

Calcul différentiel, TD 2

Applications différentiables

1. On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels d'une norme $\|\cdot\|$ telle que $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$, $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$. Montrer, par différentes méthodes, que l'application $\varphi_m : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi_m(M) = M^m$ ($m \in \mathbb{N}$) est différentiable et calculer sa différentielle.

2. Soient E un espace normé, $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue symétrique définie positive, q la forme quadratique associée. On définit $f : E \rightarrow E$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+q(x)}}$.

Montrer que f est différentiable et calculer $df_x(k)$, $(x, k) \in E^2$.

3. Soient E un espace normé, $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre normée des endomorphismes continus de E et $f : E \rightarrow \mathcal{L}(E)$ une application différentiable. On définit $\varphi : E \rightarrow E$ par $\varphi(x) = f(x)(x)$, $\forall x \in E$.

(a) Montrer que φ est différentiable sur E :

- *i*) directement (avec la définition de la différentiabilité);
- *ii*) en écrivant φ comme la composée d'applications différentiables judicieusement choisies.

(b) On considère le cas particulier où $E = \mathbb{R}^2$ et où f est l'application qui à $x = (x_1, x_2) \in E$ associe l'élément de $\mathcal{L}(E)$ dont la matrice par rapport à la base canonique de \mathbb{R}^2 est $\begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$. Calculer la différentielle de φ :

- *i*) en appliquant (a);
- *ii*) en évaluant $f(x)(x)$.

4. Soit E l'espace vectoriel des $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ telles que $f(0) = f(1) = 0$ normé par $f \mapsto \|f\|_1 = \|f\|_0 + \|f'\|_0$ où, $\forall g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, $\|g\|_0 = \sup_{x \in [0, 1]} |g(x)|$.

On définit $\omega : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $\omega(f, g) = \int_0^1 f(x)g'(x)dx$. Montrer que ω est bilinéaire, antisymétrique continue. Calculer $d\omega_{(f,g)}(\varphi, \psi)$ pour $(f, g, \varphi, \psi) \in E^4$.

5. (a) Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = \frac{\text{Arctg}(xy)}{1+z^2}$. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^3 et calculer $df_{(x,y,z)}(\xi, \eta, \zeta)$.

(b) L'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$; $f(0, 0) = 0$ a-t-elle des dérivées partielles premières en $(0, 0)$? Est-elle continue en $(0, 0)$? Est-elle différentiable en $(0, 0)$?

(c) Mêmes questions avec $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$; $f(0, 0) = 0$.

- (d) Mêmes questions avec $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- (e) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$; $f(0, 0) = 0$. Montrer que f est différentiable en $(0, 0)$. Ses dérivées partielles premières sont-elles continues en $(0, 0)$?
6. Soient $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ les fonctions définies par
- $$f(x, y, z) = (x \sin y \sin z, x \cos y \cos z) \text{ et}$$
- $$g(u, v) = (au + bv + \sin(u^2)\text{sh}(v^2), cu + dv + \sin(v^2)\text{sh}(u^2)) \text{ (où } (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4\text{)}.$$
- (a) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^3 et calculer le rang de sa matrice jacobienne.
- (b) Calculer la matrice jacobienne de $g \circ f$ au point $(0, 0, 0)$.
7. (Exercice facultatif et un peu plus difficile). Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Soient V un ouvert de \mathbb{R} et $U = \{\varphi \in E; \varphi([a, b]) \subset V\}$.
- (a) Montrer que U est un ouvert de E .
- (b) On donne une application de classe \mathcal{C}^1 , $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, et on définit l'application $F : U \rightarrow E$ par: $\forall \varphi \in U, F(\varphi) = f \circ \varphi$. Montrer que F est différentiable sur U et que $\forall \varphi \in U, \forall h \in E, dF_\varphi(h) = (f' \circ \varphi)h$. Indications: on pensera à utiliser le théorème des accroissements finis élémentaire et la continuité uniforme de f' sur tout segment fermé contenu dans V .
- (c) Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur U .
- (d) On définit $G : U \rightarrow \mathbb{R}$ par $G(\varphi) = \int_a^b f(\varphi(t))dt$. Montrer que G est différentiable en tout point $\varphi \in U$ et calculer $dG_\varphi(h)$, $h \in E$.
- (e)
 - *i*) Montrer que $F_1 : E \rightarrow E$ définie par $F_1(\varphi) = e^\varphi$ est différentiable.
 - *ii*) Soit $U_2 = \{\varphi \in E; \forall x \in [a, b], \varphi(x) \neq 0\}$. Montrer que $F_2 : U_2 \rightarrow E$ définie par $F_2(\varphi) = \frac{1}{\varphi}$ est différentiable.
 - *iii*) Soit $U_3 = \{\varphi \in E; \forall x \in [a, b], \varphi(x) > 0\}$. Montrer que $F_3 : U_3 \rightarrow E$ définie par $F_3(\varphi) = \sqrt{\varphi}$ est différentiable.