M2AO, TD1
Rappels sur les EDOs, introduction aux schémas numériques

1 Étude qualitative des EDOs.

Exercice 1 Étude qualitative d'une équation scalaire.

On considère l'équation $x'(t) = x(t)^2 - t$.

1. *Tracer les isoclines* Γ_p *de cette équation.*
2. *Étudier et tracer le graphe de la courbe* $\mathcal{J}$ *des points d'inflexion de l'équation. Quelles sont les régions du plan où* $x''(t) > 0$ *et où* $x''(t) < 0$ *?*
3. *Montrer que* Γ_0 *est une barrière inférieure pour* $t < 0$*, et supérieure pour* $t > 0$*. Y a-t-il d'autres barrières ?*

Exercice 2 Portrait de phase d'un système autonome.

Dessiner les portraits de phase des systèmes suivants :

1. $$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) \end{array} \right.$$
2. $$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = y(t) - x(t) + 2 \\ y'(t) = x(t)^2 - y(t) \end{array} \right.$$
3. *Le système proies/prédateurs :*
$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = a\,x(t) - c\,x(t)\,y(t) \\ y'(t) = -b\,y(t) + f\,x(t)\,y(t) \end{array} \right.$$
où a*,* b*,* c*, et* f *sont des constantes strictement positives.*

Exercice 3 Problème de catalyse.

L'exemple suivant de Robertson (1966) est devenu célèbre comme équation test pour des études numériques (Willoughby 1974) : la réaction chimique. On veut générer une substance chimique C *à partir de la substance* A *en utilisant un catalyseur* B*, le catalyseur permettant d'accélérer la réaction. On a le bilan de réaction suivant*

$$\left\{ \begin{array}{cccl} A & \longrightarrow & B & \textit{réaction lente} \\ B+B & \longrightarrow & B+C & \textit{réaction très rapide} \\ B+C & \longrightarrow & A+C & \textit{réaction rapide} \end{array} \right. .$$

Ce bilan permet d'obtenir le système différentiel suivant, pour les concentrations chimiques y_α des substances $\alpha \in \{A, B, C\}$,

$$\left\{ \begin{array}{lclcccc} y_A'(t) & = & - & k_1\, y_A(t) & + & k_3\, y_B(t)\, y_C(t) & & \\ y_B'(t) & = & & k_1\, y_A(t) & - & k_3\, y_B(t)\, y_C(t) & - & k_2\, y_B^2(t) \\ y_C'(t) & = & & k_2\, y_B^2(t) & & & & \end{array} \right.$$

avec les constantes $k_1 = 0.04$, $k_2 = 3.10^7$ et $k_3 = 10^4$, avec les conditions initiales $y_A(0) = 1$ et $y_B(0) = y_C(0) = 0$.

1. *Démontrer que ce système admet une unique solution locale.*
2. *Démontrer que pour tout $\alpha \in \{A, B, C\}$, on a $y_\alpha(t) \geq 0$ — ce qui est attendu puisque y_α est une concentration.* Indication *: On pourra raisonner par l'absurde et considérer un temps t_0 où une concentration s'annule et montrer qu'alors elle ne peut pas décroître.*
3. *Montrer que $y_A(t) + y_B(t) + y_C(t) = 1$ pour tout $t \geq 0$. En déduire qu'il existe une unique solution globale.*
4. *Chercher les états stationnaires et étudier la stabilité du système linéarisé autour du point stationnaire.*

2 Exemples de résolutions explicites.

Exercice 4 Équations linéaires.

1. *Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $x''(t) + x(t) = 0$.*
2. *Résoudre dans $\mathbf{R}$ le système*

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = 2\, y(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) \end{array} \right. .$$

Pour quelles conditions initiales les trajectoires sont-elles des demi-droites ?

Exercice 5 Raccordement.

Résoudre l'équation

$$|t|\, y'(t) + (t-1)\, y(t) = t^2 \ .$$

Exercice 6 Équation de Bernoulli.

Résoudre l'équation

$$t\, y'(t) + y(t)^2\, e^t - y = 0 \ .$$