

# M2AO, TD2

## Introduction aux schémas numériques

### Exercice 1 Modèle de Lorentz.

On considère le modèle de Lorentz suivant

$$\begin{cases} y'_A &= -\sigma y_A + \sigma y_B \\ y'_B &= -y_A y_C + r y_A - y_B \\ y'_C &= y_A y_B - b y_C \end{cases}$$

avec  $y_A(0) = -8$ ,  $y_B(0) = 8$  et  $y_C(0) = r - 1$ , puis  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$  et  $b = 8/3$ .

1. Justifier que ce système admet une solution unique locale en temps.
2. Écrire un schéma d'Euler explicite pour ce schéma.

### Exercice 2 Pont de Tacoma.

Pour étudier le phénomène de stabilité du pont de Tacoma, nous considérons ici un modèle simple. Nous allons étudier les évolutions de l'angle  $\theta$  formé par le pont avec l'horizontal et de l'altitude moyenne  $y$  du pont soumis à une excitation  $f(t) = \lambda \sin(\omega t)$  d'amplitude  $\lambda$  et de fréquence d'oscillation  $\omega/(2\pi)$ . Ces évolutions sont supposées être régies par le système

$$\begin{cases} \theta''(t) &= -\delta \theta'(t) + \frac{6K}{m} \cos(\theta(t)) \sin(\theta(t)) + \lambda \sin(\omega t) \\ y''(t) &= -\delta y'(t) - \frac{2K}{m} y(t) + g \end{cases}$$

où  $m$  représente la masse du pont,  $g$  la gravité,  $\delta$  une résistance et  $K$  la force de réaction des cables.

1. Écrire ce système différentiel comme un système du premier ordre.
2. Montrer qu'il existe une unique solution.
3. Écrire un schéma d'Euler explicite pour ce schéma.

### Exercice 3 Un schéma d'ordre 2.

Soit  $f$  appartenant à  $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}; \mathbf{R})$ . On s'intéresse au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(0) = u_0 \end{cases} .$$

Pour l'approcher, on définit le schéma suivant :

$$\begin{cases} v^{n+1} = v^n + \frac{h}{2} (f(t^n, v^n) + f(t^{n+1}, v^n + h f(t^n, v^n))) \\ v^0 = u_0 \end{cases} .$$

1. Montrer que ce schéma est consistant d'ordre 2.
2. Montrer que ce schéma est stable. En déduire qu'il est convergent d'ordre 2.

### Exercice 4 Stabilité asymptotique du schéma d'Euler

On considère l'équation différentielle (où  $k > 0$ ) :

$$y' + ky^2 = 0, \quad y(0) = 1.$$

1. Résoudre cette équation. Quelle est sa limite en  $t \rightarrow \infty$  ?
2. Écrire le schéma d'Euler explicite et étudier le comportement de la solution numérique lorsque  $n \rightarrow \infty$ .
3. On considère le schéma :

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{h} + k \left( \frac{y^{n+1} + y^n}{2} \right)^2 = 0.$$

Calculer  $y^{n+1}$  en fonction de  $y^n$ ,  $k$  et  $h$ . En déduire une condition sur  $h$  pour que le comportement de  $y^n$  soit correct lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Montrer que le schéma est consistant d'ordre 2.

### Exercice 5 Schéma de Taylor

Soit  $f$  appartenant à  $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}; \mathbf{R})$ . On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(0) = u_0 \end{cases}.$$

Définissons alors  $f^{[m]} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}; \mathbf{R})$  par :

$$\begin{cases} f^{[0]} = f \\ f^{[m+1]} = \partial_t f^{[m]} + \partial_u f^{[m]} \times f, \quad m \geq 0 \end{cases}.$$

1. Montrer par récurrence que  $u^{(m+1)}(t) = f^{[m]}(t, u(t))$ .
2. Définissons la fonction

$$\psi_p(t, u, h) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{h^j}{(j+1)!} f^{[j]}(t, u)$$

puis le schéma

$$\begin{cases} v^{n+1} = v^n + h \psi_p(t^n, v^n, h) \\ v^0 = u_0 \end{cases}.$$

Montrer que ce schéma est d'ordre  $p$ .

3. Montrer que ce schéma est stable et en déduire que le schéma est convergent d'ordre  $p$ .