

Calcul différentiel, TD 4

Théorème d'inversion locale, Théorème des fonctions implicites

N. B. "difféomorphisme" signifiera "difféomorphisme de classe \mathcal{C}^1 ".

1. Donner un exemple d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, de classe \mathcal{C}^1 , qui soit un difféomorphisme au voisinage de tout point de \mathbb{R}^2 et qui ne soit pas un difféomorphisme de \mathbb{R}^2 sur $f(\mathbb{R}^2)$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(x, y, z) = (e^y + e^z, e^x - e^z, x - y)$.
 - (a) Quel est le rang de la matrice jacobienne de f au point (x, y, z) ?
 - (b) Montrer qu'au voisinage de tout point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, f est un difféomorphisme.
 - (c) f est-elle un difféomorphisme de \mathbb{R}^3 sur $f(\mathbb{R}^3)$?
3. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (\sin x + \operatorname{sh} y, \operatorname{sh} x - \sin y)$ est un difféomorphisme de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R}^2 .
4. On munit \mathbb{R}^n du produit scalaire canonique $(x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)) \mapsto \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ et de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ associée.
Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe \mathcal{C}^1 telle qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, $\forall (x, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\langle df_x(h), h \rangle \geq \alpha \|h\|^2$.
 - (a) En appliquant le théorème des accroissements finis à $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = \langle f(tb + (1-t)a), b - a \rangle$ montrer que, $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a $\langle f(b) - f(a), b - a \rangle \geq \alpha \|b - a\|^2$.
 - (b) En déduire que f est une application fermée (i.e. que pour tout fermé F de \mathbb{R}^n , $f(F)$ est un fermé de \mathbb{R}^n).
 - (c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, df_x est un automorphisme de \mathbb{R}^n .
 - (d) Montrer que f est un difféomorphisme de \mathbb{R}^n sur \mathbb{R}^n .
5. On considère l'espace de Banach H_0 des fonctions continues de $I = [0, 1]$ dans \mathbb{R} normé par la norme de la convergence uniforme $f \mapsto \|f\|_0 = \sup_{t \in I} |f(t)|$ et l'espace vectoriel H_1 des fonctions de classe \mathcal{C}^1 de I dans \mathbb{R} , nulles en 0, normé par $f \mapsto \|f\|_1 = \sup_{t \in I} |f'(t)|$.
 - (a) Montrer que $(H_1, \|\cdot\|_1)$ est un espace de Banach.
 - (b) Soit Φ l'application de H_1 dans H_0 définie par $\Phi(f) = f + ff'$, $\forall f \in H_1$. Montrer que Φ est de classe \mathcal{C}^1 sur H_1 et calculer $d\Phi_f(\varphi)$ pour $(f, \varphi) \in H_1 \times H_1$.
 - (c) Montrer que Φ est un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans H_1 dans un voisinage de 0 dans H_0 . En déduire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $g \in H_0$, $\|g\|_0 < \varepsilon$, l'équation différentielle $f' + ff' = g$ possède une solution $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$.
6. Montrer que l'équation $xy - y \ln z + \sin(xz) = 0$ permet de définir une fonction $(x, y) \mapsto z = f(x, y)$ de classe \mathcal{C}^1 sur un voisinage de $(0, 2)$ et valant 1 en $(0, 2)$.
7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^1 . f peut-elle être injective? (Penser au théorème des fonctions implicites).

8. Montrer qu'au voisinage du point $(1, 1, 1, 1, 1)$ les équations
$$\begin{cases} xu^2 + yzv + x^2z = 3 \\ xyv^3 + 2zu - u^2v^2 = 2 \end{cases}$$
 permettent de définir (u, v) comme une fonction de classe \mathcal{C}^1 de (x, y, z) et calculer la différentielle au point $(1, 1, 1)$ de cette fonction.
9. On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbb{R} muni d'une norme $\|\cdot\|$ vérifiant $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, $\forall (A, B) \in E \times E$.
Soit $D \in E$. Montrer que si $B \in E$ est suffisamment petite (au sens de cette norme), l'équation en Y , $Y + YDY = B$, a une solution.
10. Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. On pose $U = \{\varphi \in E; \varphi(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]\}$.
- (a) Montrer que U est un ouvert de E (cf. fiche 2, exercice 7, question (a)).
- (b) Soit $f : U \rightarrow E$ définie par $f(\varphi) = \frac{1}{\varphi}$. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur U .
Indications: on pourra utiliser l'application $B : U \times U \rightarrow E$ définie par $B(\varphi, \psi) = \varphi\psi$ et le théorème des fonctions implicites.
11. (Pour ceux qui aiment la physique). Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Posons $S = \{(p, V, T) \in \mathbb{R}^3; f(p, V, T) = 0\}$. Physiquement, S représente l'ensemble des états d'un gaz dont p est la pression, V le volume et T la température ($f(p, V, T) = 0$ est l'équation d'état). Soit $(p_0, V_0, T_0) \in S$ tel que $\frac{\partial f}{\partial p}(p_0, V_0, T_0) \neq 0$. Quel sens peut-on donner à la notation $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$ utilisée par les physiciens? Calculer $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$ en fonction des dérivées partielles de f au point (p, V, T) .
Soit $\Sigma = \{(p, V, T) \in \mathbb{R}^3; \frac{\partial f}{\partial p}(p, V, T) \frac{\partial f}{\partial V}(p, V, T) \frac{\partial f}{\partial T}(p, V, T) \neq 0\}$. Montrer la formule de Clapeyron:
$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = -1.$$
12. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n , $a \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ ($0 \leq m \leq n-1$) une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur U telle que df_a soit surjective (on dit que f est une submersion au point a).
Montrer que (après une éventuelle permutation des coordonnées des éléments de \mathbb{R}^n), il existe un voisinage ouvert U' de a , $U' \subset U$, et un difféomorphisme φ de U' sur un ouvert $\varphi(U')$ de \mathbb{R}^n tels que, si $\Pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ est la projection $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{m+1}, \dots, x_n)$, on ait $f|_{U'} = \Pi \circ \varphi$. Indication: utiliser la fonction $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $F(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m, f(x))$.
13. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^m , $a \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($m \leq n$) une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur U telle que df_a soit injective (on dit que f est une immersion au point a).
Montrer que (après une éventuelle permutation des coordonnées des éléments de \mathbb{R}^n) il existe un voisinage ouvert U' de a , $U' \subset U$, un voisinage ouvert V de $f(a)$ et un difféomorphisme g de V sur un ouvert $g(V)$ de \mathbb{R}^n tels que, si $i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est l'injection $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$, on ait $g \circ f|_{U'} = i|_{U'}$. Indication: si $f = (f_1, \dots, f_n)$ utiliser la fonction $F : U \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_m(x_1, \dots, x_m), f_{m+1}(x_1, \dots, x_m) + x_{m+1}, \dots, f_n(x_1, \dots, x_m) + x_n)$.