Convexité et entropie

Considérons un système d'équations aux dérivées partielles de la forme

$$\partial_t u + A(u)\,\partial_x u = 0\,, \tag{1}$$

où l'inconnue u est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et $A \in \mathscr{C}^\infty(\mathscr{U}\,;\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$, $\mathscr{U}$ étant un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Definition 1 *Une* entropie *(mathématique) pour le système* (1) *est une application $E \in \mathscr{C}^\infty(\mathscr{U}\,;\mathbb{R})$ telle qu'il existe $F \in \mathscr{C}^\infty(\mathscr{U}\,;\mathbb{R})$ (appelé flux d'entropie) et*

$$\mathrm{d}F(u) = \mathrm{d}E(u)\,A(u) \quad \forall u \in \mathscr{U}\,.$$

On notera que si $u \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}\times[0,T];\mathscr{U})$ est solution de (1) alors

$$\partial_t(E\circ u) + \partial_x(F\circ u) = 0\,.$$

Definition 2 *Un* symétriseur *pour le système* (1) *est une application $S \in \mathscr{C}^\infty(\mathscr{U}\,;\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}))$ telle que $S(u)\,A(u)$ est symétrique pour tout $u \in \mathscr{U}$.*

(La notation $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ci-dessus désigne l'espace des matrices carrées $n\times n$ symétriques définies positives.) La notion de symétriseur est intéressante lorsque $A(u)$ n'est pas elle-même symétrique (sinon, un symétriseur trivial est $S : u \mapsto I_n$). L'existence d'un symétriseur est cruciale pour l'analyse de (1). Pour s'en convaincre, on pourra vérifier que le système linéarisé autour de $u \equiv \underline{u}$ (constant),

$$\partial_t u + A(\underline{u})\,\partial_x u = 0\,, \tag{2}$$

vérifie l'*estimation a priori* dans $L^2(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2} = \|u(\cdot,0)\|_{L^2}\,,$$

lorsque $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme définie par $\|v\|^2 = (v\,,\,S(\underline{u})\,v)$ (où $(\;,\;)$ est le produit scalaire usuel). En l'absence de symétriseur, on ne sait pas contrôler la norme L^2 des solutions de (2).

Théorème 1 *On suppose le système* (1) conservatif, *c'est-à-dire qu'il existe $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathscr{U}\,;\mathbb{R}^n)$ tel que*

$$A(u) = \mathrm{d}f(u) \quad \forall u \in \mathscr{U}\,.$$

*Si $\mathscr{U}$ est convexe et si E est une entropie strictement convexe sur $\mathscr{U}$ (*i.e. $\mathrm{d}^2E(u) > 0$ *pour tout $u \in \mathscr{U}$) pour le système* (1)*, alors la Hessienne de E définit un symétriseur.*

La démonstration utilise la notion de fonction convexe conjuguée. On note E^* la fonction convexe conjuguée de E, définie par

$$E^*(q) = \sup_{u\in\mathscr{U}} \left(\,\langle q\,,\,u\rangle - E(u)\,\right).$$

Notons $\phi : q \mapsto \mathrm{d}E^*(q)$, et $g = f\circ\phi$. Alors on a

$$g = \mathrm{d}G\,, \quad G : q \mapsto \langle q\,,\,g(q)\rangle - (F\circ\phi)(q)\,.$$

En effet, avec cette définition de G,

$$\mathrm{d}G(q)\cdot h \,=\, \langle h\,,\, g(q)\rangle \,+\, \langle q\,,\, \mathrm{d}f(\phi(q))\cdot \mathrm{d}\phi(q)\cdot h\rangle \,-\, \mathrm{d}F(\phi(q))\cdot \mathrm{d}\phi(q)\cdot h\,,$$

et

$$\mathrm{d}F(\phi(q))\cdot \mathrm{d}\phi(q)\cdot h \,=\, \mathrm{d}E(\phi(q))\cdot \mathrm{d}f(\phi(q))\cdot \phi(q)\cdot h \,=\, \langle q\,,\, \mathrm{d}f(\phi(q))\cdot \mathrm{d}\phi(q)\cdot h\rangle\,.$$

Par suite, $f \,=\, \mathrm{d}G\circ\phi^{-1}$ donc

$$\mathrm{d}f(u)\cdot k \,=\, \mathrm{d}^2G(\phi^{-1}(u))\cdot \mathrm{d}\phi^{-1}(u)\cdot k\,,$$

et $\phi^{-1}(u) \,=\, \mathrm{d}E(u)$. Donc finalement,

$$\mathrm{d}^2E(u)\,\mathrm{d}f(u) \,=\, \mathrm{d}^2E(u)\,\mathrm{d}^2G(\phi^{-1}(u))\,\mathrm{d}^2E(u)\,,$$

ce qui est symétrique d'après le lemme de Schwarz. □

Application à la dynamique des gaz Les équations de la dynamique des gaz s'écrivent sous forme conservative

$$(3)\qquad \begin{cases} \partial_t u \,+\, \partial_x f(u) \,=\, 0\,, \\[2ex] \text{où} \quad u \,=\, (\rho, m, \varepsilon) \,=\, \left(\rho, \rho v, \tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho e\right)\,, \\[2ex] \text{et} \quad f(u) \,=\, \left(\rho v, \rho v^2 + p(\rho, e), \left(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho e + p(\rho, e)\right) v\right) \\ \;=\, \left(m, \frac{m^2}{\rho} + \widetilde{p}(u), (\varepsilon + \widetilde{p}(u))\frac{m}{\rho}\right) \quad \text{avec} \quad \widetilde{p}(u) \,:=\, p\left(\rho, \frac{\varepsilon}{\rho} - \frac{1}{2}\frac{m^2}{\rho^2}\right)\,. \end{cases}$$

(Dans ces équations, ρ représente la masse volumique du gaz, v sa vitesse, e son énergie interne par unité de masse, p sa pression, que l'on suppose reliée par une loi d'état à ρ et e.) Le système (3) rentre donc dans le cadre précédent avec $n = 3$,

$$\mathscr{U} \,=\, \{\, u = (\rho, m, \varepsilon)\,;\, \rho \,>\, 0\,, \varepsilon \,>\, 0\,\}\,,$$

lorsque la fonction p est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}^{+*}$. (Le calcul de $A(u) \,=\, \mathrm{d}f(u)$ n'est pas ni « amusant » ni utile ici, comme on va le voir.)

Proposition 1 *On suppose qu'il existe des fonctions s et T, $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}^{+*}$, telles que*

$$T\,\mathrm{d}s \,=\, \mathrm{d}e \,-\, \frac{p}{\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\,.$$

Alors l'application $E \,:\, u \,\mapsto\, -\,\rho\, s\left(\rho, \frac{\varepsilon}{\rho} - \frac{1}{2}\frac{m^2}{\rho^2}\right)$ est une entropie mathématique de (3), de flux $F \,:\, u \,\mapsto\, E(u)\,m/\rho$.

(Les fonctions s et T représentent respectivement l'entropie par unité de masse et la température du gaz.)

Il suffit de vérifier que les solutions de (3) satisfont

$$(4)\qquad \partial_t(E\circ u) \,+\, \partial_x(F\circ u) \,=\, 0\,.$$

C'est un petit exercice de calcul différentiel : on vérifie successivement que les solutions de (3) satisfont les équations

$$\partial_t v \,+\, v\,\partial_x v \,+\, \frac{1}{\rho}\,\partial_x p(\rho,e) \,=\, 0\,,$$

$$\partial_t e \,+\, v\,\partial_x e \,+\, p\,\partial_x v \,=\, 0\,,$$

$$\partial_t s(\rho,e) \,+\, v\,\partial_x s(\rho,e) \,=\, 0\,,$$

$$\partial_t(\rho\, s(\rho,e)) \,+\, \partial_x(\rho\, s(\rho,e)\, v\,) \,=\, 0\,,$$

cette dernière équation n'étant rien d'autre que (4).

L'étude de la convexité de E peut être grandement simplifiée en utilisant quelques arguments simples :

- une fonction convexe est l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions affines ;
- la réciproque d'une fonction croissante convexe est concave.

Ainsi, E est fonction convexe de u si et seulement si il existe un ensemble Λ tel que

$$E(\rho,m,\varepsilon) \,=\, \sup_{(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\Lambda} \,(\alpha\,\rho \,+\, \beta\,\rho\,v \,+\, \gamma\,\varepsilon \,+\, \delta\,)$$

$$=\rho \sup_{(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\Lambda} \left(\alpha \,+\, \beta\,v \,+\, \gamma\,(\frac{1}{2}v^2 \,+\, e) \,+\, \delta\,\frac{1}{\rho}\right)$$

pour $\rho > 0$. Autrement dit, E est convexe si et seulement si $E/\rho = -s$ est fonction convexe de $(\tau := 1/\rho, v, \frac{1}{2}v^2 \,+\, e)$. Or, puisque

$$T\,\mathrm{d}s \,=\, \mathrm{d}\Big(\frac{1}{2}v^2 \,+\, e\Big) \,-\, v\,\mathrm{d}v \,+\, p\,\mathrm{d}\tau\,,$$

si $T > 0$, l'application $(\tau, v, \frac{1}{2}v^2 \,+\, e) \mapsto (\tau, v, s)$ est un difféomorphisme local, et l'on vérifie aisément que la Hessienne de s dans les variables $(\tau, v, \frac{1}{2}v^2 + e)$ est définie négative si celle de e dans les variables (τ, s) est définie positive. D'où le résultat suivant.

Proposition 2 *On suppose qu'il existe des fonctions s et T, $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}^{+*}$, telles que*

$$T\,\mathrm{d}s \,=\, \mathrm{d}e \,+\, p\,\mathrm{d}\tau\,,$$

avec$T > 0$ et e fonction strictement convexe de $(\tau = 1/\rho, s)$. Alors l'application $E\,:\, u \mapsto -\,\rho\, s\Big(\rho, \frac{\varepsilon}{\rho} - \frac{1}{2}\frac{m^2}{\rho^2}\Big)$ est une entropie strictement convexe de (3).

Exercice Montrer que la fonction convexe conjuguée de E est donnée par

$$E^*(q) \,=\, \frac{p}{T}\,,$$

pour

$$q \,=\, \frac{1}{T}\,\left(-\,\frac{1}{2}v^2 \,+\, e \,-\, s\,T \,+\, p\,\tau\,,v\,,\,-1\right)\,.$$