Calcul différentiel, TD 1

Préliminaires. Applications différentiables

1. Montrer que les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) suivants, munis des normes indiquées, sont des espaces de Banach:
   (a) $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ ensemble des fonctions définies sur un ensemble X, à valeurs dans $\mathbb{K}$, bornées, muni de la norme $f \mapsto ||f|| = \sup_{x \in X} |f(x)|$.
   (b) $\mathcal{C}(T, \mathbb{K})$ ensemble des fonctions continues sur un espace topologique compact T à valeurs dans $\mathbb{K}$, muni de la norme $f \mapsto ||f|| = \sup_{x \in T} |f(x)|$.
   (c) $l^\infty(\mathbb{K})$ ensemble des suites bornées d'éléments de $\mathbb{K}$, normé par $x = (x_n) \mapsto ||x|| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.
   (d) $l^1(\mathbb{K})$ ensemble des suites (x_n) d'éléments de $\mathbb{K}$ telles que la série de terme général x_n soit absolument convergente, normé par $x = (x_n) \mapsto ||x|| = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$.

2. Soit E un espace normé et (u_n) une suite de E. On rappelle que l'on dit que la série de terme général u_n (ou, abusivement, que la série $\sum u_n$ ou encore la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$) est convergente, de somme s (et on note $s = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$), si la suite (s_n) où, $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_n = \sum_{m=0}^{n} u_m$, est convergente, de limite s. On dit que la série de terme général u_n est absolument convergente si la série à termes positifs de terme général $||u_n||$ est convergente.
   (a) On suppose que E est un espace de Banach. Montrer que toute série absolument convergente est convergente.
   (b) On suppose que E est une algèbre de Banach (i.e. E est une algèbre munie d'une norme $||.||$ telle que $||xy|| \leq ||x||\ ||y||$, $\forall (x, y) \in E^2$, et $(E, ||.||)$ est complet). Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries (à termes dans E) absolument convergentes.

      On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sum_{m=0}^{n} u_m v_{n-m}$. Montrer que la série $\sum w_n$ est absolument convergente et que $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.

3. Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à cœfficients dans $\mathbb{K}$.
   (a) Montrer que si l'on pose, $\forall A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $||A|| = n \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|$, on définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que, $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$, $||AB|| \leq ||A||\ ||B||$.
   (b) Montrer que, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n$ est absolument convergente (on pose, par convention, $A^0 = I$, la matrice unité). On désignera par $\exp(A)$ ou $\exp A$ sa somme.

(c) Montrer que si A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent (i.e. tels que $AB = BA$) on a $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. En déduire que, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp A$ est inversible. Que vaut $(\exp A)^{-1}$?

4. Soient E et F des espaces de Banach, $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace de Banach des applications linéaires continues de E dans F, $\mathrm{Isom}(E,F)$ l'ensemble des isomorphismes d'espaces normés de E sur F (i.e. $u \in \mathrm{Isom}(E,F)$ si et seulement si u est un isomorphisme d'espaces vectoriels de E sur F et un homéomorphisme de E sur F).

   (a) Soit $1_E = \mathrm{id}_E$. Montrer que si $v \in \mathcal{L}(E)$ $(= \mathcal{L}(E,E))$ est telle que $||1_E - v|| < 1$, $v \in \mathrm{Isom}(E,E)$. Indication: utiliser la série de terme général $(1_E - v)^n$.

   (b) En déduire que $\mathrm{Isom}(E,F)$ est un ouvert (éventuellement vide!) de $\mathcal{L}(E,F)$.
   Pour ce faire, on pourra montrer que si $\mathrm{Isom}(E,F) \neq \emptyset$, si $u_0 \in \mathrm{Isom}(E,F)$, $B\left(u_0, \dfrac{1}{||u_0^{-1}||}\right) \subset \mathrm{Isom}(E,F)$.

5. (a) Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme. Soit $\varphi : E \to E$ l'application linéaire définie par: $\forall f \in E$, $\forall x \in [0,1]$, $\varphi(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Montrer que φ est continue et calculer $||\varphi||$.

   (b) Soit F l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues et bornées, muni de la norme de la convergence uniforme $||.||_\infty$.
   Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, bornées, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée appartient à F. On norme E par $f \mapsto ||f||_1 = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$.
   On définit une application linéaire $\Phi : E \to F$ par $\Phi(f) = f'$. Montrer que Φ est continue et calculer $||\Phi||$ (on pourra s'aider de la suite (f_n) de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\mathrm{Arctg}(nx)$, $n \geq 1$).

6. Soient E et F des espaces de Banach ; on rappelle (cf. exercice 4) que $\mathrm{Isom}(E,F)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E,F)$. Montrer que l'application $f : \mathrm{Isom}(E,F) \to \mathrm{Isom}(F,E)$ définie par $f(u) = u^{-1}$ est différentiable sur $\mathrm{Isom}(E,F)$ et que, $\forall u \in \mathrm{Isom}(E,F)$, $\forall h \in \mathcal{L}(E,F)$, $df_u(h) = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}$.

7. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, E un espace normé et f une application de I dans E.

   (a) Montrer que f est dérivable en $t_0 \in I$ si et seulement si elle est différentiable en t_0. Par quelle relation $f'(t_0)$ et df_{t_0} sont-elles reliées?

   (b) Montrer qu'il existe une isométrie linéaire canonique de $\mathcal{L}(\mathbb{R},E)$ sur E.

   (c) Cette isométrie permet donc d'identifier $\mathcal{L}(\mathbb{R},E)$ à E. Si f est différentiable en $t_0 \in I$, à quel vecteur de E cette isométrie identifie-t-elle df_{t_0}?