M2AO, TD3
Schémas implicites, schémas de Runge-Kutta

Exercice 1 Stabilité asymptotique et schéma implicite.

On considère le problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{l} u'(t) = -150\,u(t) + 30 \\ u(0) = 1 \end{array}\right. .$$

1. *Calculer la solution exacte. Quel est son comportement quand t tend vers $+\infty$?*
2. *Euler explicite :*
   - *Écrire le schéma d'Euler explicite pour cette équation.*
   - *Trouver une relation de récurrence sur la suite $\left(v^n - \frac{1}{5}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ où v^n désigne l'approximation construite. En déduire v^n.*
   - *Avec $h = 1/50$, calculer v^n. Qu'observez-vous ?*
   - *Quelle condition doit vérifier le pas de temps h pour donner le bon comportement quand n tend vers $+\infty$?*
3. *Euler implicite : Mener la même étude pour le schéma d'Euler implicite.*

Exercice 2 Problème raide et schéma implicite.

Soit $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$. On s'intéresse à l'équation

$$u'(t) \;=\; -\,\lambda\, u(t) \;+\; 1 \;+\; \lambda\, t\ .$$

1. *Résoudre explicitement l'équation (pour toute donnée initiale u_0). Quel est le comportement de $u(t)$ lorsque λ tend vers $+\infty$ (en un temps t fixé) ?*
2. *Écrire le schéma d'Euler explicite pour cette équation. En déduire une relation de récurrence simple pour la suite $(v^n - n\,h)$, où v^n est l'approximation construite et h le pas de temps. Quel est le comportement de v^n lorsque λ tend vers $+\infty$ (à n et h fixé) ?*
3. *Reprendre la question précédente pour le schéma d'Euler implicite.*

Exercice 3 Schémas de Runge-Kutta à deux points intermédiaires.

Soit f appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}; \mathbf{R})$. On considère le problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{rcl} u'(t) & = & f(t, u(t)) \\ u(0) & = & u_0 \end{array}\right. .$$

On lui associe le schéma de Runge-Kutta explicite suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} v^{n+1} & = & v^n \;+\; h\ \sum_{j=1}^{2} b_j\, f(t^{n,j}, v^{n,j}) \\ v^0 & = & u_0 \end{array}\right.$$

où les points intermédiaires sont donnés par

$$t^{n,i} \; = \; t^n \; + \; c_i \, h \; , \quad \textit{pour} \;\; i \; = \; 1, \, 2$$

et les valeurs approchées intermédiaires par

$$v^{n,1} \; = \; v^n \; , \qquad v^{n,2} \; = \; v^n \; + \; h \, a \, f(t^{n,1}, v^{n,1}) \; ,$$

b_1, b_2, c_1, c_2 *et* a *étant des paramètres réels fixés vérifiant* $0 \leq c_1, c_2 \leq 1$.

1. *À quelles conditions obtient-on un schéma au moins d'ordre un (pour toute fonction f) ?*
2. *Même question pour l'ordre deux.*
3. *Le schéma d'Euler modifié*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} v^{n+1} & = & v^n \; + \; h \; f \; \left(t^n \; + \; \frac{h}{2}, v^n \; + \; \frac{h}{2} \, f(t^n, v^n)\right) \\ v^0 & = & u_0 \end{array} \right.$$

entre-t-il dans ces cadres ?