Examen terminal, session 1 – Lundi 5 mai 2025 - Durée 1h

Règlement – Une feuille recto-verso manuscrite de notes est autorisée ainsi que la feuille formulaire *Repères mobiles et champs vectoriels*. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Le barème des exercices est indiqué entre crochets. Les **réponses doivent être justifiées**.

Exercice 1 [6 pts] – On considère le champ de vecteurs $\vec{V}(x, y) = (x - y)\vec{i} + (x + y)\vec{j}$ et les deux courbes paramétrées suivantes

$$\gamma_1(t) = (\cos t - \sin t, \cos t + \sin t) \quad \text{et} \quad \gamma_2(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t).$$

- 1) [2 pts] Dessiner le champ de vecteurs $\vec{V}$ aux huit points $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ et $(-1, -1)$.
- 2) [1 pt] On considère une ligne de champ $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ de $\vec{V}$. Écrire les deux équations différentielles du premier ordre satisfaites par $x(t)$ et $y(t)$.
- 3) [2 pts] Dire pour chacune des deux courbes γ_1 et γ_2 si elles sont des lignes de champ de $\vec{V}$? On justifiera sa réponse.
- 4) [1 pt] On considère un point matériel situé en $A = (1, 0)$ au temps $t = 0$ et soumis au champ de vitesse $\vec{V}$. Où se trouve le point matériel au temps $t = \pi/2$?

Exercice 2 [4 pts] – Soit $\vec{C}$ un champ constant de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire

$$\vec{C}(x, y, z) = c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k}$$

où c_1, c_2 et c_3 sont des constantes. On définit un champ $\vec{B}$ de $\mathbb{R}^3$ et une fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{1}{2} \vec{C} \wedge \vec{r}(x, y, z) \quad \text{et} \quad f(x, y, z) = \langle \vec{C}, \vec{r}(x, y, z) \rangle$$

où $\vec{r}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ est le champ de vecteurs "position" et où la notation $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ signifie le produit scalaire entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- 1) [1 pt] Donner l'expression de $\vec{B}$ et de f en fonction de c_1, c_2, c_3 et (x, y, z) .
- 2) [1 pt] Que vaut $\text{rot } \vec{B}$?
- 3) [0,5 pt] Que vaut $\text{grad } f$?
- 4) [0.5 pt] Que vaut $\text{div } \vec{B}$?
- 5) [1 pt] Calculer le flux de $\vec{B}$ au travers de la sphère de centre l'origine, de rayon 1 et orientée par la normale sortante.

Exercice 3 [6 pts] – On considère le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\vec{U}(x, y, z) = \sin z \vec{i} + \cos z \vec{j}.$$

- 1) [1.5 pt] Le champ $\vec{U}$ est-il incompressible ? Admet-il un potentiel vectoriel ?

TSVP

2) [1.5 pt] Déterminer tous les potentiels vectoriels $\vec{A}$ de $\vec{U}$ de la forme

$$\vec{A} = a(z)\vec{i} + b(z)\vec{j} + c(z)\vec{k}.$$

3) [1 pt] Calculer la circulation $C_C(\vec{A})$ de $\vec{A}$ le long d'un cercle C^+ de centre l'origine, de rayon R , contenu dans le plan horizontal (Oxy) et parcouru dans le sens trigonométrique (inverse de celui des aiguilles d'une montre).

4) [1 pt] On considère l'hémisphère nord

$$\Sigma^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$$

orienté par la normale sortante $\vec{e}_r$. Figurer sur un dessin C^+ et Σ^+ . Les orientations de Σ^+ et de C^+ sont-elles compatibles ?

5) [1 pt] En s'appuyant sur les questions précédentes, calculer le flux sortant $\Phi_{\Sigma}(\vec{U})$ de $\vec{U}$ à travers Σ^+ .

Exercice 4 [4 pts] – Cet exercice fait suite à l'exercice 3. Il est néanmoins indépendant. Soient A, B et C trois constantes réelles non toutes les trois nulles, on définit un champ de vecteurs $\vec{V}$ de $\mathbb{R}^3$ par

$$\vec{V}(x, y, z) = (A \sin z + C \cos y)\vec{i} + (B \sin x + A \cos z)\vec{j} + (C \sin y + B \cos x)\vec{k}$$

En particulier, si l'on choisit $A = 1, B = 0$ et $C = 0$, on retrouve le champ $\vec{U}$ de l'exercice 3.

1) [2 pts] Le *laplacien vectoriel* d'un champ de vecteurs incompressible $\vec{W}$ est le champ de vecteurs $\Delta\vec{W}$ défini par

$$\Delta\vec{W} = \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{W}).$$

a) Montrer que $\vec{\text{rot}}\vec{V} = \vec{V}$.

b) En déduire que $\Delta\vec{V} = \vec{V}$.

2) [1 pt] Déterminer un potentiel vectoriel $\vec{A}$ de $\vec{V}$.

Indication : Se servir de la question précédente.

3) [1 pt] Calculer le flux sortant $\Phi_S(\vec{V})$ de $\vec{V}$ au travers de la sphère S de centre l'origine et de rayon 1.