$$\boxed{VB(\mathbb{R})}$$

Introduction

Soit u une *fonction* définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (ou plus généralement dans un espace de Banach E). On lui associe l'application:

$$T_u \ : \mathbb{R} \ \longrightarrow \ [0, \infty]$$

définie par

$$T_u(x) \ = \ \sup \ \{ \ \sum_{j=1}^{N} \ |\, u(x_j) \ - \ u(x_{j-1}) \,| \ ; N \in \mathbb{N}^* \, , \ -\infty \ < \ x_0 \ < \cdots < \ x_N \ = \ x \ \}$$

C'est une application croissante. D'où la

Définition 1 *On dira que u est à variation bornée si T_u est bornée. Dans ce cas on notera $u \in VB(\mathbb{R})$ et*

$$VT(u) \ := \ \sup_{x \in \mathbb{R}} \ T_u(x) \ = \ \lim_{x \to +\infty} \ T_u(x)$$

Remarque 1

- *L'ensemble $VB(\mathbb{R})$ ainsi défini des fonctions à variation bornée est un espace vectoriel sur lequel la variation totale VT définit une semi-norme (noter que toute fonction constante est de variation totale nulle).*
- *Afin de préciser l'espace E d'arrivée de u, on notera éventuellement $VB(\mathbb{R}; E)$.*
- *On peut aussi définir $VB(I)$, où I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, en imposant aux suites (x_i) d'être à valeurs dans I.*

On a immédiatement le

Lemme 1 *Si $u \in VB(\mathbb{R})$, alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a:*

$$(\ x \ < \ y \ ) \ \Longrightarrow \ |\, u(x) \ - \ u(y) \,| \leq T_u(y) \ - \ T_u(x)$$

Démonstration. soit $\varepsilon > 0$. Par définition, il existe $x_0 \ < \cdots < \ x_N \ = \ x$ tels que

$$\sum_{j=1}^{N} \ |\, u(x_j) \ - \ u(x_{j-1}) \,| \ \geq \ T_u(x) - \varepsilon$$

Et l'on a

$$T_u(y) \ \geq \ |\, u(x) \ - \ u(y) \,| \ + \ \sum_{j=1}^{N} \ |\, u(x_j) \ - \ u(x_{j-1}) \,|$$

D'où $T_u(y) \ \geq \ |\, u(x) \ - \ u(y) \,| \ + \ T_u(x) - \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. ∎

Ce lemme permet de donner une caractérisation très simple des fonctions à variation bornée qui sont à valeurs réelles.

Théorème 1

$$VB(\mathbb{R};\mathbb{R}) \ = \ \{ \ u \ : \mathbb{R} \ \longrightarrow \ \mathbb{R} \ ; \ u \ = \ u_1 \ - \ u_2 \ , \textit{ avec } u_1 \textit{ et } u_2 \textit{ croissantes bornées } \}$$

Démonstration. Soit $u \in VB(\mathbb{R})$. Soient $u_1 := \dfrac{T_u + u}{2}$ et $u_2 := \dfrac{T_u - u}{2}$. Alors $u = u_1 - u_2$ et le lemme 1 exprime que u_1 et u_2 sont croissantes. Elles sont bornées car T_u l'est par définition de $VB(\mathbb{R})$ et u l'est aussi d'après le lemme 1:

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ |u(x)| \ \leq \ |u(0)| \ + \ VT(u)$$

par exemple.

Réciproquement, on remarque que toute fonction croissante bornée v est à variation bornée: en effet, $VT(v) = \sup v - \inf v$. Donc toute différence de fonctions croissantes bornées est à variation bornée, puisque $VB(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. ■

Remarque 2 *Pour tout u à variation bornée, l'application T_u est croissante et bornée par définition. Elle est donc aussi à variation bornée.*

Corollaire 1 *Si $u \in VB(\mathbb{R};\mathbb{C})$, alors*

- *elle est bornée,*
- *elle admet une limite à gauche en tout point de $]-\infty, +\infty]$ et une limite à droite en tout point de $[-\infty, +\infty[$,*
- *elle est continue sauf sur un ensemble au plus dénombrable,*
- *elle est mesurable et localement intégrable sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Le premier point provient directement du lemme 1, comme on l'a noté ci-dessus. Pour le reste, on écrit $u = v_1 - v_2 + i(w_1 - w_2)$, avec v_k, w_k croissantes et bornées (si $u \in VB(\mathbb{R};\mathbb{C})$ alors $\bar{u} \in VB(\mathbb{R};\mathbb{C})$ et donc $\Re(u)$, $\Im(u) \in VB(\mathbb{R};\mathbb{R})$). Or, si v est une fonction croissante bornée, elle admet une limite à gauche ($= \sup\limits_{x<x_0} v(x)$), respectivement une limite à droite ($= \inf\limits_{x>x_0} v(x)$), en tout point x_0 de $]-\infty, +\infty]$, respectivement en tout point x_0 de $[-\infty, +\infty[$. De plus l'ensemble de ses points de discontinuité (c'est-à-dire les points x_0 où $\inf\limits_{x>x_0} v(x) > \sup\limits_{x<x_0} v(x)$) est au plus dénombrable. En effet, pour tout $(n,p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$:

$$\# \left\{ x_0 \in]n, n+1[\ ; \ \left(\inf_{x>x_0} v(x) \ - \ \sup_{x<x_0} v(x) \right) \ > \frac{v(n+1) - v(n)}{p} \right\} \ \leq \ p$$

Enfin, v est mesurable. On remarque en effet que l'image réciproque de tout intervalle est un intervalle et que par suite l'image réciproque de tout borélien est un borélien. Etant bornée, v est donc localement intégrable. ■

Remarque 3 *Le corollaire 1 énonce que toute fonction à variation bornée à valeurs complexes est bornée et localement intégrable. Il faut prendre garde cependant à ne pas en déduire que* $VB(\mathbb{R};\mathbb{C})$ s'injecte *dans $L^\infty(\mathbb{R})$ ou dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Par exemple,*

$$f : \begin{array}{lcl} x \notin \mathbb{Z} & \mapsto & 0 \\ n \in \mathbb{Z} & \mapsto & \frac{1}{n^2+1} \end{array}$$

est un élément non nul de $VB(\mathbb{R})$ (sa variation totale vaut $\frac{\pi}{th\pi} + 1$).

Pour éviter ce genre d'ennui on se restreint souvent aux fonctions continues à gauche (on pourrait prendre à droite mais il faudrait modifier en conséquence l'énoncé du théorème 2 ci-dessous):

$$\widetilde{VB}(\mathbb{R}) \; := \; \{ \; v \in VB(\mathbb{R}) \; ; \; v \text{ est partout continue à gauche } \}$$

Ceci est justifié par la

Proposition 1 *Pour tout $u \in VB(\mathbb{R})$, il existe une et une seule fonction $v \in \widetilde{VB}(\mathbb{R})$ telle que u et v coïncident partout sauf peut-être aux points de discontinuité de u. De plus on a $VT(v) \leq VT(u)$.*

Démonstration. Nécessairement, on doit avoir, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v(x) = \lim_{\delta \xrightarrow{\geq} 0} u(x - \delta)$ (ceci a bien un sens d'après le corollaire 1). Réciproquement, l'application v ainsi définie convient: elle est par construction continue à gauche et, si $x_0 \; < \cdots < \; x_N \; = \; x$, alors

$$\sum_{j=1}^{N} \, | \, v(x_j) \; - \; v(x_{j-1}) \, | \; = \lim_{\delta \xrightarrow{\geq} 0} \; \sum_{j=1}^{N} \, | \, u(x_j - \delta) \; - \; u(x_{j-1} - \delta) \, | \; \leq \; VT(u)$$

■

Dérivation au sens des distributions

Nous avons vu que les fonctions à variation bornée étaient localement intégrables. Elles peuvent donc être vues commes des distributions sur $\mathbb{R}$: à chaque fonction $u \in VB(\mathbb{R};\mathbb{C})$ on associe un unique $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (l'application $u \mapsto U$ n'est cependant injective que sur $\widetilde{VB}(\mathbb{R};\mathbb{C})$). On a va voir que les fonctions à variation bornée sont caractérisées en un certain sens par leur dérivée au sens des distributions.

Théorème 2 *Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Alors $u \in \widetilde{VB}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ si et seulement s'il existe une mesure de Borel μ et une constante $c \in \mathbb{C}$ telles que*

$$\forall x \in \mathbb{R} \, , \; u(x) \; = \; c \, + \, \mu(\,] - \infty \, , \, x \, [\,)$$

De plus, c et μ sont uniques et l'on a:

$$\forall x \in \mathbb{R} \, , \; T_u(x) \; = \; |\mu| \, (\,] - \infty \, , \, x \, [\,)$$

En particulier,

$$VT(u) \; = \; |\mu| \, (\, \mathbb{R} \,)$$

Démonstration.

1) Commençons par vérifier qu'une fonction v de la forme

$$v(x) \; = \; c \, + \, \mu(\,] - \infty \, , \, x \, [\,) \, , \; \forall x$$

appartient bien à $\widetilde{VB}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, lorsque μ est une mesure de Borel complexe et $c \in \mathbb{C}$.

- elle est continue à gauche. En effet, pour toute suite croissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers x, on a
$$]-\infty\,,\,x\,[=\bigcup_{n=0}^{\infty}\,]-\infty\,,\,x_n\,[\,,$$
la réunion étant croissante et donc $\mu(\,]-\infty\,,\,x_n\,[) \;\to\; \mu(\,]-\infty\,,\,x\,[)$ d'après les propriétés élémentaires d'une mesure.

- elle est à variation bornée. En effet, si $x_0 \;<\cdots<\; x_N \;=\; x$ alors
$$\sum_{j=1}^{N} |\,v(x_j)\;-\;v(x_{j-1})\,| \;=\; \sum_{j=1}^{N} \mu(\,[\,x_{j-1}\,,\,x_j\,[) \;\leq\; |\mu|\,(\,]-\infty\,,\,x\,[\,)$$
Donc
$$T_v(x) \;\leq\; |\mu|\,(\,]-\infty\,,\,x\,[\,) \;\leq\; |\mu|\,(\,\mathbb{R}\,) \;<\; +\infty$$
par définition d'une mesure complexe.

- on remarque de plus que $c \;=\; \lim\limits_{x\to-\infty} v(x)$. En effet, pour toute suite décroissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $-\infty$, on a
$$\emptyset \;=\; \bigcap_{n=0}^{\infty}\,]-\infty\,,\,x_n\,[\,,$$
l'intersection étant décroissante. Comme de plus
$$|\,\mu(\,]-\infty\,,\,x_0\,[\,)\,| \;\leq\; |\mu|\,(\,\mathbb{R}\,) \;<\; +\infty$$
on peut en déduire $\mu(\,]-\infty\,,\,x_n\,[\to\; 0$ d'après les propriétés élémentaires d'une mesure.

2) L'unicité de c provient alors de l'unicité de la limite. L'unicité de μ provient du fait que toute mesure de Borel sur $\mathbb{R}$ est régulière et que deux mesures régulières coïncidant sur tous les intervalles de la forme $]-\infty\,,\,x\,[$ coïncident sur tous les intervalles de la forme $[\,\alpha\,,\,\beta\,[$ et donc sur tous les ouverts (qui sont réunions dénombrables d'intervalles disjoints de la forme $[\,\alpha\,,\,\beta\,[$) et par suite sur tous les boréliens.

3) Soit maintenant $u \in \widetilde{VB}(\mathbb{R})$. Quitte à remplacer u par $u\;-\;c$, où $c \;:=\; \lim\limits_{x\to-\infty} u(x)$, on supposera désormais $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) \;=\; 0$. On cherche à construire μ telle que:
$$\forall x\in\mathbb{R}\,,\; u(x) \;=\; \mu(\,]-\infty\,,\,x\,[\,)$$

a) On va se ramener au cas où u est croissante (à valeurs réelles). Pour cela il suffit d'écrire $u \,=\, v_1 - v_2 + i(w_1 - w_2)$, avec v_k, w_k croissantes et bornées, continues à gauche et tendant vers 0 en $-\infty$. Ceci est possible en précisant ce qui a été fait dans le corollaire 1: on écrit $v := \Re(u) = \frac{T_v+v}{2} \;-\; \frac{T_v-v}{2}$ et $w := \Im(u) = \frac{T_w+w}{2} \;-\; \frac{T_w-w}{2}$ et on montre de plus que T_v et T_w sont continues à gauche et tendent vers 0 en $-\infty$. Par exemple pour T_v: soit $\varepsilon > 0$ et soient $x_0 \;<\cdots<\; x_N \;=\; x$ tels que
$$\sum_{j=1}^{N} |\,v(x_j)\;-\;v(x_{j-1})\,| \;\geq\; T_v(x) - \varepsilon$$

- Si $\delta > 0$ est tel que $x_{N-1} < x - \delta < x$, par définition de T_v et puisqu'elle est croissante on a:

$$\sum_{j=1}^{N-1} |\, v(x_j) \,-\, v(x_{j-1})\,| \,+\, |\, v(x-\delta) \,-\, v(x_{N-1})\,| \;\leq\; T_v(x-\delta) \;\leq\; T_v(x)$$

D'où, par continuité à gauche de v en x:

$$T_v(x) - \varepsilon \;\leq\; \sum_{j=1}^{N-1} |\, v(x_j) \,-\, v(x_{j-1})\,| \,+\, |\, v(x) \,-\, v(x_{N-1})\,|$$

$$\leq\; \liminf_{\delta \overset{\geq}{\to} 0} T_v(x-\delta) \;\leq\; \limsup_{\delta \overset{\geq}{\to} 0} T_v(x-\delta) \leq\; T_v(x)$$

D'où la continuité à gauche en x de T_v.

- Si $t_0 \,< \cdots <\, t_n \,=\, x_0$, alors

$$T_v(x) \;\geq\; \sum_{i=1}^{n} |\, v(t_i) \,-\, v(t_{i-1})\,| \;+\; \sum_{j=1}^{N} |\, v(x_j) \,-\, v(x_{j-1})\,|$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{n} |\, v(t_i) \,-\, v(t_{i-1})\,| \;\leq\; \varepsilon$$

On en déduit $T_v(x_0) \;\leq\; \varepsilon$. D'où $\lim_{x \to -\infty} T_v(x) \,=\, 0$.

Une fois construites les mesures μ_k, ν_k associées respectivement à v_k, w_k il suffira de poser $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\nu_1 - \nu_2)$.

b) Supposons donc désormais u croissante, bornée, continue à gauche et tendant vers 0 en $-\infty$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $u(x+)$ la limite à droite de u en x. A toute partie A de $\mathbb{R}$, associons

$$\Phi(A) := \bigcap_{x \in A} [u(x), u(x+)]$$

Montrons que pour tout borélien B, $\Phi(B)$ est encore un borélien. Par construction et puisque u est monotone continue à gauche, si I est un intervalle alors $\Phi(I)$ est un intervalle. Donc l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$:

$$\Sigma \;:=\; \{\, A \subset \mathbb{R}\,;\, \Phi(A) \text{ est un borélien} \,\}$$

contient les intervalles. Si l'on montre que c'est une tribu (une σ-algèbre) alors il contient nécessairement les boréliens.

- par définition $\Phi(\emptyset) = \emptyset$ donc $\emptyset \in \Sigma$, et $\Phi(\mathbb{R})$ est un intervalle d'extrémités 0 et $VT(u)$ donc $\mathbb{R} \in \Sigma$.

- pour tout $A \subset \mathbb{R}$ alors $\Phi(\mathbb{R} \backslash A) \;=\; (\Phi(\mathbb{R}) \backslash \Phi(A)) \bigcup \{y_\kappa\}_{\kappa \in K}$ où y_κ sont des valeurs telles que l'intervalle $u^{-1}(y_\kappa)$ n'est pas réduit à un singleton. Au même titre que l'ensemble des points de discontinuité de u, l'ensemble de ces "valeurs-palier" est au plus dénombrable. Donc $\{y_\kappa\}_{\kappa \in K}$ est borélien. Si $A \in \Sigma$ alors $\Phi(A)$ et donc $\Phi(\mathbb{R}) \backslash \Phi(A)$ sont boréliens. Donc $\Phi(\mathbb{R} \backslash A)$ est borélien c'est-à-dire que $\mathbb{R} \backslash A \,\in \Sigma$.

- si $A_n \in \Sigma$ alors $\Phi(\bigcup_n A_n) = \bigcup_n \Phi(A_n)$ est borélien car les $\Phi(A_n)$ le sont.

Donc Σ est bien une tribu. Pour tout borélien B, on peut maintenant définir:

$$\mu(B) \ := \ m(\Phi(B))$$

où m désigne la mesure de Lebesgue. Montrons que μ est σ-additive. Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable de boréliens disjoints deux à deux alors, pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $m \neq n$, $\Phi(B_n) \bigcap \Phi(B_m) \subset \{y_\kappa\}_{\kappa\in K}$, qui est au plus dénombrable, donc $m(\Phi(B_n) \bigcap \Phi(B_m)) = 0$. Par suite,

$$\mu(\bigcup_n B_n) \ = \ \sum_n m(\Phi(B_n)) \ = \ \sum_n \mu(B_n)$$

Donc μ est une mesure de Borel, positive. Vérifions qu'elle est la mesure cherchée. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(\,]-\infty\,,\,x\,[\,)$ est un intervalle d'extrémités 0 et $u(x) \geq 0$, donc

$$\mu(\,]-\infty\,,\,x\,[\,) = u(x)$$

Il reste à vérifier l'égalité $T_u(x) \ = \ |\mu|\,(\,]-\infty\,,\,x\,[\,)$. D'après la partie directe (1) on a déjà l'inégalité:

$$T_u(x) \ \leq \ |\mu|\,(\,]-\infty\,,\,x\,[\,)$$

Pour montrer l'inégalité opposée, introduisons la mesure λ associée comme ci-dessus à la fonction T_u (qui croissante, bornée continue à gauche et tend vers 0 en $-\infty$). D'après le lemme 1 on a, pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, si $\alpha < \beta$:

$$|\,\mu(\,[\,\alpha,\ \beta[\,)\,| \ = \ |\,u(\beta) \ - \ u(\alpha)\,| \ \leq \ T_u(\beta) \ - \ T_u(\alpha) \ = \ \lambda(\,[\,\alpha,\ \beta[\,)$$

On en déduit

$$|\,\mu(\Omega)\,| \ \leq \ \lambda(\Omega)$$

pour tout ouvert Ω, d'où aussi $|\,\mu(B)\,| \ \leq \ \lambda(B)$ pour tout borélien B. Ceci montre que $|\mu|(B) \leq \lambda(B)$ pour tout borélien B. En particulier,

$$|\mu|\,(\,]-\infty\,,\,x\,[\,) \ \leq \ \lambda\,(\,]-\infty\,,\,x\,[\,) \ = \ T_u(x)$$

■

Remarque 4 *Par construction de μ on voit que u est continue en x si et seulement si $\mu(\{x\}) = m([u(x), u(x+)]) = 0$.*

Corollaire 2 *Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, mesurable et localement intégrable. Si $u \in VB(\mathbb{R};\mathbb{C})$ alors la dérivée U' de u au sens des distributions est une mesure de Borel complexe. Réciproquement, si la dérivée U' de u au sens des distributions est une mesure de Borel complexe et si u est continue à gauche, alors $u \in \widetilde{VB}(\mathbb{R};\mathbb{C})$.*

Démonstration. Soit $u \in VB(\mathbb{R};\mathbb{C})$. On lui associe $v \in \widetilde{VB}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ comme dans la proposition 1. Alors u et v coïncident presque partout: elles ont donc la même image U dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Soit alors μ la mesure associée à v par le théorème 2. Pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a:

$$<\ U'\,,\,\phi\ >= -\int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{x} d\mu(y)\,\phi'(x)\,dx$$

$$= - \int_{\mathbb{R}} \int_y^{+\infty} \phi'(x)\, dx\, d\mu(y)$$

d'après le théorème de Fubini. On peut l'appliquer car:

$$\int_{\mathbb{R}} \int_y^{+\infty} |\phi'(x)|\, dx\, d|\mu|(y) \ \leq \ C\ |\mu|(\mathbb{R}) \ < +\infty$$

où $C = m(\,\mathrm{supp}\phi\,) \ \sup_{\mathbb{R}} |\phi'|$. Ainsi

$$< U' \,,\, \phi >= \int_{\mathbb{R}} \phi(y)\, d\mu(y)$$

Réciproquement, si U' est une mesure de Borel complexe μ alors l'application v définie par $v(x) = \mu(\,]-\infty\,,\,x\,[\,)$ est à variation bornée et donc localement intégrable: son image V dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est de plus, d'après le calcul précédent, telle que $V' = \mu$. Donc $U - V$ est une distribution constante c (sa dérivée est nulle). D'où

$$u \,=\, v \,+\, c\,, \text{ presque partout}$$

et en fait $u \,=\, v \,+\, c$ partout puisqu'elles sont toutes deux continues à gauche. ■

Remarque 5 *On ne peut se départir de l'hypothèse supplémentaire "u continue à gauche" dans la réciproque. En effet, sans cette hypothèse, rien n'empêche que la différence $u - v - c$ soit nulle presque partout et de variation totale infinie. C'est le cas par exemple de:*

$$f:\ \begin{array}{ccc} x \notin \mathbb{Z} & \mapsto & 0 \\ n \in \mathbb{Z} & \mapsto & \frac{1}{|n|+1} \end{array}$$

Notons que le théorème 2 permet aussi de démontrer (voir Rudin):

Théorème 3 *Si $u \in VB(\mathbb{R})$ alors u est dérivable presque partout et sa dérivée est intégrable sur $\mathbb{R}$.*

Il faut bien voir que cet énoncé n'est pas incompatible avec le corollaire 2. Dans le théorème 3, la dérivée considérée est au *sens usuel* des fonctions tandis que dans le corollaire 2 il s'agit de dérivée *au sens des distributions*. D'ailleurs, si $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, est mesurable et intégrable sur $\mathbb{R}$ et si la dérivée U' de u au sens des distributions est intégrable, alors u appartient à l'espace de Sobolev $W^{1,1}(\mathbb{R})$ (voir Brézis). Or $W^{1,1}(\mathbb{R})$ n'est constitué que de fonctions continues (dont la restriction à tout un intervalle borné est même *absolument continue*). Ce n'est pas le cas de $VB(\mathbb{R})$, qui autorise précisément des sauts.

Autre caractérisation de VB

Lemme 2 *Si $u \in VB(\mathbb{R})$ alors*

$$\sup_{h \neq 0} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{u(x+h) \,-\, u(x)}{h} \right| dx \ \leq \ VT(u) \ < +\infty$$

Démonstration. Comme u est mesurable (corollaire 1), l'intégrale de la fonction positive $x \mapsto |\, u(x+h) \,-\, u(x) \,|$ a toujours un sens. On a de plus

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\, u(x+h) \,-\, u(x) \,|\; dx \;&=\; \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{kh}^{(k+1)h} |\, u(x+h) \,-\, u(x) \,|\; dx \\ &=\; \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^h |\, u(x+(k+1)h) \,-\, u(x+kh) \,|\; dx \\ &=\; \int_0^h \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\, u(x+(k+1)h) \,-\, u(x+kh) \,|\; dx\end{aligned}$$

d'après le théorème de Fubini. D'où

$$\int_{\mathbb{R}} |\, u(x+h) \,-\, u(x) \,|\; dx \;\le\; h\, VT(u)$$

par définition de VT. ∎

Ce lemme permet de voir facilement que la dérivée au sens des distributions de $u \in VB(\mathbb{R})$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ (espace des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini).

Proposition 2 *Si $u \in VB(\mathbb{R})$ alors la dérivée U' au sens des distributions de u se prolonge continûment à $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.*

Démonstration. D'après le lemme 2, on a pour tout $h \neq 0$ et pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\mathbb{R})$ (continue à support compact):

$$\left|\, \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x+h) \,-\, u(x)}{h}\, \varphi(x)\, dx \,\right| \;\le\; VT(u)\; \sup_{\mathbb{R}} |\varphi|$$

On en déduit, pour tout $h \neq 0$ et pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}^{\infty}(\mathbb{R})$:

$$\left|\, \int_{\mathbb{R}} u(x)\, \frac{\varphi(x) \,-\, \varphi(x-h)}{h}\, dx \,\right| \;\le\; VT(u)\; \sup_{\mathbb{R}} |\varphi|$$

d'où, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue:

$$\left|\, \int_{\mathbb{R}} u(x)\; \varphi'(x)\, dx \,\right| \;\le\; VT(u)\; \sup_{\mathbb{R}} |\varphi|$$

puisque $\left|\, u(x)\, \frac{\varphi(x) \,-\, \varphi(x-h)}{h} \,\right| \;\le\; \sup_{\mathbb{R}} |\varphi'|\; \chi_{supp\,\varphi}(x)\; |u(x)|$, fonction intégrable d'après le corollaire 1. En particulier on a donc, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$|\; < U' \,,\, \phi > \;| \;=\; \left|\, \int_{\mathbb{R}} u(x)\; \varphi'(x)\, dx \,\right| \;\le\; VT(u)\; \sup_{\mathbb{R}} |\varphi|$$

ce qui permet de prolonger U' par densité à $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. ∎

Cependant pour retrouver le résultat du corollaire 2 il faut avoir recours au théorème de Riesz (voir Rudin, chap. 2 et 6), qui est un théorème beaucoup plus difficile que le théorème 2.

On peut maintenant se demander si l'inégalité du lemme 2 n'est pas en fait une égalité. La réponse est affirmative, moyennant la restriction habituelle "u continue à gauche" (bien sûr, la continuité à droite conviendrait aussi).

Théorème 4 *Si* $u \in \widetilde{VB}(\mathbb{R})$ *alors*

$$\sup_{h \neq 0} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{u(x+h) \; - \; u(x)}{h} \right| \, dx \; = \; VT(u)$$

Démonstration. Puisque $\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \right| dx \; = \; \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{u(x)-u(x-h)}{h} \right| dx$, le problème revient à montrer que

$$\sup_{h > 0} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{u(x) \; - \; u(x-h)}{h} \right| \, dx \; = \; VT(u)$$

Afin de montrer l'inégalité opposée à celle du lemme 2, on va essayer d'introduire à nouveau une suite croissante de points distants de h, pour h assez petit.

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition, il existe $y_0 \; < \cdots < \; y_N$ tels que

$$\sum_{j=1}^{N} | \, u(y_j) \; - \; u(y_{j-1}) \, | \; \geq \; VT(u) - \frac{\varepsilon}{2}$$

Comme u est continue à gauche, il existe $\delta \in] \, 0 \, , \min_{j \in \{1, \cdots, N\}} (y_j - y_{j-1}) \, [$ tel que

$$\forall j \in \{0, \cdots, N\}, \; \forall x \in [y_j - \delta, y_j], \quad |u(x) - u(y_j)| \; \leq \; \frac{\varepsilon}{4N}$$

Soient alors $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $(x_i)_{i \in \{0, \cdots, n\}} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que:

$$a \; < \; y_0 - \delta \; < \; x_0 \; < \cdots < \; x_n \; < \; y_N \; < \; y_N + \delta \; < b$$

avec $x_i - x_{i-1} = h$, $i = 1, \cdots, n$.

On a

$$\int_a^b | \, u(x) \; - \; u(x-h) \, | \, dx \; \geq \; \int_{x_0}^{x_n} | \, u(x) \; - \; u(x-h) \, | \, dx \; = \; \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} | \, u(x) \; - \; u(x-h) \, | \, dx$$

$$= \; \int_0^h \sum_{i=1}^{n} | \, u(x_i - s) \; - \; u(x_{i-1} - s) \, | \, ds$$

Si on impose de plus

$$h \; \leq \; \frac{\delta}{3} \quad , \quad y_0 - h \; < \; x_0 \; \leq y_0 \quad , \quad \text{et} \;\; n \; = \; \left[\frac{y_n - y_0}{h} \right]$$

alors, $\forall s \in [0, h]$:

$$y_0 - \delta \; < \; y_0 - 2h \; < \; x_0 - s \; \leq \; y_0$$

et:

$$y_0 - \delta \; < \; y_0 - 3h \; < \; x_n - s = x_0 + nh - s \; \leq \; y_N$$

Il existe donc $i_0 \; < \; i_1 \; < \cdots \; < i_{N-1} \; < i_N$ tels que $\forall j \in \{0, \cdots, N\}$, $\forall s \in [0, h]$:

$$y_j - \delta \; < \; y_j - 3h \; < \; x_{i_j} - s \; \leq \; y_j$$

En effet, on vient de voir que $i_0 = 0$ et $i_N = n$ convenaient. Et, pour tout $j \in \{1, \cdots, N-1\}$, l'intervalle $[y_j - 2h, y_j]$ contient au moins un élément de la suite (x_i) puisque les x_i ne sont distants que de h.

On peut donc écrire $\forall s \in [0, h]$:

$$\sum_{i=1}^{n} |\, u(x_i - s) \; - \; u(x_{i-1} - s)\,| \; \geq \; \sum_{j=1}^{N} \left|\, u(x_{i_j} - s) \; - \; u(x_{i_{j-1}} - s)\,\right|$$

$$\geq \; \sum_{j=1}^{N} |\, u(y_j) \; - \; u(y_{j-1})\,| \; - \; \sum_{j=1}^{N} \left|\, u(x_{i_j} - s) \; - \; u(y_j)\,\right| \; - \; \sum_{j=1}^{N} \left|\, u(x_{i_{j-1}} - s) \; - \; u(y_{j-1})\,\right|$$

$$\geq \; \sum_{j=1}^{N} |\, u(y_j) \; - \; u(y_{j-1})\,| \; - \; \frac{\varepsilon}{2}$$

Finalement, on a obtenu:

$$\forall \varepsilon > 0 \, , \; \exists h_0 > 0 \; ; \; h \; < \; h_0 \Longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{u(x) \; - \; u(x-h)}{h} \right| dx \; \geq \; VT(u) \; - \varepsilon$$

On déduit un résultat même un peu plus fort que celui énoncé:

$$\sup_{h \neq 0} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{u(x+h) \; - \; u(x)}{h} \right| dx \; = \; \lim_{\substack{h \to 0 \\ \neq 0}} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{u(x+h) \; - \; u(x)}{h} \right| dx \; = \; VT(u)$$

■

En fait on a comme dans le corollaire 2 une équivalence:

Corollaire 3 *Soit* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, *mesurable, localement intégrable et continue à gauche. Alors* $u \in \widetilde{VB}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ *si et seulement si*

$$\sup_{h \neq 0} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{u(x+h) \; - \; u(x)}{h} \right| dx \; < \; +\infty$$

De plus, on a:

$$\sup_{h \neq 0} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{u(x+h) \; - \; u(x)}{h} \right| dx \; = \; VT(u)$$

Démonstration. La partie directe est donnée par le lemme 2. Réciproquement, si

$$\sup_{h \neq 0} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{u(x+h) \; - \; u(x)}{h} \right| dx \; < \; +\infty$$

on effectue, pour tout $\varepsilon > 0$, la même construction que dans la preuve du théorème 4, avec $y_0 < \cdots < y_N = y$ *quelconques*. Il existe alors $h_0 > 0$ ($= \frac{\delta}{3}$, qui dépend des y_j) tel que:

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{u(x) \; - \; u(x-h_0)}{h_0} \right| dx \; \geq \; \sum_{j=1}^{N} |\, u(y_j) \; - \; u(y_{j-1})\,| \; - \; \frac{\varepsilon}{2}$$

(ici le facteur $\frac{1}{2}$ n'apporte rien). On en déduit:

$$\sup_{h\neq 0} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{u(x+h) \,-\, u(x)}{h} \right| dx \;\geq\; \sum_{j=1}^{N} |\, u(y_j) \,-\, u(y_{j-1}) \,|$$

puis

$$\sup_{h\neq 0} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{u(x+h) \,-\, u(x)}{h} \right| dx \;\geq\; T_u(y) \;, \forall y \in \mathbb{R}$$

d'où $u \in \widetilde{VB}(\mathbb{R};\mathbb{C})$. ■

L'espace fonctionnel VB

Définition 2 *On munit l'espace vectoriel $VB(\mathbb{R})$ indifféremment de la norme:*

$$N(u) \;:=\; VT(u) \,+\, |\, u(0) \,|$$

ou

$$||u|| \;:=\; VT(u) \,+\, \sup_{\mathbb{R}} \,|\, u \,|$$

Proposition 3 *Les normes N et $||\cdot||$ sont équivalentes. L'espace vectoriel ainsi normé $VB(\mathbb{R})$ est un espace de Banach.*

La preuve (élémentaire) de cette proposition est laissée au lecteur.

Cet espace est évidemment de dimension infinie, ce qui pose problème pour obtenir un critère de compacité. Toutefois, on a le

Théorème 5 (Helly) *L'image dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ de tout ensemble borné de $VB(\mathbb{R})$ est relativement compacte, c'est-à-dire que:*
pour toute suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ bornée dans $VB(\mathbb{R})$, il existe une sous-suite $(u_{\varepsilon'})$ et $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tels que

$$\lim_{\varepsilon' \xrightarrow{>} 0} ||u_{\varepsilon'} - u||_{L^1(I)} \;=\; 0 \;, \;\; \textit{pour tout intervalle borné } I.$$

Démonstration. C'est une application immédiate du théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov (voir Brézis). En effet, si $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $VB(\mathbb{R})$ alors il existe $M > 0$ tel que $|u_\varepsilon| \leq M$, pour tout $\varepsilon > 0$. Donc, pour tout intervalle borné I, $(u_{\varepsilon|I})_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^1(I)$. Et, d'après le lemme 2, pour tout $h \in \mathbb{R}$:

$$\int_I |\, u_\varepsilon(x+h) \,-\, u_\varepsilon(x) \,|\, dx \;\leq\; VT(u_\varepsilon)\, |h| \;\leq\; C\, |h|$$

avec C indépendant de ε par hypothèse. Donc les hypothèses du théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov sont satisfaites. Par suite, à chaque intervalle I borné on peut associer une sous-suite convergente. Comme $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles bornés, le procédé diagonal permet d'extraire une sous-suite indépendante de I, convergente dans $L^1(I)$ quel que soit I. ■

Remarque 6 *Au besoin, on pourrait extraire une nouvelle sous-suite afin que la convergence ait lieu presque partout.*

En pratique, on peut avoir besoin d'un critère de compacité pour des fonctions dépendant d'une autre variable t.

Théorème 6 *Soit* $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *bornée dans* $L^\infty(0,T;VB(\mathbb{R}))$. *On suppose de plus qu'il existe* $K > 0$ *tel que*

$$(*) \quad \int_{\mathbb{R}} |\, v_\varepsilon(x,t) - v_\varepsilon(x,s)\,|\, dx \ \leq\ K\ (\,|t-s|\ +\ \varepsilon\,)\ ,\ \ \forall (t,s) \in [0,T]^2$$

Alors $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *admet une sous-suite convergente dans* $L^1_{loc}(\mathbb{R}\times]0,T[)$.

Démonstration. Comme pour le théorème de Helly, on commence par montrer que la suite des restrictions à $I\times]0,T[$, où I est un intervalle borné, admet une sous-suite convergente et on conclut grâce au procédé diagonal.

Soit donc I un intervalle borné. Le théorème de Helly et le procédé diagonal permettent d'extraire une sous-suite $(v_{\varepsilon'})_{\varepsilon'>0}$ telle que

$$\forall\, t \in Q :=]0,T[\cap\mathbb{Q}\,,\ \exists\, v(t)\ \in\ L^1(I)\ ;\ \lim_{\varepsilon' \overset{>}{\to} 0} ||v_{\varepsilon'}(t) - v(t)||_{L^1(I)}\ =\ 0$$

En passant à la limite on a donc

$$\int_I |\, v(x,t) - v(x,s)\,|\, dx\ \leq\ K\ |t-s|\ ,\ \ \forall (t,s) \in Q^2$$

Par suite v se prolonge, de façon unique, à $]0,T[$ en une fonction lipschitzienne à valeurs dans $L^1(I)$, encore notée v. Alors on a:

$$\forall\, t \in]0,T[\,,\ \lim_{\varepsilon' \overset{>}{\to} 0} ||v_{\varepsilon'}(t) - v(t)||_{L^1(I)}\ =\ 0$$

En effet, pour tout $\eta > 0$, pour tout $t \in]0,T[$, il existe $s \in Q$ tel que $2K|t-s| < \eta$. D'où:

$$||v_{\varepsilon'}(t) - v(t)||_{L^1(I)}\ \leq\ 2K|t-s|\ +\ K\,\varepsilon'\ +\ ||v_{\varepsilon'}(s) - v(s)||_{L^1(I)}\ \leq\ 3\eta$$

pour $\varepsilon' \leq \varepsilon'_0$ assez petit.

Grâce au théorème de convergence dominée on montre de plus que

$$\lim_{\varepsilon' \overset{>}{\to} 0} ||v_{\varepsilon'} - v||_{L^1(I\times]0,T[)}\ =\ 0$$

■

Remarque 7 *L'estimation en temps* $(*)$ *est évidemment essentielle. Le théorème est encore vrai si l'on remplace* ε *par un terme quelconque tendant vers 0 avec* ε.

Références

[1] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, 1987

[2] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Masson, 1987