

TD Equations Différentielles n° 1

Domaines de définition

Déterminer le domaine de définition de la solution maximale des problèmes de Cauchy suivants:

$$\dot{x} = 1 + x \text{ et } x(0) = 1, \quad \dot{x} = x^{\frac{4}{3}} \text{ et } x(0) = 1, \quad \dot{x} = \sin x \text{ et } x(0) = 2.$$

Existence et unicité pour le problème de Cauchy

1) Montrer que le problème de Cauchy $\dot{x} = x^{\frac{2}{3}}$ et $x(0) = 0$ possède une infinité de solutions. Expliquer.

2) Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$ une fonction *continue*. Soit $x_0 \in \mathcal{U}$: montrer qu'il existe une solution du problème de Cauchy $\dot{x} = f(x)$ et $x(0) = x_0$. Est-elle unique? (on utilisera le théorème d'Ascoli).

Portraits de phases

1) Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$. Déterminer tous les portraits de phase possibles du système différentiel

$$\dot{X} = AX.$$

2) (Sur quelques systèmes hamiltoniens)

i) Déterminer le portrait de phase pour les équations suivantes:

$$x'' + \sin x = 0, \quad , \quad x'' + x - \frac{x^2}{2} = 0.$$

ii) Soit $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ régulière telle que $V(0) = V'(0) = 0$. Montrer que si $V''(0) > 0$, toutes les trajectoires dans le plan de phase de $x'' + V'(x) = 0$ au voisinage de 0 se situent sur des courbes fermées.

Systèmes proies/prédateurs

1) On considère le système de *Lotka Volterra*

$$\dot{x} = ax - bxy, \quad \dot{y} = bxy - cy.$$

i) Déterminer les points critiques et représenter dans le plan des phases le sens de variation de x, y (on découpera le plan des phases en quatre zones caractéristiques)

ii) Montrer que chaque trajectoire rencontre successivement les quatre zones déterminées à la question précédente.

iii) Rechercher une intégrale première sous la forme $H(x) + G(y)$.

iv) En déduire que toutes les solutions pour lesquelles $x(0) > 0$ et $y(0) > 0$ sont périodiques.

2) On considère le système différentiel

$$\dot{x} = (a_1 - b_1y - c_1x)x, \quad \dot{y} = (a_2 - b_2y - c_2x)y.$$

Donner l'allure du portrait de phase et discuter selon les cas de la possibilité de l'existence de solutions périodiques, de l'extinction d'une des espèces.

Sur quelques circuits RLC

1) Déterminer le portrait de phase du système différentiel

$$\dot{x} = y - x^2, \quad \dot{y} = -x.$$

2) On considère le système différentiel (oscillateur de Van der Pol)

$$\dot{x} = y - \mu(x - x^3), \quad \dot{y} = -x.$$

i) Déterminer les points critiques et discuter de leurs natures selon la valeur de μ .

ii) On suppose $\mu = 1$. Reprendre les points i) et ii) de l'étude du système de Lotka Volterra.

iii) Déterminer l'allure des trajectoires dans le plan des phases au voisinage de 0.

iv) (**difficile**) On définit une application $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_-$ de manière suivante. Soit $(x_0, y_0) = (0, y)$ et $y > 0$, et t_1 le premier instant tel que $(x(t_1), y(t_1)) = (0, z)$ et $z < 0$: on note $\alpha(y) = z$. Montrer en utilisant la question ii) que l'application est bien définie. Montrer en considérant la fonction $\beta(y) = \alpha(y)^2 - y^2$, qu'il existe y tel que $\alpha(y) = -y$. En déduire qu'il existe une solution périodique.