Université Claude Bernard Lyon 1 **PCSI L1 - UE Math. Complémentaires**

Corrigé de l'examen terminal 1 – Lundi 5 mai 2025

Règlement – Une feuille recto-verso manuscrite de notes est autorisée ainsi que la feuille formulaire *Repères mobiles et champs vectoriels*. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Le barème des exercices est indiqué entre crochets. Les **réponses doivent être justifiées**.

Exercice 1 [6 pts] – On considère le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,y) = (x-y)\overrightarrow{i} + (x+y)\overrightarrow{j}$ et les deux courbes paramétrées suivantes

$$\gamma_1(t) = (\cos t - \sin t, \cos t + \sin t) \quad \text{et} \quad \gamma_2(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t).$$

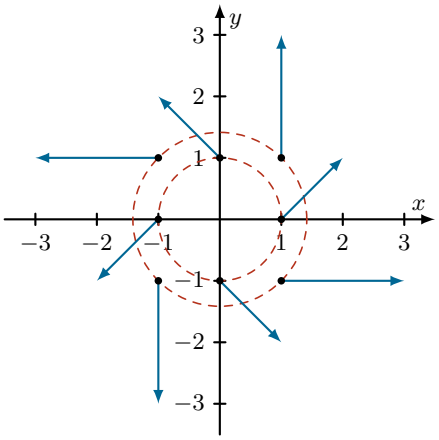
1) [2 pts] Dessiner le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ aux huit points $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ et $(-1,-1)$.

2) [1 pt] On considère une ligne de champ $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ de $\overrightarrow{V}$. Écrire les deux équations différentielles du premier ordre satisfaites par $x(t)$ et $y(t)$.

3) [2 pts] Dire pour chacune des deux courbes γ_1 et γ_2 si elles sont des lignes de champ de $\overrightarrow{V}$? On justifiera sa réponse.

4) [1 pt] On considère un point matériel situé en $A = (1,0)$ au temps $t = 0$ et soumis au champ de vitesse $\overrightarrow{V}$. Où se trouve le point matériel au temps $t = \pi/2$?

Rép.– 1) En tout point d'un cercle de centre l'origine et de rayon R, le champ $\overrightarrow{V}$ est sortant de norme $\sqrt{2}R$ et fait un angle de $\pi/4$ par rapport à la tangente.



2) Une courbe paramétrée $t \mapsto \gamma(t)$ est une ligne du champ $\overrightarrow{V}$ si $\gamma'(t) = \overrightarrow{V}(\gamma(t))$ c'est-à-dire

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) - y(t) \\ y'(t) &= x(t) + y(t) \end{cases}$$

3) La courbe γ_1 ne vérifie pas les équations des lignes de champs. Ce n'est donc pas une ligne de champ de $\overrightarrow{V}$. En revanche, la courbe γ_2 les vérifie, c'est donc une ligne de champ de $\overrightarrow{V}$.
4) On remarque que $\gamma_2(0) = A$. On en déduit que le point matériel se trouvera à la position

$$\gamma_2(\frac{\pi}{2}) = (e^{\pi/2}\cos \pi/2, e^{\pi/2} \sin \pi/2) = (0, e^{\pi/2}).$$

au temps $t = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2 [4 pts] – Soit $\overrightarrow{C}$ un champ constant de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire

$$\overrightarrow{C}(x,y,z) = c_1\,\overrightarrow{i} + c_2\,\overrightarrow{j} + c_3\,\overrightarrow{k}$$

où c_1, c_2 et c_3 sont des constantes. On définit un champ $\overrightarrow{B}$ de $\mathbb{R}^3$ et une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par

$$\overrightarrow{B}(x,y,z) = \frac{1}{2}\overrightarrow{C} \wedge \overrightarrow{r}(x,y,z) \quad \text{et} \quad f(x,y,z) = \langle \overrightarrow{C}, \overrightarrow{r}(x,y,z)\rangle$$

où $\overrightarrow{r}(x,y,z) = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$ est le champ de vecteurs "position" et où la notation $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle$ signifie le produit scalaire entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1) [1 pt] Donner l'expression de $\overrightarrow{B}$ et de f en fonction de c_1, c_2, c_3 et (x,y,z).
2) [1 pt] Que vaut $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{B}$?
3) [0,5 pt] Que vaut $\overrightarrow{\text{grad}}\ f$?
4) [0.5 pt] Que vaut div $\overrightarrow{B}$?
5) [1 pt] Calculer le flux de $\overrightarrow{B}$ au travers de la sphère de centre l'origine, de rayon 1 et orientée par la normale sortante.

Rép.– 1) 2) 3) et 4) On a

$$\overrightarrow{B} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_2 z - c_3 y \\ c_3 x - c_1 z \\ c_1 y - c_2 x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(x,y,z) = c_1 x + c_2 y + c_3 z.$$

Un calcul direct montre alors que $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{B} = \overrightarrow{C}$, $\overrightarrow{\text{grad}}\ f = \overrightarrow{C}$ et div $\overrightarrow{B} = 0$.
5) En appliquant le théorème de Gauss-Ostrogradki, et puisque div $\overrightarrow{B} = 0$, on obtient que le flux est nul.

Exercice 3 [6 pts] – On considère le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\overrightarrow{U}(x,y,z) = \sin z\,\vec{\imath} + \cos z\,\vec{\jmath}.$$

1) [1.5 pt] Le champ $\overrightarrow{U}$ est-il incompressible ? Admet-il un potentiel vectoriel ?
2) [1.5 pt] Déterminer tous les potentiels vectoriels $\overrightarrow{A}$ de $\overrightarrow{U}$ de la forme

$$\overrightarrow{A} = a(z)\vec{\imath} + b(z)\vec{\jmath} + c(z)\vec{k}.$$

3) [1 pt] Calculer la circulation $C_{\mathcal{C}}(\overrightarrow{A})$ de $\overrightarrow{A}$ le long d'un cercle $\mathcal{C}^+$ de centre l'origine, de rayon R, contenu dans le plan horizontal (Oxy) et parcouru dans le sens trigonométrique (inverse de celui des aiguilles d'une montre).
4) [1 pt] On considère l'hémisphère nord

$$\Sigma^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$$

orienté par la normale sortante $\overrightarrow{e}_r$. Figurer sur un dessin $\mathcal{C}^+$ et Σ^+. Les orientations de Σ^+ et de $\mathcal{C}^+$ sont-elles compatibles ?
5) [1 pt] En s'appuyant sur les questions précédentes, calculer le flux sortant $\Phi_\Sigma(\overrightarrow{U})$ de $\overrightarrow{U}$ à travers Σ^+.

Rép.– 1) Le calcul de la divergence donne div $\overrightarrow{U} = 0$. Le champ est donc incompressible. Puisque $\overrightarrow{U}$ est défini sur $\mathbb{R}^3$ qui est contractile, le lemme de Poincaré implique que $\overrightarrow{U}$ admet un potentiel vectoriel.
2) On doit résoudre $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{A} = \overrightarrow{U}$ c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a(z) \\ b(z) \\ c(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin z \\ \cos z \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit encore

$$\left\{\begin{array}{rcl} -b'(z) &=& \sin z \\ a'(z) &=& \cos z \\ 0 &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} b(z) &=& \cos z + C_b^{te} \\ a(z) &=& \sin z + C_a^{te} \end{array}\right.$$

Ainsi $\overrightarrow{A} = (\sin z + C_a^{te})\vec{\imath} + (\cos z + C_b^{te})\vec{\jmath} + c(z)\vec{k}$ est un potentiel vectoriel de $\overrightarrow{U}$. Si l'on choisit $c(z) = 0$ et $C_a^{te} = C_b^{te} = 0$, on constate que l'on a

$$\overrightarrow{A} = \sin z\ \vec{\imath} + \cos z\ \vec{\jmath} = \overrightarrow{U}.$$

3) Notons $\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$ une paramétrisation d'un cercle horizontal de rayon R et de centre l'origine. On a

$$\overrightarrow{\gamma}'(t) = (-R\sin t, R\cos t, 0), \quad \overrightarrow{A}(\gamma(t)) = \vec{\jmath} \quad \text{et} \quad \langle \overrightarrow{\gamma}'(t), \overrightarrow{A}(\gamma(t))\rangle = R\cos t$$

ainsi

$$C_\gamma(\overrightarrow{A}) = \int_0^{2\pi} R\cos t\, dt = 0.$$

4) Les orientations de $\mathcal{C}^+$ et Σ^+ sont compatibles.
5) Puisque $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A}$, d'après le théorème de Stokes on a

$$\Phi_\Sigma(\overrightarrow{U}) = C_\mathcal{C}(\overrightarrow{A}) = 0$$

l'égalité à zéro étant due au résultat de la question 3.

Exercice 4 [4 pts] – Cet exercice fait suite à l'exercice 3. Il est néanmoins indépendant. Soient A, B et C trois constantes réelles non toutes les trois nulles, on définit un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ de $\mathbb{R}^3$ par

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = (A\sin z + C\cos y)\,\vec{\imath} + (B\sin x + A\cos z)\,\vec{\jmath} + (C\sin y + B\cos x)\,\vec{k}$$

En particulier, si l'on choisit $A = 1$, $B = 0$ et $C = 0$, on retrouve le champ $\overrightarrow{U}$ de l'exercice 3.

1) [2 pts] Le *laplacien vectoriel* d'un champ de vecteurs incompressible $\overrightarrow{W}$ est le champ de vecteurs $\triangle\overrightarrow{W}$ défini par

$$\triangle\overrightarrow{W} = \overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{W}).$$

   a) Montrer que $\overrightarrow{\text{rot}}\,V = V$.
   b) En déduire que $\triangle\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}$.

2) [1 pt] Déterminer un potentiel vectoriel $\overrightarrow{A}$ de $\overrightarrow{V}$.
   Indication : Se servir de la question précédente.

3) [1 pt] Calculer le flux sortant $\Phi_S(\overrightarrow{V})$ de $\overrightarrow{V}$ au travers de la sphère S de centre l'origine et de rayon 1.

Rép.– 1 a) Le calcul du rotationnel de $\overrightarrow{V}$ donne

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A\sin z + C\cos y \\ B\sin x + A\cos z \\ C\sin y + B\cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\sin z + C\cos y \\ B\sin x + A\cos z \\ C\sin y + B\cos x \end{pmatrix} = \overrightarrow{V}$$

b) On en déduit

$$\triangle\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V}) = \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}.$$

2) Puisque $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}$, un potentiel vecteur pour $\overrightarrow{V}$ est $\overrightarrow{V}$ lui-même.
c) Le champ $\overrightarrow{V}$ admettant un potentiel vectoriel et la sphère n'ayant pas de bord, $\partial S = \emptyset$, le théorème de Stokes montre alors que le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers S est nul.