Courbure discrète ponctuelle

Vincent Borrelli

October 5, 2007

Résumé. – Soient S une surface de l'espace euclidien $\mathbb{E}^3$ et M un ensemble de triangles euclidiens formant une approximation linéaire par morceaux de S autour d'un point $P \in S$, la *courbure discrète ponctuelle* $K_d(P)$ au sommet P de M est, par définition, le quotient du défaut angulaire par la somme des aires des triangles ayant P comme sommet. Un problème naturel est d'estimer la différence entre cette courbure discrète $K_d(S)$ et la courbure lisse $K(P)$ de S en P. Nous présentons dans cet article des résultats obtenus dans [4], [5], [15] et qui donnent des majorations de la différence $|K(P) - K_d(P)|$.

Abstract. – Let S be a surface of the Euclidean 3-space $\mathbb{E}^3$ and M be a set of triangles forming a piecewise linear approximation of S around a point $P \in S$, the *pointwise discrete curvature* $K_d(P)$ of M at the vertex P is defined to be the quotient of the angular defect by the sum of areas of triangles with P as vertex. A natural question is to ask for an estimate of the difference between this discrete curvature $K_d(P)$ and the smooth curvature $K(P)$ of S at P. We present here results from [4], [5], [15] which give majorations of the discrepancy $|K(P) - K_d(P)|$.

2000 Mathematics Subject Classification : 65D18, 53A05.
Keywords and phrases : Meshes, Curvatures, Approximations.

1 Introduction

En cherchant à définir un analogue de la courbure sur les variétés PL-plates, J. Cheeger, W. Müller et R. Schrader constatent que le problème est singulièrement différent selon que l'on désire obtenir des propriétés de convergence *ponctuelle* ou *en mesure* ([6], *cf.* [11] également). Ils montrent que les courbures discrètes "naturelles" d'une variété PL-plate M sont proches en mesure [1] des courbures usuelles d'une variété lisse X pourvu que M soit "proche" de X. Le comportement ponctuel des courbures discrètes est lui plus inattendu, leur limite dépend en effet de la suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et n'est pas

[1]La convergence en mesure signifie que si $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de variétés PL-plates qui "tend" vers $\mathcal{U} \subset X$, alors la moyenne des courbures discrètes en tous les sommets de M_k tend vers l'intégrale de la courbure correspondante sur $\mathcal{U}$.

en général égale à la courbure lisse de X au point correspondant. Mais, miraculeusement, les erreurs se compensent quand on fait une moyenne...

L'article de J. Cheeger, W. Müller et R. Schrader date de 1983 et on a aujourd'hui une compréhension quasi complète de la convergence en mesure des courbures discrètes vers leurs analogues lisses (*cf.* [10], [8] ou le livre [13] pour une vision exhaustive du sujet). En revanche une théorie aussi complète est loin d'être disponible pour la convergence ponctuelle, le problème principal étant le suivant :

Problème de la cohérence[2]. – *Définir une courbure discrète K_d sur les sommets des polyèdres (=sous-variétés PL-plates d'un espace euclidien $\mathbb{E}^m$) et déterminer des classes, les plus larges possibles, de suites de polyèdres $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, si une telle suite "approxime" une sous-variété $S \subset \mathbb{E}^m$ et si $P_n \in \mathcal{P}_n$ une est suite de sommets alors :*

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P \in S \quad \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} K_d(P_n) = K(P)$$

où $K(P)$ est une courbure lisse de S au point P.

Le problème est énoncé en toute dimension mais la plupart des travaux se limitent au cas déjà très riche de la dimension trois, autrement dit aux suites de polyèdres "approximant" une surface[3] de $\mathbb{E}^3$ (*cf.* l'introduction de [16] pour un aperçu des différentes approches).

Outre leur intérêt propre, les courbures discrètes interviennent dans une multitude de domaines où elles trouvent des applications directes : en géologie, en imagerie ou en reconstruction de surfaces par exemple. Le problème se pose alors sous une forme un peu différente, car l'utilisateur ne dispose *jamais* d'une suite de polyèdres. En général, ses données se résument en un unique polyèdre qui représente l'ensemble de ses mesures "physiques". Il n'y a pas non plus de surface lisse avec laquelle comparer la courbure discrète, ou plus exactement, la surface lisse fait nécessairement partie des inconnues du problème. En effet, dans le cas contraire, l'utilisateur aurait accès directement à la courbure lisse et n'aurait par conséquent nul besoin de l'estimer au moyen d'une courbure discrète. La question n'est donc plus de savoir si, à la limite, la courbure discrète converge vers la courbure lisse d'une surface mais plutôt :

Problème de l'effectivité[4]. – Quel sens donner à la courbure discrète

[2] Cette dénomination n'a rien d'"officielle", je l'appelle ainsi pour fixer les idées.

[3] Dans cet article le mot *surface* signifie une sous-variété lisse, complète, connexe de dimension de 2 de $\mathbb{E}^3$. Idem, *mutatis mutandis*, pour le mot *courbe*.

[4] Là encore, cette dénomination m'est personnelle.

$K_d(P)$ en un point P d'un polyèdre sachant que l'on ne connaît pas la surface lisse qu'il approxime ?

Une façon de répondre à cette question est de faire des hypothèses *a priori* sur la surface qui est approximée, c'est-à-dire en fait, de restreindre l'ensemble des surfaces que l'on s'autorise à considérer. Par exemple, on peut exiger que la surface soit "proche" du polyèdre et que ses courbures principales, ainsi que leurs dérivées, soient bornées par un nombre donné à l'avance. Un fois choisi un tel ensemble $\mathcal{G}$ de surfaces, répondre au problème de l'effectivité revient à établir une majoration

$$|K_d(P) - K(P)| \leq e(\mathcal{G})$$

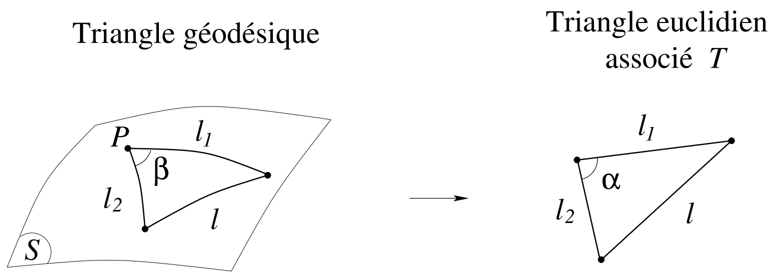
de la différence entre la courbure discrète $K_d(P)$ et la courbure lisse $K(P)$ de n'importe quelle surface $S \in \mathcal{G}$. Une telle majoration garantit à l'utilisateur qu'il commet une erreur d'au plus $e(\mathcal{G})$ quand il estime la courbure lisse au moyen de la courbure discrète.

On présente dans cet article les résultats obtenus récemment dans [15], [4], [5] et qui concernent essentiellement le problème de l'effectivité. On commence néanmoins par un paragraphe se rapportant à la question de la cohérence et qui met en place le matériel nécessaire au second paragraphe[5], qui lui, traite de la question de l'effectivité.

2 Le problème de la cohérence

2.1 Triangulations géodésiques

Etant donnés une surface lisse S de l'espace euclidien $\mathbb{E}^3$, un point $P \in S$ et un triangle géodésique $\mathcal{T} \subset S$ (pour la métrique induite) dont un des sommets est P, on associe à $\mathcal{T}$ un triangle euclidien T dont les arêtes ont les mêmes longueurs que celles de $\mathcal{T}$.



[5]En particulier, le premier paragraphe n'est pas un panorama du vaste champ des travaux consacrés à la courbure discrète ponctuelle.

Le défaut angulaire entre l'angle β en P de $\mathcal{T}$ et l'angle α de T au sommet correspondant donne une estimation de la courbure de Gauss $K(P)$ au point P, c'est la *formule de Legendre* :

$$\beta - \gamma = \frac{Aire(T)}{3} K(P) + O(l_{max}^3)$$

où l_{max} est le maximum des longueurs des arêtes de T. Si on se donne, non plus un seul triangle géodesique de S, mais une *n-triangulation géodésique M centrée en P* c'est-à-dire une triangulation d'un ouvert de S constituée de n-triangles géodésiques $(\mathcal{T}_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ de même sommet P, on peut par un usage répété de la formule de Legendre, faire disparaître les angles β_i dans le membre de gauche et obtenir la formule :

$$2\pi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} Aire(T_i)}{3} K(P) + O(l_{max}^3).$$

Ici bien sûr les α_i sont les angles correspondants sur les triangles euclidiens T_i associés aux $\mathcal{T}_i$ et l_{max} est le maximum des longueurs sur tous les T_i.

Définition. $-$ Soit M une triangulation, on appelle *épaisseur* de M le réel :

$$\Theta(M) = \inf_{T \in \{\text{ triangles de } M\}} \; \inf_{\gamma \in \{\text{ angles de } T\}} |\sin \gamma|.$$

Etant donnée une triangulation M, on note aussi $l(M)$ la longueur de M c'est-à-dire le maximum de la longueur de toutes les arêtes de M. Le résultat suivant fait partie du "folklore" de la théorie.

Théorème. $-$ *Soit $(\mathcal{M}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de n-triangulations géodésiques de S centrées en P et $(M_j)_{j\in\mathbb{N}}$ la suite euclidienne associée, si*

1. *il existe* $\Theta_0 > 0$ *tel que* $\forall j \in \mathbb{N}, \quad \Theta(M_j) \geq \Theta_0$,
2. $\lim_{j\to\infty} l(M_j) = 0$,

alors

$$\lim_{j\to\infty} \frac{2\pi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i}{Aire(M_j)} = \frac{1}{3} K(P).$$

2.2 Triangulations par corde

Définition. $-$ Un *n-maillage* M est la donnée d'un $(n+1)$-uplet $(P, P_1, \ldots, P_n)$ de points distincts de $\mathbb{E}^3$, sa réalisation géométrique $\overline{M}$ est la réunion des n triangles euclidiens $T_i = (P_i P P_{i+1})$.

Définition. – Soit M un n-maillage, si

1. $P \in S$ et $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $P_i \in S$,
2. la restriction $\pi_{|\overline{M}}$ de la projection orthogonale $\pi : \mathbb{E}^3 \to T_P S$ est un PL-isomorphisme sur son image,

on dit que M est une *approximation PL de S* ou encore que M est une *n-triangulation de S par corde*

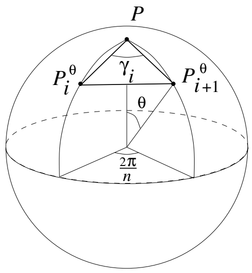
Si M est un n-maillage, on note γ_i l'angle au sommet P de T_i et $Aire(M)$ la somme des aires des triangles T_i. Le résultat précédent semble suggérer que le nombre

$$K_d(P, M) = 3\frac{2\pi - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i}{Aire(M)}$$

pourrait être un analogue discret convenable de la courbure de Gauss au point P. Il s'avère néanmoins que cette quantité a un mauvais comportement quand on passe à la limite, si $(M_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de n-triangulations par corde de S centrés en P dont l'épaisseur est minorée uniformément et dont la longueur tend vers zéro, alors en général, la suite des courbure discrètes $(K_d(P, M_j))_{j\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers la courbure de Gauss $K(P)$ de la surface au point P.

Un exemple de mauvais comportement. – La surface S est la sphère de rayon R, le point P est le pôle nord, la famille de n-triangulations ($n \geq 3$) par corde $(M_\theta)_{\theta\in]0,\frac{\pi}{2}]}$ est engendrée par le point P et les points

$$P_i^\theta = (R\sin\theta\cos\frac{2i\pi}{n}, R\sin\theta\sin\frac{2i\pi}{n}, R\cos\theta), \quad i \in \{1, ..., n\}.$$



On a

$$\lim_{\theta\to 0} \Theta(M_\theta) = \sin\frac{2\pi}{n} \quad \text{et} \quad \lim_{\theta\to 0} l(M_\theta) = 0$$

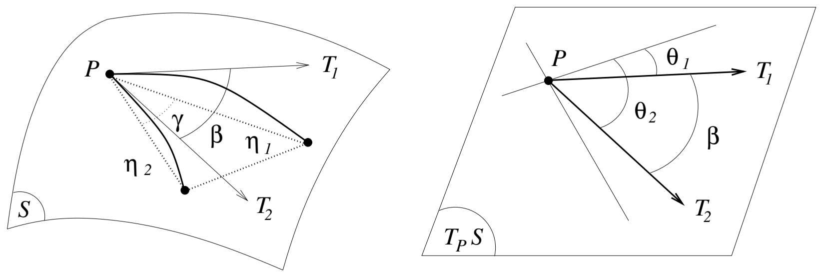
et un calcul direct montre que

$$\lim_{\theta\to 0} K_d(P, M_\theta) = \frac{3}{4\cos^2\frac{\pi}{n}}\frac{1}{R^2}.$$

Ainsi $\lim_{\theta \to 0} K_d(P, M_\theta) \neq K(P)$ sauf si $n = 6$.

Le lecteur intéressé trouvera des exemples de comportements inattendus de K_d dans [14] (*cf.* aussi [12] et le premier appendice de [6]).

La formule des cordes. – La raison du mauvais comportement de K_d provient du fait que l'analogue de la formule de Legendre pour une triangulation par corde fait intervenir des courbures extrinsèques.



Trois points P, P_1, P_2 étant donnés sur la surface, on note γ l'angle au sommet P du triangle euclidien P_1PP_2, N une normale à la surface en P, β l'angle entre les plans $\Pi_1 = Vect(PP_1, N)$ et $\Pi_2 = Vect(PP_2, N)$, T_i un vecteur non nul de $T_PS \cap \Pi_i$ et η_i la longueur euclidienne PP_i. Enfin on note k_i la courbure de S dans la direction T_i. On a (*cf.* [1] pour une démonstration) :

$$\beta - \gamma = \frac{1}{4 \sin \gamma} k_1 k_2 \eta_1 \eta_2 - \frac{1}{8} \cot \gamma (k_1^2 \eta_1^2 + k_2^2 \eta_2^2) + O(\eta_{max}^3)$$

où $\eta_{max} = \max\{\eta_1, \eta_2\}$. La formule d'Euler permet d'exprimer k_1 et k_2 en fonction des courbures principales k_M et k_m au point P :

$$k_i = k_M \cos^2 \theta_i + k_m \sin^2 \theta_i$$

où θ_i est l'angle entre la direction portée par T_i et la direction principale correspondant à k_M (on passe sous silence le cas très simplifié où P est un point ombilical de S). Au bilan on a donc :

$$\beta - \gamma = aK + bk_M^2 + ck_m^2 + O(\eta_{max}^3)$$

où les nombres a, b et c dépendent de la donnée du triangle P_1PP_2 mais aussi, *via* les angles θ_1 et θ_2, de *la position de ce triangle relativement à la surface.* Précisément, les quantités a, b et c sont des polynômes trigonométriques en les θ_1, θ_2 par exemple et pour fixer les idées :

$$a = \frac{1}{4 \sin \gamma} \left((c_1^2 s_1^2 + c_2^2 s_1^2) \eta_1 \eta_2 - \cos \gamma \; c_1^2 s_1^2 \eta_1^2 - \cos \gamma \; c_2^2 s_2^2 \eta_2^2 \right)$$

où on a noté $c_i = \cos\theta_i$, $s_i = \sin\theta_i$, $i \in \{1,2\}$. Dans le cas d'une n-triangulation M, en itérant la formule des cordes, on obtient donc :

$$2\pi - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i = AK + Bk_M^2 + Ck_m^2 + O(\eta_{max}^3) \quad (1)$$

avec (notations évidentes) $A = \sum_{i=1}^n a_i$, $B = \sum_{i=1}^n b_i$ et $C = \sum_{i=1}^n c_i$. Bien entendu les quantités A, B et C dépendent de M mais aussi des angles θ_1, ..., θ_n, ce qui ruine tout espoir de définir en général des invariants discrets partir de la relation (1). Néanmoins, il existe des classes de n-triangulations assez larges pour lesquelles un effet de moyenne joue : les sommes $\sum_{i=1}^n a_i$ $\sum_{i=1}^n b_i$ et $C = \sum_{i=1}^n c_i$ sont indépendantes, à l'ordre qui nous intéresse, des angles θ_1, ...,θ_n.

2.3 Les n-maillages réguliers

Définition. – Un n-maillage $M \subset \mathbb{E}^3$ est dit *régulier* si :

1. les longueurs PP_i sont toutes égales entre elles.
2. les angles $\gamma_i = \angle(P_iPP_{i+1})$ sont tous égaux entre eux.

Il est montré dans [3] le résultat suivant :

Théorème. – *Soient M un n-maillage régulier ($n \geq 3, n \neq 4$) et S une surface lisse de $\mathbb{E}^3$. Si M est une approximation PL de S en P alors*

$$\frac{2\pi - \sum_{i=1}^n \gamma_i}{Aire(M)} = \frac{1}{8\sin^2\frac{2\pi}{n}}\left(P_1(\frac{2\pi}{n})K(P) + P_2(\frac{2\pi}{n})(k_m^2(P) + k_M^2(P))\right) + O(\eta)$$

où η est la longueur commune des PP_i et où

$$P_1(\alpha) = -2\cos^2\alpha - \cos\alpha + 3, \quad P_2(\alpha) = \cos^2\alpha - \frac{3}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}.$$

En d'autres termes, pour les n-maillages réguliers, $n \neq 4$, les quantités A, B et C ne dépendent que du n-maillage et non de sa position par rapport à la surface. Si $n = 4$, ce n'est plus vrai, les quantités dépendent de l'angle que fait le 4-maillage avec une direction principale. Plus précisément, si le 4-maillage est une approximation PL de la surface et si on a noté φ l'angle formé par la droite $\pi(PP_1)$ et la direction principale associée à la courbure $k_M(P)$, on a alors le résultat suivant :

Théorème [3]. − *Soit M un 4-maillage régulier qui est une approximation PL de $S \subset \mathbb{E}^3$ alors*

$$\frac{2\pi - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i}{Aire(M)} = 2(K(P) + \tau_g^2(\varphi)) + O(\eta)$$

où

$$\tau_g(\varphi) = (k_M(P) - k_m(P)) \sin\varphi \cos\varphi$$

est la torsion géodésique en P dans la direction donnée par φ.

La raison de ce comportement particulier pour cette valeur de n est due à la coïncidence entre le degré (=4) des polynômes trigonométriques a_i, b_i et c_i et le nombre de triangles d'un 4-maillage. Cette particularité permet d'obtenir une information (partielle) sur les directions principales. De façon plus étrange la valeur de $n = 6$ joue elle aussi un rôle particulier, c'est en effet la seule valeur de n pour laquelle la quantité $\frac{3}{Aire(M)}(AK + Bk_M + Ck_m) + O(\eta)$ se réduit à la formule de Legendre :

Corollaire [3]. − *Soit M un 6-maillage régulier qui est une approximation PL de S en P alors*

$$\frac{2\pi - \sum_{i=1}^{6} \gamma_i}{Aire(M)} = \frac{1}{3} K(P) + O(\eta).$$

Notons enfin que si M_1, M_2 sont deux maillages réguliers centrés en $P \in S$ et tels que :

1. $n_1 \neq n_2$, $n_1, n_2 \geq 3$ et $n_1, n_2 \neq 4$,
2. M_1 et M_2 sont des approximations PL de S,

alors les courbures discrètes $K_d(P, M_1)$ et $K_d(P, M_2)$ permettent, au moyen de la formule du théorème, d'estimer les courbures $k_M(P)$ et $k_m(P)$.

2.4 Les n-maillages paramétrés

Définition. − On dit que (M, f) est un *n-maillage paramétré* de S s'il existe un plongement lisse

$$f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$$

d'un ouvert $\mathcal{U}$ dans S qui envoie un polygone régulier à n sommets $\mathcal{P} = \{p_1, ..., p_n\}$ et de centre $p \in \mathcal{U}$ sur le n-maillage $M = (P, P_1, ..., P_n)$ i. e. $f(p) = P$ et $f(p_i) = P_i$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. On dit que le n-maillage paramétré est *régulier* si de plus f est conforme en p.

Remarque. $-$ Etant donné un n-maillage $M \subset S$ il est facile de construire un plongement lisse $f : \mathcal{U} \longrightarrow S$ qui envoie un polygone régulier à n sommets sur M.

L'intérêt des n-maillages est qu'il y a une façon naturelle de les "rétrécir". Soit $h_{p,\rho}$ l'homothétie de centre p et de rapport ρ, on pose

$$\rho_{max} = \sup \{\rho \in]0,1] \mid h_{p,\rho}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{U}\}$$

qui est bien défini car $\mathcal{U}$ est ouvert (en particulier, $\rho_{max} = 1$ si $\mathcal{U}$ est convexe). On associe alors à tout n-maillage paramétré (M, f) la famille de n-maillages $(M_\rho)_{\rho \in]0,\rho_{max}[}$ définie par

$$M_\rho = f \circ h_{p,\rho}(\mathcal{P}),$$

c'est-à-dire $M_\rho = (P, P_1^\rho, ..., P_n^\rho)$ avec $P_i^\rho = f(p + \rho\, pp_i)$, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$.

Théorème [5]. $-$ *Soit (M, f) un n-maillage paramétré régulier ($n \neq 4$, $n > 2$) qui est une approximation PL de S en P et $(M_\rho)_{\rho \in]0,\rho_{max}[}$ la famille de n-maillages associés alors :*

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{2\pi - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(\rho)}{Aire(M_\rho)} = \frac{1}{8 \sin^2(\frac{2\pi}{n})} \left(P_1(\frac{2\pi}{n}) K(P) + P_2(\frac{2\pi}{n})(k_m^2(P) + k_M^2(P)) \right)$$

où $\gamma_i(\rho) = \angle(P_i^\rho P P_{i+1}^\rho)$. En particulier si $n = 6$, on a :

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{2\pi - \sum_{i=1}^{6} \gamma_i(\rho)}{Aire(M_\rho)} = \frac{1}{3} K(P).$$

Remarque. $-$ En fait, dans le cas $n = 6$ les hypothèses de ce théorème peuvent être affaiblies, *cf.* [2], [16].

3 Problème de l'effectivité

3.1 Les courbes

Il n'y a pas pour les courbes de problème de cohérence. Si Γ est une courbe de $\mathbb{E}^2$ et $P_1, P, P_2 \in \Gamma$ trois sommets consécutifs d'une ligne polygonale L, la courbure discrète en P de L est le nombre

$$k_d(P, L) = \frac{\pi - \gamma}{\overline{\eta}}$$

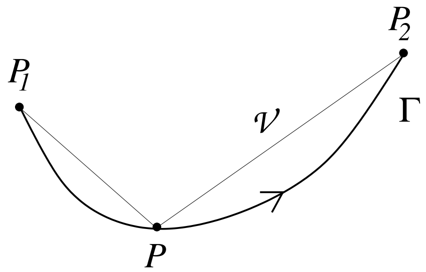
où γ est l'angle $\angle(P_1 P P_2)$ et où $\overline{\eta} = \overline{\eta}(P, L)$ est la moyenne $(\eta_1 + \eta_2)/2$ des distances euclidiennes de P à P_1 et de P à P_2. Il est bien connu (*cf.* [9])

que si $(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de lignes polygonales qui approximent Γ, telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P \in L_k$ et $\lim_{k\to\infty} \overline{\eta}(P, L_k) = 0$ alors :

$$\lim_{k\to\infty} k_d(P, L_k) = k(P),$$

où $k(P)$ est la courbure principale de Γ en P. Le résultat principal de [4] (qui est une partie de la thèse [15]) est une majoration de l'erreur $|k(P)-k_d(P,L)|$ en fonction d'invariants géométriques de L et de Γ.

D éfinition. – On appelle *ligne en V* tout triplet $V = (P, P_1, P_2)$ de $(\mathbb{E}^2)^3$. La *réalisation géométrique* $\mathcal{V}$ de V est la ligne polygonale formée des segments PP_1 et PP_2. On dit que $\Gamma \subset \mathbb{E}^2$ *s'appuie sur* V si Γ est une courbe compacte orientée telle que $\partial\Gamma = -\{P_1\} \cup \{P_2\}$ et $P \in \Gamma \setminus \partial\Gamma$.



Théorème. – *Soient* $V = (P, P_1, P_2)$ *une ligne en* V *et* Γ *une courbe s'appuyant sur* V*, on a :*

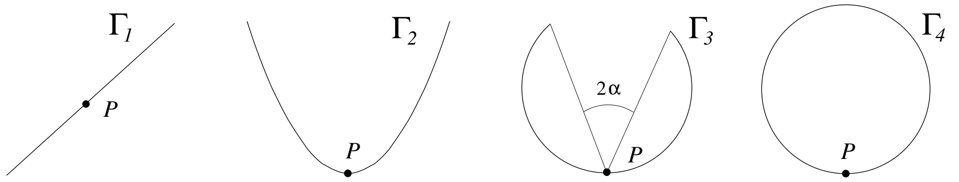
$$|k(P) - k_d(P, V)| \leq 2\Omega_\Gamma(P)^3 \left(\frac{k_{max}^3}{8}\eta_{max} + \frac{k'_{max}}{3}\Omega_\Gamma(P) \right) \eta_{max}.$$

On a noté $\eta_{max} = \max\{\eta_1, \eta_2\}$, $k_{max} = \sup_{Q\in\Gamma} |k(Q)|$, $k'_{max} = \sup_{Q\in\Gamma} |\frac{d}{ds}k(Q)|$, où s est la longueur d'arc. Le cœfficient $\Omega_\Gamma(P)$ est un invariant géométrique de Γ que nous allons décrire maintenant.

Définition. – Soit P, Q deux points distincts de Γ, on note $\alpha_P(Q) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ l'angle entre la droite (PQ) et la tangente $T_Q\Gamma$. On appelle *facteur de retour* de Γ en P le nombre

$$\Omega_\Gamma(P) = \sup_{Q\in\Gamma} \frac{1}{\cos \alpha_P(Q)} \in [1, +\infty].$$

Les illustrations ci-dessous donnent le facteur de retour $\Omega_\Gamma(P)$ de quelques courbes.



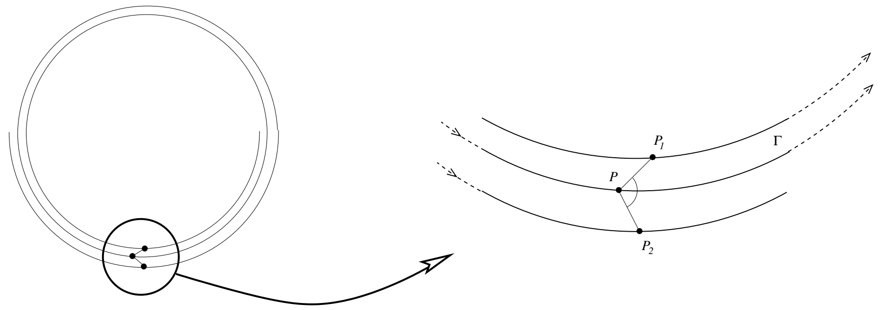
Droite	*Parabole*	*Arc de cercle*	*Cercle*
$\Omega_{\Gamma_1}(P) = 1$	$\Omega_{\Gamma_2}(P) = \frac{3}{\sqrt{8}}$	$\Omega_{\Gamma_3}(P) = \sqrt{2}$	$\Omega_{\Gamma_4}(P) = \infty.$

L'exemple de l'arc de cercle montre que $\Omega_\Gamma(P)$ peut être fini même si Γ n'est pas un graphe au dessus de sa tangente en P. Notons aussi que pour toute courbe Γ, et pour tout $P \in \Gamma$, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de P dans $\mathbb{E}^2$ tel que $\Omega_{\Gamma \cap \mathcal{U}}(P)$ soit fini. En particulier le théorème ci-dessus est aussi un théorème de convergence : si $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de lignes en V avec, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P \in V_k$ alors le terme d'erreur

$$e(\Gamma, V_k) = 2\Omega_\Gamma(P)^3 \left(\frac{k_{max}^3}{8} \eta_{max}(P, V_k) + \frac{k'_{max}}{3} \Omega_\Gamma(P) \right) \eta_{max}(P, V_k)$$

tend vers zéro si $\lim_{k \to \infty} \eta_{max}(P, V_k) = 0$.

Le terme d'erreur $e(\Gamma, V)$ dépend de trois invariants géométriques de la courbe : les quantités k_{max} et k'_{max}, dont la présence est attendue, mais aussi du nombre $\Omega_\Gamma(P)$ dont on peut se demander si il ne serait pas redondant. L'exemple ci-dessous montre que la seule donnée de k_{max} et de k'_{max} est insuffisante pour majorer de façon non triviale la différence $|k(P) - k_d(P, V)|$.



La courbe choisie est une spirale dont le rayon de courbure en tout point est grand comparée à η_{max},, ce rayon varie lentement de façon à ce que k'_{max} soit petit relativement à $1/\eta_{max}$. Le facteur de retour $\Omega_\Gamma(P)$ au point P de la figure est infini. La ligne polygonale quant à elle a une courbure discrète $k_d(P)$ en P qui est de l'ordre de grandeur de $1/\eta_{max}$. Par conséquent l'erreur $|k(P) - k_d(P)|$ est approximativement $|k_d(P)|$, c'est-à-dire en $1/\eta_{max}$.

Le *Length Theorem* de [7] donne une majoration de la différence des longueurs de deux courbes en fonction de leur distance de Fréchet et de leur courbure totale. Le théorème d'effectivité ci-dessus peut être vu comme une sorte d'analogue du *Length Theorem* mais pour la courbure (le facteur de retour permet avec k_{max} et η_{max} de contrôler la distance de Hausdorff entre la ligne en V et de Γ, *cf.* [4] pour les détails).

Soient K, K' et Ω trois réels positifs, on note

$$\mathcal{G}_{K,K',\Omega}(V) = \{\Gamma \subset \mathbb{R}^2 \mid \Gamma \text{ s'appuie sur } V,\ k_{max}(\Gamma) \leq K, \\ k'_{max}(\Gamma) \leq K',\ \Omega_\Gamma(P) \leq \Omega\}$$

et

$$e(\mathcal{G}_{K,K',\Omega}(V)) = 2\Omega^3 \left(\frac{K^3}{8} \eta_{max}(P,V) + \frac{K'}{3}\Omega \right) \eta_{max}(P,V).$$

Si l'on revient au point de vue de l'introduction, à savoir que seule la ligne polygonale est connue précisément alors que l'on ne s'autorise que des estimées *a priori* sur la courbe, le théorème peut se reformuler en disant que quel que soit la courbe $\Gamma \in \mathcal{G}_{K,K',\Omega}(V)$ l'erreur commise en remplaçant la courbure lisse en P par la courbure discrète est majorée par $e(\mathcal{G}_{K,K',\Omega}(V))$.

3.2 Les surfaces

On présente dans ce paragraphe les résultats de [5] (qui est une autre partie de la thèse [15]).

Définition. – Soit S une surface de $\mathbb{E}^3$ et P un point de S. Si pour tout plan Π passant par P et contenant une normale de S en P l'intersection $\Gamma = \Pi \cap S$ est une courbe, on définit *le facteur de retour* de S au point P par

$$\Omega_S(P) = \sup_{\Pi} \Omega_{S\cap\Pi}(P).$$

Si M est un n-maillage qui est une approximation PL de S, alors la surface $S' = \exp_P \circ \pi(\overline{M}) \subset S$ vérifie la condition de la définition et bien sûr, M reste une approximation PL pour S'. Par conséquent, quitte à restreindre S à S', on peut toujours supposer que le facteur de retour est bien défini.

Si $P \in S \subset \mathbb{E}^3$ et $n > 2$, on pose, afin d'alléger un peu les formules :

$$K(n,P) = \frac{3}{8\sin^2\frac{2\pi}{n}} \left(P_1(\frac{2\pi}{n})K(P) + P_2(\frac{2\pi}{n})(k_m^2(P) + k_M^2(P)) \right)$$

où P_1 et P_2 sont les polynômes trigonométriques introduits au §2.3. Il s'avère qu'un petit nombre de quantités permet de majorer l'erreur entre la courbure discrète $K_d(P)$ au point P de M et la courbure $K(n, P)$ de la surface. Dans cette majoration les trois nombres suivants :

$$\Delta = \frac{\max_{i \in \{1,...,n\}} \left| PP_{i+1} + PP_{i-1} - 2\cos(\frac{2\pi}{n}) PP_i \right|}{\eta_{max}^2},$$

$$\Lambda = \frac{\eta_{max} - \eta_{min}}{\eta_{\max}^2},$$

et

$$\sigma = \frac{\eta_{max}}{\eta_{min}},$$

qui ne dépendent que du n-maillage, jouent un rôle fondamental. On a bien sûr noté η_{min} (resp. η_{max}) le minimum (resp. le maximum) des distances euclidiennes PP_i où $i \in \{1, ..., n\}$.

Théorème. – *Soit M un n-maillage ($n \neq 4, n > 2$) qui est une approximation PL d'une surface $S \subset \mathbb{E}^3$. Si $k_{max}\eta_{max}\Omega_\Sigma(P) < \pi$ alors*

$$|K(n, P) - K_d(P)| \leq N(M, S)\eta_{max}$$

où $N(M, S)$ ne dépend que du 1-jet de la courbure de S, du facteur de retour $\Omega_\Sigma(P)$ et des données Θ, Δ, Λ, η_{max}, n et σ du n-maillage.

La formule explicite pour $N(M, S)$ est trop longue pour pouvoir figurer dans ces pages, elle est décrite complètement dans [5] et dans [15]. Un résultat analogue vaut pour $n = 4$ et dans le cas $n = 6$ le théorème donne une majoration de l'erreur entre la courbure de Gauss et la courbure discrète.

Il est tentant de vouloir transformer ce théorème en un résultat de convergence. On note

$$e(M, S) = N(M, S)\eta_{max}$$

la majoration de l'erreur et $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de n-maillages centrés en P. On suppose en outre que les M_k vérifient les hypothèses du théorème et que de plus $\lim_{k\to+\infty} \eta_{max}(M_k) = 0$. Il est alors évident qu'il suffit de majorer uniformément les $N_k = N(M_k, S)$ pour obtenir une erreur asymptotiquement nulle. La formulation explicite des N_k montre qu'il suffit pour cela de minorer uniformément les épaisseurs :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \Theta(M_k) \geq \Theta_0 > 0$$

et de majorer uniformément les nombres $\Delta(M_k)$, $\Lambda(M_k)$ et $\sigma(M_k)$.

Corollaire. – *Soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de n-maillages ($n \neq 4, n > 2$) centrés en P et telle que :*

i) $\lim_{k\to+\infty} \eta_{max}(M_k) = 0$,

ii) chaque M_k est une approximation PL d'une surface $S \subset \mathbb{E}^3$.

Si il existe des réels Θ_0, σ_0, Δ_0, et Λ_0 tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \Theta(M_k) \geq \Theta_0 > 0, \quad \sigma(M_k) \leq \sigma_0, \quad \Delta(M_k) \leq \Delta_0, \quad \Lambda(M_k) \leq \Lambda_0,$$

alors

$$\lim_{k\to+\infty} K_d(P, M_k) = K(n, P)$$

où $K_d(P, M_k)$ est la courbure discrète de M_k au sommet P.

La condition sur l'épaisseur signifie que les angles des triangles ne doivent pas dégénérer, la condition sur σ demande simplement que $\eta_{max} = O(\eta_{min})$, les conditions sur Δ et Λ sont plus exigentes. En effet, à supposer que $\eta_{max} = O(\eta_{min})$, les nombres Δ et Λ sont *a priori* des $O(\eta_{max}^{-1})$. Si η_{max} tend vers zéro, ils ne sont donc pas, en général, bornées. Pour pouvoir majorer uniformément les Δ et les Λ, il faut donc que la suite de n-maillages soit telle que les numérateurs de ces quantités soient des $O(\eta_{max}^2)$. C'est précisément ce qui se passe avec les n-maillages paramétrés.

Théorème. – *Soit M un n-maillage qui est une approximation PL d'une surface $S \subset \mathbb{E}^3$ et $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ une paramétrisation telle que (M, f) soit un n-maillage paramétré. La famille $M_\rho = f \circ h_{p,\rho}(\mathcal{P})$, $0 < \rho < \rho_{max}$, de n-maillage paramétrés vérifie alors*

$$\begin{aligned} \sigma(M_\rho) &\leq \|df\| \|d(f^{-1})\| \\ \Delta(M_\rho) &\leq 2\|d(f^{-1})\|^2 \|d^2 f\|. \end{aligned}$$

Si de plus (M, f) est un n-maillage paramétré régulier alors

$$\Lambda(M_\rho) \leq \|d^2 f\| \|d(f^{-1})\|^2$$

où $\|df\| = \sup_{u\in\mathcal{U}} \|df_u\|$, $\|d(f^{-1})\| = \sup_{m\in f(\mathcal{U})} \|d(f^{-1})_m\|$ et $\|d^2 f\| = \sup_{u\in\mathcal{U}} \|d^2 f_u\|$.

Un corollaire de ces majorations est le théorème de convergence énoncé au §2.4.

References

[1] E. Boix, *Approximation linéaire des surfaces de $\mathbb{R}^3$ et applications*, Thèse de l'Ecole Polytechnique, 1995.

[2] V. Borrelli, *Courbures Discrètes*, Mémoire de DEA de l'université Lyon I, 1992/1993.

[3] V. Borrelli, F. Cazals, J.-M. Morvan, *On the angular defect of triangulations and the pointwise approximation of curvatures*, Comp. Aided Geom. Design 20 (2003), 319-341.

[4] V. Borrelli, F. Orgeret, *Error term in pointwise approximation of the curvature of a curve*, Preprint.

[5] V. Borrelli, F. Orgeret, *Curvatures of meshes and surfaces*, Preprint.

[6] J. Cheeger, W. Müller, R. Schrader , *On the Curvature of Piecewise Flat Space*, Communication in Math. Phys., 92 (1983), 405-454.

[7] D. Cohen-Steiner, H. Edelsbrunner, *Inequalities for the Curvature of Curves and Surfaces*, Proc. 20st Ann. Sympos. on Comput. Geom. 2005, 272-277.

[8] D. Cohen-Steiner,J.-M. Morvan, *Second fundamental measure of geometric sets and local approximation of curvatures*, J. Differential Geom. 74 (2006), 363–394.

[9] I. Fáry, *Sur la courbure totale d'une courbe gauche faisant un noeud*, Bull. Soc. Math. France 77 (1949), 128-138.

[10] J. Fu, *Convergence of curvatures in secant approximations*, Journ. of Diff. Geom. 37 (1993), 177-190.

[11] J. Lafontaine, *Mesures de courbure des varietes lisses et des polyèdres*, Séminaire Bourbaki, 28 (1985-1986), Exposé No. 664, Astérisque No. 145-146 (1987), 241–256.

[12] D. Meek, D. Walton, *On surface normal end Gaussian curvature approximations given data sampled from smooth surface*, Comp. Aided Geom. Design 17, 521-543.

[13] J. -M. Morvan, *Generalized Curvatures*, A paraître chez Springer Verlag.

[14] J. -M. Morvan, B. Thibert, *Unfolding of surfaces*, Discrete Comput. Geom. 36 (2006), 393-418.

[15] F. Orgeret, *Sur l'approximation discrète des courbures des courbes planes et des surfaces lisses de l'espace euclidien de dimension 3*, Thèse de l'université de Lyon, 2007.

[16] G. Xu, *Convergence analysis of a discretization scheme for Gaussian curvature over triangular surfaces*, Comp. Aided Geom. Design 23 (2006), 193-207.

V. Borrelli
Institut Camille Jordan, Université de Lyon
43, boulevard du 11 Novembre 1918
69622 Villeurbanne Cedex, France
email : borrelli@math.univ-lyon1.fr