en un point d'inflexion (et uniquement en un point d'inflexion) l'on doit changer la convexité de la trajectoire.

3. On souhaite montrer que lorsqu'une solution intersecte Γ_0 , elle le fait toujours dans le même sens. Soit $x : I \rightarrow \mathbf{R}$ une solution de l'équation (où I est un intervalle ouvert non trivial de \mathbf{R}). Alors on a

$$\frac{d}{dt} (t - x^2(t)) = 1 - 2x'(t)x(t) \quad (1)$$

donc, en un t_0 tel que $(x(t_0), t_0) \in \Gamma_0$, cette dérivée vaut 1. Lorsqu'une solution entre en contact avec Γ_0 , elle traverse donc Γ_0 du bas vers le haut (dans le plan (x, t)). Γ_0 est une barrière.

Exercice 3 Problème de catalyse.

1. Définissons l'application

$$F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 \\ Y = \begin{pmatrix} y_A \\ y_B \\ y_C \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -k_1 y_A + k_3 y_B y_C \\ k_1 y_A - k_3 y_B y_C - k_2 y_B^2 \\ k_2 y_B^2 \end{pmatrix} .$$

Cette application est de classe \mathcal{C}^1 . À toute condition initiale $Y(t_0) = Y_0$ (avec $t_0 \in \mathbf{R}$ et $Y_0 \in \mathbf{R}^3$) est donc associée une unique solution maximale Y de l'équation $Y' = F(Y)$, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz. Il suffit d'appliquer cela à $t_0 = 0$ et $Y_0 = (1, 0, 0)$.

2. On définit

$$t_0 = \inf \{t \in \mathbf{R}^+ \mid y_A(t) < 0 \text{ ou } y_B(t) < 0 \text{ ou } y_C(t) < 0\} .$$

Supposons par l'absurde que t_0 soit fini.

Par continuité, on a, pour tout $0 \leq t \leq t_0$, et tout $\alpha \in \{A, B, C\}$, $y_\alpha(t) \geq 0$. De plus, par définition, il existe deux suites (t_n) et (α_n) vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0 \text{ et pour tout } n, t_n > t_0, \alpha_n \in \{A, B, C\}, y_{\alpha_n}(t_n) < 0 . \quad (2)$$

Par le principe des tiroirs, on peut même (et l'on va) supposer que (α_n) est constante, égale à un certain α_0 . Par continuité, on a $y_{\alpha_0}(t_0) \geq 0$ donc $y_{\alpha_0}(t_0) = 0$.

Envisageons alors le cas où $\alpha_0 = C$. Puisque $y_C(t_0) = 0$, la relation (2) implique $y'_C(t_0) \leq 0$. Le système différentiel implique alors $y_B(t_0) = 0$. De même, puisque $y_C(t_0) = 0$ et $y'_C(t_0) = 0$, la relation (2) implique $y''_C(t_0) \leq 0$ ce qui conduit à $y'_B(t_0) = 0$ en dérivant la dernière équation du système. La deuxième équation donne alors $y_A(t_0) = 0$. Par unicité des solutions de condition initiale $Y(t_0) = (0, 0, 0)$, notre solution est donc uniformément nulle : absurde puisque $y_A(0) = 1$.

Considérons maintenant le cas où $\alpha_0 = B$. En raisonnant comme précédemment, on obtient d'abord $y'_B(t_0) \leq 0$ donc $y_A(t_0) = 0$ (puisque $y_A(t_0) \geq 0$) et $y'_B(t_0) = 0$. Par unicité des solutions de condition initiale $Y(t_0) = (0, 0, y_C(t_0))$, notre solution est donc constante égale à $(0, 0, y_C(t_0))$: absurde puisque $y_A(0) = 1$.

Considérons pour finir le cas $\alpha_0 = A$. En raisonnant comme précédemment, on obtient d'abord $y_B(t_0) = 0$ ou $y_C(t_0) = 0$. Si $y_B(t_0) = 0$, alors puisque $y_A(t_0) = 0$ on peut terminer comme précédemment. Supposons donc $y_C(t_0) = 0$. Comme y_C est croissant, y_C est en fait constant sur $[0, t_0]$. Puisque $t_0 > 0$ (car $y_A(t_0) = 0$), y'_C et donc y_B sont nuls sur $[0, t_0]$. On est ramené au cas où $y_A(t_0) = y_B(t_0) = 0$.

Ceci termine cette démonstration par l'absurde.

Remarque : Il est rassurant que le système préserve la positivité puisqu'il modélise des concentrations.

3. En sommant les trois lignes du système, on obtient pour toute solution Y du système

$$\frac{d}{dt} (y_A(t) + y_B(t) + y_C(t)) = 0 .$$

Dans notre cas, $y_A + y_B + y_C$ est donc constant égal à 1. On a donc pour tout $t \geq 0$, $Y(t) \in [0, 1]^3$. Notre solution maximale n'explose pas en temps fini sur \mathbf{R}^+ . Elle est donc définie (au moins) sur \mathbf{R}^+ .

4. Commençons par chercher les solutions stationnaires du système. Une fonction Y constante égal à (a, b, c) est solution du système différentiel si et seulement si

$$\begin{aligned} -k_1 a + k_3 b c &= 0 \\ k_1 a - k_3 b c - k_2 b^2 &= 0 \\ k_2 b^2 &= 0 \end{aligned}$$

donc si et seulement si $a = b = 0$. La constante c est arbitraire.

On considère maintenant une solution stationnaire $(0, 0, c)$ où $c \in \mathbf{R}$. Nous allons étudier sa stabilité (linéaire). Commençons par écrire le système que doit vérifier une perturbation \tilde{Y} ,

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} + \tilde{Y}(t) .$$

En termes de \tilde{Y} , le système se réécrit

$$\begin{cases} \tilde{y}'_A(t) &= -k_1 \tilde{y}_A(t) + k_3 \tilde{y}_B(t) (c + \tilde{y}_C(t)) \\ \tilde{y}'_B(t) &= k_1 \tilde{y}_A(t) - k_3 \tilde{y}_B(t) (c + \tilde{y}_C(t)) - k_2 \tilde{y}_B^2(t) \\ \tilde{y}'_C(t) &= k_2 \tilde{y}_B^2(t) \end{cases} .$$

En ne gardant que les termes linéaires, on obtient

$$\tilde{Y}'(t) = A \tilde{Y}(t) , \quad A = \begin{bmatrix} -k_1 & k_3 c & 0 \\ k_1 & -k_3 c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Remarque : On a linéarisé $Y' = F(Y)$ autour de $Y = (0, 0, c)$. On obtient évidemment l'équation $\tilde{Y}' = dF(0, 0, c) \cdot \tilde{Y}$. On peut vérifier que $A = dF(0, 0, c)$.

Un calcul de déterminant et une recherche de vecteurs propres (pour la valeur propre double) montre que A est diagonalisable de valeurs propres 0 et $-(k_1 + k_3 c)$, 0 étant une valeur propre (au moins double) avec (par exemple) $(0, 0, 1)$ et $(k_3 c, k_1, 0)$ comme vecteurs propres indépendants. La solution stationnaire $(0, 0, c)$ est donc linéairement stable si et seulement si $c > -k_1/k_3$, mais pas linéairement asymptotiquement stable.

Remarque : Dans les cas qui nous intéressent, on a $c \geq 0$ donc stabilité linéaire. En revanche, puisqu'on est en présence de valeurs propres de partie réelle nulle, on ne peut pas déduire la stabilité pour le système complet de la stabilité linéaire, alors que l'on peut évidemment déduire l'instabilité de l'instabilité linéaire. Notons que la diagonalisabilité a ramené la stabilité linéaire au fait que les valeurs propres soient de partie réelle négative ou nulle. En général, il faut en plus que celles de partie réelle nulle soit de multiplicité maximale : leur multiplicités algébrique et géométrique coïncident.

2 Exemples de résolutions explicites.

Exercice 4 *Équations linéaires.*

1. L'équation $x''(t) + x(t) = 0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. L'équation caractéristique associée est : $X^2 + 1 = 0$. Les racines de cette équation sont i et $-i$, donc les solutions (réelles) de l'équation différentielle sont les fonctions définies par

$$x(t) = \lambda \cos(t) + \mu \sin(t)$$

où λ et μ sont des réels arbitraires.

2. Ce système est un système différentiel linéaire du premier ordre. On peut l'écrire sous forme matricielle :

$$X'(t) = A X(t) \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Les solutions sont donc de les fonctions définies par

$$X(t) = \exp(t A) X_0$$

où X_0 est un vecteur de \mathbf{R}^2 arbitraire. Or A est diagonalisable de valeurs propres 1 et -2 , qui admettent respectivement

$$V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_{-2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

comme vecteurs propres associés. Les solutions sont donc les fonctions définies par

$$X(t) = \lambda \exp(t) V_1 + \mu \exp(-2t) V_{-2},$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 \lambda \exp(t) + \mu \exp(-2t) \\ y(t) &= \lambda \exp(t) - \mu \exp(-2t) \end{aligned}$$

où λ et μ sont des réels arbitraires.

Exercice 5 *Raccordement.*

C'est une équation différentielle affine à coefficients variables non réguliers. Pour la ramener à des formes plus convenues, nous allons d'abord l'étudier séparément sur $]0, +\infty[$ et sur $] - \infty, 0[$.

Étude sur $]0, +\infty[$:

L'équation sur \mathbf{R}_+^* est ramenée à

$$y'(t) + \left(1 - \frac{1}{t}\right) y(t) = t \quad (3)$$

qui est une équation affine du premier ordre. Commençons par résoudre l'équation homogène (donc linéaire) associée :

$$y'(t) + \left(1 - \frac{1}{t}\right) y(t) = 0 . \quad (4)$$

La fonction nulle sur $]0, +\infty[$ est évidemment solution de cette équation. De plus, le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure alors qu'une solution y ne s'annule en un point t_0 que si elle est en fait uniformément nulle. Nous allons donc chercher les solutions qui ne s'annulent pas. Une telle fonction y est solution de (4) si et seulement si

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{t} - 1$$

donc si et seulement si elle s'écrit

$$y(t) = \lambda t e^{-t}$$

où λ est un réel non nul arbitraire, puisque cette formule définit une fonction qui ne s'annule pas. En autorisant λ à s'annuler, on a en fait l'ensemble des solutions de (4). Remarquons maintenant que $y_0(t) = t$ est une solution particulière de (3). L'ensemble des solutions de notre équation affine (3) sur $]0, +\infty[$ est donc l'ensemble des fonctions y définies par

$$y_1(t) = t + \lambda t e^{-t}$$

où λ est une constante arbitraire.

Remarque : Il n'est pas utile d'indiquer comment on a trouvé une solution particulière, il suffit de vérifier que cela en est une. Néanmoins, indiquons qu'il est toujours possible d'en trouver une efficacement en la cherchant sous la forme $y(t) = \lambda(t) t e^{-t}$. C'est ce que l'on appelle la méthode de la variation de la constante. C'est d'ailleurs tout l'intérêt de commencer par la partie linéaire de l'équation.

Étude sur $] - \infty, 0[$:

Sur \mathbf{R}_-^* , l'équation se ramène à

$$y'(t) + \left(\frac{1}{t} - 1\right) y(t) = -t \quad (5)$$

qui est une équation différentielle affine. On s'intéresse d'abord à l'équation homogène associée

$$y'(t) + \left(\frac{1}{t} - 1\right) y(t) = 0 . \quad (6)$$

En procédant comme précédemment, on montre que les solutions de (6) sur $] - \infty, 0[$ sont les fonctions définies par

$$y(t) = \mu \frac{e^t}{t}$$

où μ est un réel arbitraire. Remarquons que la formule $y_0(t) = t + 2 + 2t^{-1}$ fournit par ailleurs une solution particulière de (5) puisque

$$y_0'(t) = 1 - \frac{2}{t^2}$$

alors que

$$\left(\frac{1}{t} - 1\right) y_0(t) = 1 - t + 2 \left(\frac{1}{t^2} - 1\right) = \frac{2}{t^2} - t - 1.$$

L'ensemble des solutions de (5) sur $]0, +\infty[$ est l'ensemble des fonctions y définies par

$$y_2(t) = t + 2 + \frac{2}{t} + \mu \frac{e^t}{t}$$

où μ est une constante arbitraire.

Remarque : Ici il semble bien difficile de trouver la solution particulière sans la méthode de variation de la constante. Comme par ailleurs la vérification est aussi fastidieuse que la détermination de la solution, on aurait pu préférer rédiger alternativement la méthode de variation de la constante.

Il nous faut revenir au problème sur \mathbf{R} tout entier. Par unicité des solutions sur \mathbf{R}_- et \mathbf{R}_+ , une solution sur \mathbf{R} vérifie

$$y(t) = \begin{cases} t + \lambda t e^{-t} = y_1(t) & \text{si } t > 0 \\ t + 2 + \frac{2}{t} + \mu \frac{e^t}{t} = y_2(t) & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

pour certaines constantes λ et μ . Il nous reste à déterminer à quelle condition de telles formules définissent (par prolongement) une fonction de classe \mathcal{C}^1 , qui sera alors par continuité une solution de l'équation sur tout \mathbf{R} .

Raccordement continu

L'application y_1 est bien définie en 0 et y vaut 0. Par ailleurs, un développement limité au voisinage de 0 donne

$$y_2(t) \stackrel{0}{=} \frac{2 + \mu}{t} + (2 + \mu) + \left(1 + \frac{\mu}{2}\right) t + o(t).$$

Ainsi y_2 se prolonge continûment en 0 si et seulement si $\mu = -2$, et dans ce cas $y_2(0) = 0 = y_1(0)$. Notre formule donne une fonction continue si et seulement si $\mu = -2$.

Remarque : Pour des équations $y' = F(t, y)$ avec F continue, deux solutions qui se raccordent continûment en un point, se raccordent de manière \mathcal{C}^1 , puisque la dérivée est déterminée par l'équation. Ici ce n'est plus le cas en $t = 0$. Il nous faut donc également vérifier si notre formule donne une fonction dérivable en 0.

Raccordement \mathcal{C}^1

On suppose $\mu = -2$. Dans ce cas, le développement précédent montre que y_2 est dérivable en 0 avec $y_2'(0) = 0$. De plus, la fonction y_1 est dérivable en 0 avec $y_1'(0) = 1 + \lambda$. Ainsi l'unique solution de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbf{R} est donnée par

$$y(t) = \begin{cases} t - te^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ t + 2 + \frac{2}{t} - 2\frac{e^t}{t} & \text{si } t \leq 0 \end{cases} .$$

Remarque : On notera que si l'on prescrit une condition initiale en $t_0 > 0$ on obtient une unique solution maximale, définie en général sur \mathbf{R}_+^* et sur \mathbf{R} si et seulement si la donnée correspond à la solution que nous venons de calculer. Il en va de même si $t_0 < 0$. En particulier cela illustre le fait que le temps d'existence n'est pas une fonction continue (mais seulement semi-continue inférieurement) de la donnée initiale. Par ailleurs, un seul choix de condition initiale en 0 donne lieu à une solution ! Ce dernier point est évidemment lié à la forme inhabituelle de l'équation.

Exercice 6 Équation de Bernoulli

Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Étudions pour commencer l'équation sur $]0, +\infty[$.

La fonction nulle est solution, donc, par unicité des solutions, si une solution s'annule en un $t_0 > 0$, alors elle est uniformément nulle. Intéressons-nous dorénavant aux solutions qui ne s'annulent pas. En divisant par y^2 , on transforme notre équation non-linéaire en une équation affine pour $z = 1/y$:

$$tz'(t) + z(t) = e^t . \quad (7)$$

On commence par intégrer l'équation homogène associée

$$z'(t) + \frac{z(t)}{t} = 0 . \quad (8)$$

Une solution de cette équation est une fonction définie par $z(t) = \lambda t^{-1}$, où λ est une constante. Par ailleurs, la formule $z_0(t) = e^t/t$ définit une solution de (7). On en déduit qu'une solution de l'équation (sur un intervalle ouvert de \mathbf{R}_+^*) qui ne s'annule pas est une fonction y définie par

$$y(t) = \frac{t}{e^t + \lambda}$$

où λ est une constante arbitraire. Notons que cette solution est définie sur \mathbf{R}_+^* si $\lambda \geq -1$ et sur $]0, \ln|\lambda|[$ ou $] \ln|\lambda|, +\infty[$ sinon.

Il en va de même sur les intervalles ouverts de \mathbf{R}_-^* . Hormis la solution nulle, une solution maximale (sur \mathbf{R}_-^*) est une fonction définie par

$$y(t) = \frac{t}{e^t + \mu} ,$$

où μ est une constante arbitraire, sur \mathbf{R}_-^* si $\mu \leq -1$ ou $\mu \geq 0$, sur $] \ln|\mu|, 0[$ ou $] -\infty, \ln|\mu|[$ sinon.

Reste à étudier l'éventuel raccordement en 0. Les deux formules se raccordent continûment en 0 si et seulement si $\lambda = \mu = -1$ ou $\lambda \neq -1$ et $\mu \neq -1$. Dans le second cas, le raccordement est de classe \mathcal{C}^1 si et seulement si $\mu = \lambda$. Dans le premier cas, il est automatiquement de classe \mathcal{C}^1 .