Calcul différentiel, TD 3

Théorème des accroissements finis et applications

1. Soient E et F des espaces normés, U un ouvert de E, $f : U \to F$ une fonction continue sur U, différentiable en tout point de $U \setminus \{a\}$ et telle que $\lim_{x \to a} df_x$ existe. Montrer que f est différentiable au point a.

2. Soient E un espace normé, Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, f une application de Ω dans E. On dira que f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur Ω si, pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe un voisinage V de (t_0, x_0) et un réel $k > 0$ tels que, $\forall (t, x) \in V$, $\forall (t, x') \in V$, $||f(t, x) - f(t, x')|| \leq k||x - x'||$.

   Soit donc $f : \Omega \to E$ une application continue, telle que, $\forall (t, x) \in \Omega$, $d_2 f_{(t,x)}$ existe et telle que $d_2 f : \Omega \to \mathcal{L}(E, E)$ soit continue. Montrer que f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur Ω.

   Remarque: ce sera en particulier vrai si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, E)$. Ce résultat est utile en théorie des équations différentielles.

3. Soient E et F des espaces normés, U un ouvert de E, $f : U \to F$ une application différentiable dans U, $x_0 \in U$. On suppose que df est continue au point x_0. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $0 < ||h|| \leq \eta$ et $0 < ||k|| \leq \eta$ entraînent $||f(x_0 + h) - f(x_0 + k) - df_{x_0}(h - k)|| \leq \varepsilon ||h - k||$ (on pourra utiliser la fonction $x \mapsto f(x_0 + x) - df_{x_0}(x)$ définie sur un voisinage ouvert V de 0).

4. Soient $(E, ||.||_E)$ un espace normé et U un ouvert de E. Pour tout espace normé $(X, ||.||_X)$ et toute fonction bornée φ de U dans X, on posera $||\varphi||_\infty = \sup_{x \in U} ||\varphi(x)||_X$. On donne un espace normé $(F, ||.||_F)$ et on désigne par G l'espace vectoriel des $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$ telles que f et df soient bornées sur U. On norme G par $f \mapsto ||f||_G = ||f||_\infty + ||df||_\infty$.

   On considère l'application (dite "fonction évaluation") $e : G \times U \to F$ définie par $e(f, x) = f(x)$. On norme $G \times E$ par $(f, x) \to ||(f, x)||_0 = \max(||f||_G, ||x||_E)$. Montrer que e est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $G \times U$.

5. Soient $E_1, \ldots, E_n, F$ des espaces normés. Montrer que toute application n-linéaire continue $\Phi : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $E_1 \times \ldots \times E_n$.