

## TD Equations Différentielles n° 2

### Exponentielles de matrices

1) Déterminer l'exponentielle des matrices suivantes:

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{C}$$

2) Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer  $e^{tA}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  où  $A$  est la matrice

$$A = \lambda Id + N, \quad N_{i,j} = \delta_{j=i+1}.$$

3) Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  tel que les valeurs propres  $\lambda_i$  de  $A$  vérifient  $Re(\lambda_i) \leq -\alpha < 0$ . Montrer que quelque soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $C(\varepsilon)$  tel que  $\|e^{tA}\| \leq C(\varepsilon)e^{(-\alpha+\varepsilon)t}$ ,  $\forall t \geq 0$ . (on utilisera la question précédente).

4) Reprendre la question précédente en supposant qu'il existe une valeur propre  $\lambda$  de  $A$  telle que  $Re(\lambda) = 0$ .

### Autour de la formule de Duhamel

1) Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  tel que  $Re(\lambda_i) < 0$  et  $B(t) \in M_n(\mathbb{R})$  tel que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|B(t)\| = 0$ . Montrer que toute solution  $x$  du système linéaire  $\dot{x} = Ax + B(t)x$  tend vers 0 lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

2) Donner le comportement asymptotique des solutions de  $\dot{x} = A(t)x$  où  $A(t)$  est la matrice

$$\begin{pmatrix} e^{-t} & \frac{t^2}{t^2+1} e^{-t} \\ \frac{\sin t}{t} & 0 & 1 + e^{-t} \\ (2-a)(e^{-t}-1) & -1 & -a \frac{t^3}{1+t^3} \end{pmatrix}.$$

3) Soit  $A \in \mathbb{R}$  tel que  $Re(\lambda) \leq 0$  et les valeurs propres de partie réelles nulles sont simples. Soit  $B(t) \in M_n(\mathbb{R})$  et  $C(t) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\int_0^\infty \|B(t)\| dt < \infty$  et  $\int_0^\infty \|C(t)\| dt < \infty$ . Montrer que la solution de  $\dot{x} = Ax + B(t)x + C(t)$  et  $x(0) = x_0$  est bornée.

### Stabilité linéaire/ nonlinéaire

1) Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  tel que  $Re(\lambda_i) < 0$ ,  $B(t) \in M_n(\mathbb{R})$  tel que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|B(t)\| = 0$  et  $f(t, x) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(t, x)|}{|x|} = 0$  uniformément en temps. Montrer qu'il existe un voisinage  $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^n$  de 0 tel que pour tout  $x_0 \in \mathcal{U}$ , la solution de  $\dot{x} = Ax + B(t)x + f(t, x)$  et  $x(0) = x_0$  converge vers 0 (on dit que 0 est *asymptotiquement stable*).

2) **Un contre exemple** Soit le système différentiel

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax_1 \\ \dot{y} &= (-2a + \sin(\ln t) + \cos(\ln t))x_2 + x_1^2 \end{aligned}$$

Montrer que 0 n'est pas asymptotiquement stable pour  $a > 1$ .