Université Claude Bernard Lyon 1 **PCSI L1 - UE Math 2**

Corrigé de l'examen terminal 1 – Lundi 5 mai 2025

Règlement – Une feuille recto-verso manuscrite de notes est autorisée ainsi que la feuille formulaire *Repères mobiles et champs vectoriels*. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Le barème des exercices est indiqué entre crochets. Les **réponses doivent être justifiées**.

Exercice 1 [11 pts] – Soient $0 < \alpha < 1$ et f la fonction définie par $f(x,y) = x^2 - 2xy + \alpha y^3$.

1) [1 pt] Montrer que le point $A = (1+\sqrt{1-\alpha}, 1)$ appartient à $L_0(f)$, la ligne de niveau 0 de f.
2) [1 pt] Les points $B = (\sqrt{\alpha}, 0)$ et $C = (0,1)$ appartiennent-ils à une même ligne de niveau de f ?
3) [2 pts] On se place au point $D = (\alpha, 1)$. Laquelle des deux directions $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ donne une pente croissante en D ?
4) [1 pt] Montrer que f possède deux points critiques dont on déterminera les coordonnées en fonction de α.
5) [1.5 pt] Déterminer la nature de chaque point critique.
6) [1.5 pt] Écrire le développement de Taylor à l'ordre 2 de f au point $(0,0)$
7) [1 pt] On considère la fonction g définie par $g(x,y) = f^2(x,y)$. Calculer les dérivées partielles

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$$

en fonction de f et de ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
8) [0.5 pt] Déduire de la question 7 que

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, g(x,y) = 2f(x,y) \times \overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y).$$

9) [0.5 pt] Montrer que les deux points critiques de f sont aussi deux points critiques de g.
10) [1 pt] À votre avis, l'affirmation suivante est-elle vraie : "Tous les points de la ligne $L_0(f)$ de niveau 0 de f sont des points critiques de g." Justifier votre réponse.

Rép.– 1) On a

$$\begin{aligned} f(A) &= (1+\sqrt{1-\alpha})^2 - 2(1+\sqrt{1-\alpha}) \times 1 + \alpha \times (1)^3 \\ &= 1 + (1-\alpha) + 2\sqrt{1-\alpha} - 2 - 2\sqrt{1-\alpha} + \alpha \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi $A \in L_0(f)$.
2) On calcule $f(B) = f(\sqrt{\alpha}, 0) = \alpha$ et $f(C) = \alpha$ donc B et C appartiennent à une même ligne de niveau, $L_\alpha(f)$.
3) Le calcul du gradient de f donne

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y) = 2(x-y)\vec{\imath} + (3\alpha y^2 - 2x)\vec{\jmath}.$$

Au point $D = (\alpha, 1)$ on a donc

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(\alpha,1) = 2(\alpha-1)\vec{\imath} + (3\alpha - 2\alpha)\vec{\jmath} = -2(1-\alpha)\vec{\imath} + \alpha\vec{\jmath}$$

Ainsi, puisque $0 < \alpha < 1$,

$$\langle \overrightarrow{\text{grad}}\, f(\alpha,1), \vec{\imath} \rangle = -2(1-\alpha) < 0$$

et

$$\langle \overrightarrow{\text{grad}}\, f(\alpha,1), \vec{\jmath} \rangle = \alpha > 0.$$

La pente croissante est donnée par $\vec{\jmath}$.
4) On a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &=& 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &=& 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2(x-y) &=& 0 \\ -2x + 3\alpha y^2 &=& 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y &=& x \\ x(3\alpha x - 2) &=& 0 \end{array} \right.$$

Par conséquent f admet deux points critiques : $(0,0)$ et $(\frac{2}{3\alpha}, \frac{2}{3\alpha})$.
5) On a

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6\alpha y \end{pmatrix} \text{ d'où } H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } H_f(\frac{2}{3\alpha}, \frac{2}{3\alpha}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

- $det\, H_f(0,0) = -4$ donc $(0,0)$ est un point col
- $det\, H_f(\frac{2}{3\alpha}, \frac{2}{3\alpha}) = 4 > 0$ et $tr\ H_f(\frac{2}{3\alpha}, \frac{2}{3\alpha}) = 6 > 0$ donc $(\frac{2}{3\alpha}, \frac{2}{3\alpha})$ est un minimum local.

6) On peut remarquer que f est polynomiale ou s'appuyer sur les calculs des questions précédentes pour obtenir que

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + o(x^2+y^2).$$

7) On a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(f^2(x,y)) = 2f(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

et similairement

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(f^2(x,y)) = 2f(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

8) On déduit immédiatement que

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, g(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\vec{\imath} + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\vec{\jmath} = 2f(x,y)\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\vec{\jmath}\right) = 2f(x,y) \times \overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y).$$

9) Si (x_0,y_0) est point critique de f alors $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0,y_0) = \overrightarrow{0}$ et donc

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, g(x_0,y_0) = f(x_0,y_0)\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0,y_0) = f(x_0,y_0) \times \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}.$$

Ainsi (x_0,y_0) est point critique de g.
10) Si $(x_0,y_0) \in L_0(f)$ alors $f(x_0,y_0) = 0$ et donc

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, g(x_0,y_0) = f(x_0,y_0)\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0,y_0) = 0 \times \overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0,y_0) = \overrightarrow{0}.$$

Tous les points de la ligne de niveau 0 de f sont donc des points critiques de g.

Exercice 2 [10 pts] – Dans le plan (Oxy), on considère la demi-couronne

$$C = \{(x,y) \mid \frac{1}{2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 1, 0 \leq y\}.$$

1) [1 pt] Écrire l'ensemble C en coordonnées polaires.
2) [1 pt] Dessiner l'ensemble C en faisant apparaître les axes de coordonnées.
3) [0.5 pt] Que représente l'intégrale double

$$A = \iint_C dxdy \quad ?$$

4) [1 pt] Calculer la valeur de A.
5) [1 pt] On considère dans $\mathbb{R}^3$ le solide semi-cylindrique

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid \frac{1}{2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 1,\ 0 \leq y,\ 0 \leq z \leq 1\}.$$

Faire un dessin soigné faisant de Ω faisant apparaître les axes de coordonnées.
6) [0.5 pt] Écrire en coordonnées cylindriques l'ensemble Ω.
7) [1 pt] Déterminer le volume V de Ω.
8) [1.5 pt] On suppose que la densité de masse est donnée par

$$\mu(x,y,z) = e^z.$$

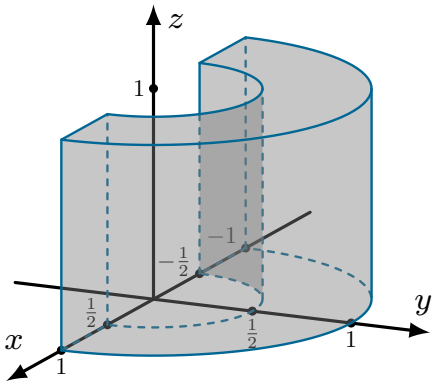
Trouver la masse totale M de Ω.

9) [2.5 pts] On note $G(x_G, y_G, z_G)$ le barycentre de Ω.
a) Dire pourquoi $x_G = 0$.
b) Déterminer z_G (*Indication* : le calcul nécessite une intégration par parties).
c) À votre avis, a-t-on $y_G = 0$? Justifier.

Rép.– 1) En coordonnées polaires, la demi-couronne s'écrit

$$C = \{(\rho, \varphi) \mid \frac{1}{2} \leq \rho \leq 1, 0 \leq \rho\cos\varphi\} = \{(\rho, \varphi) \mid \frac{1}{2} \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$$

2)



Representation de Ω dans $\mathbb{R}^3$, la coupe avec le plan $z = 0$ donne la demi-couronne C.

3) L'integrale A représente l'aire de la demi-couronne.
4) En passant en coordonnées polaires on trouve

$$A = \int_{\rho=1/2}^{1}\int_{\varphi=0}^{\pi} \rho d\rho d\varphi = \pi\int_{\rho=1/2}^{1} \rho d\rho = \pi\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{1/2}^{1} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3\pi}{8}.$$

5) 6) L'ensemble Ω s'écrit en coordonnées polaires sous la forme

$$\Omega = \{(\rho, \varphi, z) \mid \frac{1}{2} \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq z \leq 1\}.$$

7) On a

$$V = \iiint_\Omega dxdydz = \int_{\rho=\frac{1}{2}}^{1}\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{z=0}^{1} \rho d\rho d\varphi dz = \int_{\rho=\frac{1}{2}}^{1}\int_{\varphi=0}^{\pi} \rho d\rho d\varphi = A = \frac{3\pi}{8}.$$

8) On a

$$M = \iiint_\Omega \mu(x, y, z)dxdydz = \int_{\rho=\frac{1}{2}}^{1}\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{z=0}^{1} \rho e^z d\rho d\varphi dz = \pi\int_{\rho=\frac{1}{2}}^{1}\int_{z=0}^{1} \rho e^z d\rho dz$$

d'où

$$M = \pi\int_{\rho=\frac{1}{2}}^{1} [e^z]_0^1 \rho d\rho = \pi(e-1)\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{\pi}{2}(e-1)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3\pi}{8}(e-1)$$

9) a) Pour des raisons de symétrie $x_G = 0$. Précisément, si $(x, y, z) \in \Omega$ alors $(-x, y, z) \in \Omega$ et la densité est la même en ces deux points. Les contributions dans l'intégrale définissant x_G se compensent ce qui conduit à une intégrale nulle.
b) On a

$$z_G = \frac{1}{M}\iiint_\Omega z\mu(x, y, z)dxdydz = \frac{1}{M}\int_{\rho=\frac{1}{2}}^{1}\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{z=0}^{1} ze^z \rho d\rho d\varphi dz = \frac{\pi}{M}\int_{\rho=\frac{1}{2}}^{1}\int_{z=0}^{1} ze^z \rho d\rho dz.$$

et

$$z_G = \frac{\pi}{M}\int_{z=0}^{1}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} ze^z dz = \frac{3\pi}{8M}\int_{z=0}^{1} ze^z dz.$$

En effectuant une intégration par parties on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 ze^z dz &= [ze^z]_0^1 - \int_0^1 e^z dz \\ &= e - [e^z]_0^1 \\ &= 1\end{aligned}$$

Ainsi

$$z_G = \frac{3\pi}{8M} = \frac{1}{e-1}.$$

c) On n'a pas $y_G = 0$ car la définition de Ω fait apparaître que la valeur de y est positive et même strictement positive si $x < 1/2$. L'intégrale

$$y_G = \frac{1}{M} \iiint_\Omega y\mu(x,y,z)dxdydz$$

ne peut donc être nulle.