

# M2AO, TD4

## Différences finies pour les équations elliptiques

### Exercice 1 Problèmes continus.

Soit  $f$  et  $c$  deux fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbf{R}$ , et  $\alpha, \beta$  deux réels. On suppose  $c \geq 0$  dans tout l'exercice.

1. Conditions de Dirichlet. On s'intéresse d'abord aux solutions  $u : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ , de classe  $\mathcal{C}^2$ , de

$$\begin{cases} -u'' + cu = f, \\ u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta. \end{cases} \quad (1)$$

- (a) Montrer que, quitte à changer  $f$ , on ne perd rien à supposer  $\alpha = \beta = 0$ . C'est ce que l'on fera désormais.
- (b) Montrer qu'alors si  $u$  est une solution de (1), pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a

$$\int_{[0,1]} (u')^2 \leq \int_{[0,1]} f u \leq \frac{1}{2\varepsilon} \int_{[0,1]} f^2 + \frac{\varepsilon}{2} \int_{[0,1]} u^2.$$

En déduire l'unicité des solutions.

- (c) Inégalité de Poincaré. Montrer par ailleurs qu'il existe  $K > 0$  tel que toute fonction  $u : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que  $u(0) = u(1) = 0$  vérifie

$$\int_{[0,1]} u^2 \leq K \int_{[0,1]} (u')^2.$$

- (d) Montrer qu'il existe  $K' > 0$  tel que toute solution  $u$  de (1) vérifie

$$\int_{[0,1]} u^2 + \int_{[0,1]} (u')^2 \leq K' \int_{[0,1]} f^2.$$

2. Conditions de Neumann. On s'intéresse maintenant aux solutions  $u : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ , de classe  $\mathcal{C}^2$ , de

$$\begin{cases} -u'' + cu = f, \\ u'(0) = \alpha, \quad u'(1) = \beta. \end{cases} \quad (2)$$

On supposera dorénavant  $c > 0$ .

- (a) Montrer que, quitte à changer  $f$ , on ne perd rien à supposer  $\alpha = \beta = 0$ . C'est ce que l'on fera désormais.
- (b) Montrer qu'il existe  $K, K' > 0$  tels que toute solution  $u$  de (2) vérifie

$$\int_{[0,1]} u^2 + K \int_{[0,1]} (u')^2 \leq K' \int_{[0,1]} f^2.$$

En déduire l'unicité des solutions.

- (c) Qu'en est-il de l'unicité lorsque  $c \equiv 0$  ?

**Exercice 2** Intégration par parties discrète.

Soit  $N \in \mathbf{N}^*$ . En vous inspirant de l'intégration par parties, récrire l'expression

$$\sum_{i=0}^N F_i (G_{i+1} - G_i) ,$$

pour tous  $(F_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbf{R}^{N+1}$  et  $(G_i)_{0 \leq i \leq N+1} \in \mathbf{R}^{N+2}$ .

**Exercice 3** Discrétisations.

On pourra utiliser sans démonstration le résultat de l'exercice précédent. On se donne  $f$  et  $c$  deux fonctions continues de  $[0, 1]$ , avec  $c \geq 0$ .

1. Montrer que, pour tout  $N \in \mathbf{N}^*$  et tout  $(U_i)_{-1 \leq i \leq N+1} \in \mathbf{R}^{N+3}$ , on a

$$-\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N U_i \frac{V_{i+1} - V_i}{h} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_i^2 - (V_{N+1} U_N - V_0 U_0)$$

où  $h = 1/N$  et, pour  $0 \leq i \leq N+1$ ,

$$V_i = \frac{U_i - U_{i-1}}{h} .$$

2. Conditions de Dirichlet.

(a) Inégalité de Poincaré. Montrer qu'il existe  $K > 0$  tel que, pour tous  $N \in \mathbf{N}^*$  et  $(U_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbf{R}^{N+1}$  vérifiant  $U_0 = U_N = 0$ , on ait

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N U_i^2 \leq K \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_i^2 \tag{3}$$

où  $h$  et les  $V_i$  sont comme précédemment.

(b) Montrer qu'il existe  $K' > 0$  tel que si  $N \in \mathbf{N}^*$  et si  $(U_i)_{-1 \leq i \leq N+1} \in \mathbf{R}^{N+3}$  est une solution de

$$-\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} + C_i U_i = F_i , \quad 0 \leq i \leq N+1 , \tag{4}$$

où  $C_i = c(ih)$  et  $F_i = f(ih)$ , avec  $h = 1/N$ , vérifiant

$$U_0 = 0 , \quad U_N = 0 ,$$

alors on a

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N U_i^2 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_i^2 \leq K' \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N F_i^2$$

où les  $V_i$  sont définis comme précédemment. En déduire l'unicité de telles solutions  $(U_i)$ .

3. Conditions de Neumann.

(a) On s'intéresse au schéma obtenu en complétant (4) par

$$V_0 = 0, \quad V_{N+1} = 0.$$

Si  $u$  est une solution de (2) avec  $\alpha = \beta = 0$ , a-t-on

$$-\frac{u(h) - u(0)}{h^2} + c(0)u(0) - f(0) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 ?$$

(b) On s'intéresse au schéma obtenu en complétant cette fois (4) par

$$\frac{U_1 - U_{-1}}{2h} = 0, \quad \frac{U_{N+1} - U_{N-1}}{2h} = 0,$$

c'est-à-dire

$$V_1 = -V_0, \quad V_N = -V_{N+1}. \quad (5)$$

Montrer qu'il existe  $K' > 0$  tel que, si  $N \in \mathbf{N}^*$  et si  $(U_i)_{-1 \leq i \leq N+1} \in \mathbf{R}^{N+3}$  est une solution de (4) vérifiant (5), alors

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N U_i^2 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_i^2 \leq K' \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N F_i^2.$$

Si  $u$  est une solution de (2) avec  $\alpha = \beta = 0$ , a-t-on

$$-\frac{u(h) - u(0)}{h^2} + \frac{1}{2}c(0)u(0) - \frac{1}{2}f(0) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 ?$$

(c) Reprenons le schéma précédent. La solution discrète est-elle unique si  $c \equiv 0$  ?

4. Écrire de façon matricielle les schémas proposés dans l'exercice.