M2AO, TD5
Introduction aux éléments finis

Exercice 1 Analyse fonctionnelle.

Soit $(V, \| \cdot \|)$ *un espace de Banach,* L *une forme linéaire continue sur* V *et* a *une forme bilinéaire continue et coercitive sur* $V \times V$*. On cherche à approcher l'unique* u *tel que pour tout* $v \in V$*, l'on ait*

$$a\,(u\,,\,v) \;=\; L\,(v)\;. \tag{1}$$

1. *Justifier que, pour tout sous-espace fermé* W *de* V*, il existe un unique* u *— noté* u_W^L *— tel que l'égalité (1) soit vérifiée pour tout* $v \in W$*.*

2. *Montrer qu'il existe une constante* $K > 0$ *telle que, pour tout sous espace fermé* W*, on ait*

$$\left\| u_V^L \,-\, u_W^L \right\| \;\leq\; K \, \inf_{v \in W} \left\| u_V^L \,-\, v \right\| \;.$$

3. *Montrer qu'il existe une constante* $K' > 0$ *(indépendante de* L*) tel que, pour tout sous-espace fermé* W *et toute forme linéaire continue* L_W*, on ait*

$$\left\| u_W^L \,-\, u_W^{L_W} \right\| \;\leq\; K' \; |\, L \,-\, L_W \,|$$

   où $| \cdot |$ *est la norme duale de* $\| \cdot \|$*.*

Exercice 2 Une application en dimension 1.

Soit b*,* c *et* f *des fonctions réelles continues sur* $]0, 1[$*, avec* $b > 0$ *et* $c \geq 0$*. On cherche à approcher la solution* u *de l'équation*

$$-\left(b\,u'\right)' \,+\, c\,u \;=\; f$$

vérifiant $u(0) = u(1) = 0$*, après avoir transformé le problème en : trouver* u *de carré intégrable, (continue, presque partout dérivable) telle que* u' *soit de carré intégrable,* $u(0) = u(1) = 0$*, et*

$$\int_{[0,1]} b\,u'\,v' \;+\; \int_{[0,1]} c\,u\,v \;=\; \int_{[0,1]} f\,v$$

pour toute fonction v de carré intégrable, (continue, presque partout dérivable) telle que v' soit de carré intégrable et $v(0) = v(1) = 0$.

Pour approcher u, on se donne $N \in \mathbf{N}^\star$ et on décompose $[0,1]$ en

$$[0,1] \;=\; \bigcup_{0\leq i\leq N-1} [x_i, x_{i+1}]$$

où, pour $0 \leq i \leq N$, $x_i = i/N$. On introduit alors

$$W_N \;=\; \left\{\; u \in \mathcal{C}([0,1],\mathbf{R}) \;\middle|\; \textit{pour tout } 0 \leq i \leq N-1\,,\; u_{|[x_i,x_{i+1}]} \in \mathcal{P}_1\left([x_i,x_{i+1}]\right) \;\right\}$$

où $\mathcal{P}_1(E)$ désigne l'ensemble des fonctions polynomiales sur un ensemble $E \subset \mathbf{R}$, de degré inférieur à 1.

1. *Déterminer la dimension de W_N et en donner une base dont la base duale soit formée des évaluations en les x_i, c'est-à-dire telle que les coordonnées d'un $v \in W_N$ soient $(v\,(x_i))_{0\leq i\leq N}$.*

2. *On considère $W_{N,0}$ le sous-espace de W_N défini par*

$$W_{N,0} \;=\; \{\; u \in W_N \;\mid u\,(0) \;=\; u\,(1) \;=\; 0 \;\}\;.$$

Écrire une version matricielle du problème : trouver $u \in W_{N,0}$ tel que l'équation (2) soit vérifiée pour tout $v \in W_{N,0}$. Qu'obtient-on lorsque b, c et f sont constants ?

Exercice 3 Élément $\mathbf{P}^1$

1. *Soit ABC un triangle de $\mathbf{R}^2$. À l'aide des coordonnées barycentriques, donner une base de $\mathcal{P}_1(ABC)$ — l'ensemble des fonctions polynomiales sur ABC de degré total inférieur à 1 — dont la base duale soit formée des évaluations en A, B et C.*

2. *On se donne un domaine (connexe) Ω de $\mathbf{R}^2$ triangulé :*

$$\Omega \;=\; \bigcup_{1\leq i\leq N} \mathcal{T}_i$$

où $N \in \mathbf{N}^\star$ et $(\mathcal{T}_i)$ est une famille de triangle telle que si $1 \leq i < j \leq N$, alors soit $\mathcal{T}_i$ et $\mathcal{T}_j$ sont disjoints soit leur intersection se réduit à une face. On suppose que le bord de Ω contient exactement M sommets de la triangulation. Combien la triangulation contient-elle de sommets ? On introduit l'espace

$$W_{N,0} \;=\; \left\{\; u \in \mathcal{C}([0,1],\mathbf{R}) \;\middle|\; u_{|\partial\Omega} \;=\; 0 \textit{ et pour tout } 1 \leq i \leq N\,,\; u_{|\mathcal{T}_i} \in \mathcal{P}_1\left(\mathcal{T}_i\right) \;\right\}\;.$$

Quelle est la dimension de $W_{N,0}$? En donner une base.

Exercice 4 Élément $\mathbf{P}^2$

1. *Soit ABC un triangle de $\mathbf{R}^2$. On note P, Q et R les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. À l'aide des coordonnées barycentriques, donner une base de $\mathcal{P}_2(ABC)$ — l'ensemble des fonctions polynomiales sur ABC de degré total inférieur à 2 — dont la base duale soit formée des évaluations en A, B, C, P, Q et R.*

2. *On considère de nouveau un domaine (connexe) Ω de $\mathbf{R}^2$ triangulé :*

$$\Omega \;=\; \bigcup_{1\leq i\leq N} \mathcal{T}_i$$

où $N \in \mathbf{N}^\star$ et $(\mathcal{T}_i)$ est une famille de triangle telle que si $1 \leq i < j \leq N$, alors soit $\mathcal{T}_i$ et $\mathcal{T}_j$ sont disjoints soit leur intersection se réduit à une face. On introduit l'espace

$$W_{N,0} \;=\; \left\{\; u \in \mathcal{C}([0,1],\mathbf{R}) \;\middle|\; u_{|\partial\Omega} \;=\; 0 \text{ et pour tout } 1 \leq i \leq N\,,\; u_{|\mathcal{T}_i} \in \mathcal{P}_2\left(\mathcal{T}_i\right) \;\right\}\;.$$

Quelle est la dimension de $W_{N,0}$? En donner une base.