

Calcul différentiel, TD 5

Différentielles d'ordre 2

- Soient E, F, G des espaces normés, U un ouvert de E , V un ouvert de F , $f : V \rightarrow G$ et $g : U \rightarrow F$ deux fonctions telles que $g(U) \subset V$. On suppose que g est deux fois différentiable au point $a \in U$ et que f est deux fois différentiable au point $g(a)$. On sait (cf. cours) que $f \circ g$ est deux fois différentiable au point a . Exprimer $d^2(f \circ g)_a(h, k)$, $h \in E, k \in E$, à l'aide des différentielles premières et secondes de f (resp. de g) en $g(a)$ (resp. en a).
- (Cf. exercice 3 de la fiche 2). Soient E un espace normé, $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre normée des endomorphismes continus de E et $f : E \rightarrow \mathcal{L}(E)$ une application deux fois différentiable. On définit $\varphi : E \rightarrow E$ par $\varphi(x) = f(x)(x), \forall x \in E$. Montrer que φ est deux fois différentiable. Calculer $d^2\varphi_x(h, k), (x, h, k) \in E^3$,
 - directement,
 - en partant de la formule (exercice 3 fiche 2) $d\varphi_x(h) = f(x)(h) + df_x(h)(x)$.
- Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x^4 + y^2 + z^3, e^x \sin(yz))$. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 et calculer $d^2f_{(0,\pi,1)}((1, 2, 1), (0, 1, 0))$.
 - Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (\cos x \operatorname{ch} y, -\sin x \operatorname{sh} y)$. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 et calculer $d^2f_{(0,0)}((1, 0), (0, 1))$.
- On munit \mathbb{R}^n du produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On rappelle qu'on appelle isométrie de \mathbb{R}^n tout endomorphisme S de \mathbb{R}^n tel que, $\forall (h, k) \in (\mathbb{R}^n)^2, \langle S(h), S(k) \rangle = \langle h, k \rangle$. On rappelle aussi que toute isométrie de \mathbb{R}^n est un automorphisme de \mathbb{R}^n et que l'ensemble $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ des isométries de \mathbb{R}^n est un sous-groupe (dit "groupe orthogonal") de $\operatorname{Aut}(\mathbb{R}^n)$.

Soient U un ouvert connexe de \mathbb{R}^n et $H : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction deux fois différentiable. On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}^*$ et $T : U \rightarrow \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ tels que $dH_x = c T(x), \forall x \in U$.

 - Montrer que $\langle d^2H_x(l, h), dH_x(k) \rangle + \langle dH_x(h), d^2H_x(l, k) \rangle = 0, \forall (h, k, l) \in (\mathbb{R}^n)^3, \forall x \in U$.
 - En déduire (par permutation circulaire sur les vecteurs h, k, l) que $\langle dH_x(l), d^2H_x(h, k) \rangle = 0, \forall (h, k, l) \in (\mathbb{R}^n)^3, \forall x \in U$, puis que $d^2H_x = 0, \forall x \in U$.
 - En conclure que H est égale à la restriction à U de la composée d'une isométrie, d'une homothétie et d'une translation.
- Soient E un espace normé et Ω un ouvert de E .
 - Pour tout couple $(X, Y) \in (\mathcal{C}^1(\Omega, E))^2$, on définit $[X, Y] : \Omega \rightarrow E$ par $[X, Y](x) = dY_x(X(x)) - dX_x(Y(x)), \forall x \in \Omega$.
Montrer que $[X, Y]$ est continue sur Ω et que, si $(X, Y) \in (\mathcal{C}^2(\Omega, E))^2, [X, Y] \in \mathcal{C}^1(\Omega, E)$.
 - Pour $(X, Y, Z) \in (\mathcal{C}^2(\Omega, E))^3$, on pose, $\forall x \in \Omega$,
 $A(X, Y, Z)(x) = d^2X_x(Z(x), Y(x)) - dY_x(dX_x(Z(x))) - dZ_x(dX_x(Y(x)))$.
 - Exprimer $[[X, Y], Z]$ à l'aide de $A(X, Y, Z)$ et de $A(Y, X, Z)$.
 - En déduire que $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$.