

## M2AO, TD1

### Rappels sur les EDOs, introduction aux schémas numériques

#### 1 Étude qualitative des EDOs.

**Exercice 1** Étude qualitative d'une équation scalaire.

On considère l'équation  $x'(t) = x(t)^2 - t$ .

1. Tracer les isoclines  $\Gamma_p$  de cette équation.
2. Étudier et tracer le graphe de la courbe  $\mathcal{J}$  des points d'inflexion de l'équation. Quelles sont les régions du plan où  $x''(t) > 0$  et où  $x''(t) < 0$  ?
3. Montrer que  $\Gamma_0$  est une barrière inférieure pour  $t < 0$ , et supérieure pour  $t > 0$ . Y a-t-il d'autres barrières ?

**Exercice 2** Portrait de phase d'un système autonome.

Dessiner les portraits de phase des systèmes suivants :

1.

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) - x(t) + 2 \\ y'(t) = x(t)^2 - y(t) \end{cases}$$

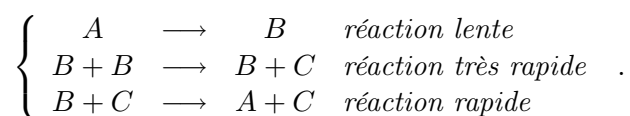
3. Le système proies/prédateurs :

$$\begin{cases} x'(t) = a x(t) - c x(t) y(t) \\ y'(t) = -b y(t) + f x(t) y(t) \end{cases}$$

où  $a, b, c$ , et  $f$  sont des constantes strictement positives.

**Exercice 3** Problème de catalyse.

L'exemple suivant de Robertson (1966) est devenu célèbre comme équation test pour des études numériques (Willoughby 1974) : la réaction chimique. On veut générer une substance chimique  $C$  à partir de la substance  $A$  en utilisant un catalyseur  $B$ , le catalyseur permettant d'accélérer la réaction. On a le bilan de réaction suivant



Ce bilan permet d'obtenir le système différentiel suivant, pour les concentrations chimiques  $y_\alpha$  des substances  $\alpha \in \{A, B, C\}$ ,

$$\begin{cases} y'_A(t) = -k_1 y_A(t) + k_3 y_B(t) y_C(t) \\ y'_B(t) = k_1 y_A(t) - k_3 y_B(t) y_C(t) - k_2 y_B^2(t) \\ y'_C(t) = k_2 y_B^2(t) \end{cases}$$

avec les constantes  $k_1 = 0.04$ ,  $k_2 = 3 \cdot 10^7$  et  $k_3 = 10^4$ , avec les conditions initiales  $y_A(0) = 1$  et  $y_B(0) = y_C(0) = 0$ .

1. Démontrer que ce système admet une unique solution locale.
2. Démontrer que pour tout  $\alpha \in \{A, B, C\}$ , on a  $y_\alpha(t) \geq 0$  — ce qui est attendu puisque  $y_\alpha$  est une concentration. Indication : On pourra raisonner par l'absurde et considérer un temps  $t_0$  où une concentration s'annule et montrer qu'alors elle ne peut pas décroître.
3. Montrer que  $y_A(t) + y_B(t) + y_C(t) = 1$  pour tout  $t \geq 0$ . En déduire qu'il existe une unique solution globale.
4. Chercher les états stationnaires et étudier la stabilité du système linéarisé autour du point stationnaire.

## 2 Exemples de résolutions explicites.

**Exercice 4** Équations linéaires.

1. Résoudre dans  $\mathbf{R}$  l'équation  $x''(t) + x(t) = 0$ .
2. Résoudre dans  $\mathbf{R}$  le système

$$\begin{cases} x'(t) = 2y(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) \end{cases} .$$

Pour quelles conditions initiales les trajectoires sont-elles des demi-droites ?

**Exercice 5** Raccordement.

Résoudre l'équation

$$|t| y'(t) + (t - 1) y(t) = t^2 .$$

**Exercice 6** Équation de Bernoulli.

Résoudre l'équation

$$t y'(t) + y(t)^2 e^t - y = 0 .$$