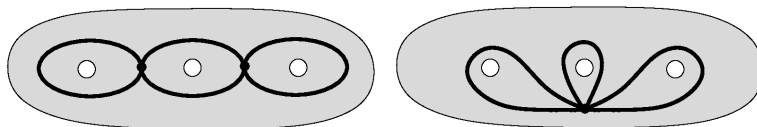


Université Claude Bernard Lyon 1
M1G – Topologie Algébrique
Contrôle partiel - 1er avril 2025 - durée 2h

Les documents sont autorisés mais les calculatrices et les portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Vrai-Faux. – Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse au moyen de brefs arguments et/ou d'un dessin éclairant.

1.– [2pts] Soient X une chaîne de trois cercles et Y un bouquet de trois cercles. On affirme que X et Y sont homotopiquement équivalents.



L'espace X (à gauche) et l'espace Y (à droite) représentées comme sous ensemble d'un troisième espace topologique Z homéomorphe à un disque privé de trois points.

2.– [2pts] On note $X = \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$ la sphère privée des pôles nord et sud, et $A = \mathbb{S}^1 \times \{0\}$ l'équateur de $\mathbb{S}^2$. On désigne par $i : A \rightarrow X$ l'inclusion naturelle et on considère l'application

$$r : X \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow A \subset \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}(x, y, 0).$$

Pour montrer que $i \circ r$ et id_X sont homotopes dans $C^0(X, X)$, on envisage deux candidats h_t et H_t , $t \in [0, 1]$, comme homotopies potentielles :

$$h_t = t id_X + (1-t)i \circ r \quad \text{et} \quad H_t(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{1-t^2z^2}}{\sqrt{1-z^2}} x \\ \frac{\sqrt{1-t^2z^2}}{\sqrt{1-z^2}} y \\ tz \end{pmatrix}.$$

Parmi les quatre assertions

- a) h_t et H_t conviennent également
- b) h_t convient et H_t ne convient pas

c) h_t ne convient pas et H_t convient
 d) ni h_t , ni H_t ne conviennent
 on affirme que c) est valide.

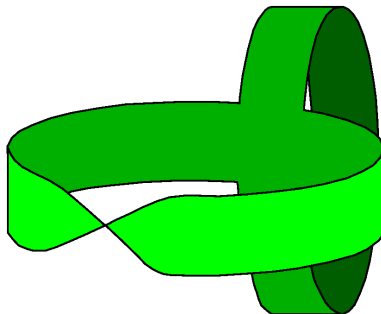
3. – [2pts] On considère le groupe unitaire $(\mathbb{S}^1, \cdot) \subset \mathbb{C}$ des nombres complexes de module 1, la loi interne étant la multiplication complexe. Soient $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ deux lacets basés en $1 \in \mathbb{S}^1$. On considère le lacet $\gamma := \gamma_1 \cdot \gamma_2$ obtenu par multiplication complexe. On affirme que

$$[\gamma] = [\gamma_1] + [\gamma_2] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) = \mathbb{Z}.$$

4. – [2pts] On considère l'union X d'un cylindre et d'un ruban de Möbius (cf. la figure ci-dessous). Soit $x \in X$. Parmi les quatre assertions

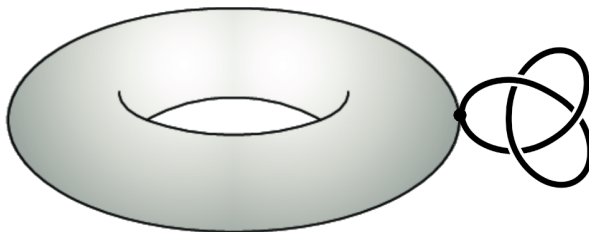
- (a) $\pi_1(X, x) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, (b) $\pi_1(X, x) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$,
 (c) $\pi_1(X, x) = \mathbb{Z}^2$, (d) $\pi_1(X, x) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$,

on affirme que d) est valide.



L'espace X , union d'un cylindre et d'un ruban de Möbius.

5. – [2pts] On considère dans $\mathbb{R}^3$ le bouquet $X = T^2 \vee K$ constitué d'un tore de révolution T^2 et d'un nœud de trèfle K (voir la figure ci-dessous). On note x le point d'attache. On affirme que $\pi_1(X, x) = \mathbb{Z}^2 * (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$.



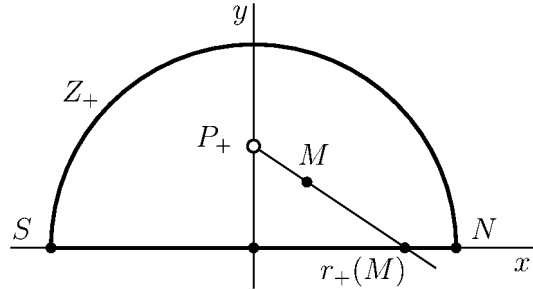
Le bouquet $X = T^2 \vee K$.

Problème.— Le but du problème est de déterminer les groupes fondamentaux de l'espace complémentaire à un cercle ou à deux cercles enlacés.

PARTIE 1 : GROUPE FONDAMENTAL DE $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{S}^1$.— On note

$$E_+ = \{(x, y) \mid 0 \leq y\} \setminus \{P_+\}$$

le demi plan supérieur fermé privé du point $P_+ := (0, 1)$ et $Z_+ = C_+ \cup [SN]$ le sous-espace de E_+ constitué du demi-cercle supérieur $C_+ = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4, 0 \leq y\}$ et du segment d'extrémités $S = (-2, 0)$ et $N = (2, 0)$.



L'application r_+ . On prendra garde que l'énoncé ne définit pas r_+ pour les points $M(x, y)$ tels que $y < 0$.

1) On considère l'application $r_+ : E_+ \rightarrow Z_+$ qui à tout point $M(x, y)$ de E_+ fait correspondre l'intersection du rayon $[P_+M)$ avec Z_+ .

a) Montrer que $r_+(x, y)$ s'écrit sous la forme

$$r_+(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_+(x, y) \begin{pmatrix} x \\ y - 1 \end{pmatrix}$$

où λ_+ est une fonction strictement positive qu'on ne cherchera pas à déterminer.

b) Que vaut λ_+ si $(x, y) \in Z_+$.

c) Pour tout $t \in [0, 1]$, on pose $H_t := t \text{id}_{E_+} + (1 - t) r_+$. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, l'image de H_t évite P_+ .

d) On admet que λ_+ est continue. Dédurre de c) que E_+ a le type d'homotopie de Z_+ .

e) Donner une structure naturelle de CW-complexe de dimension 1 sur Z_+ .

f) Déterminer le groupe fondamental $\pi_1(Z_+, N)$ puis celui de E_+ au point N .

2) Soit $P_- := (0, -1)$. On note $\mathbb{S}^0 := \{P_-, P_+\}$ et on s'intéresse maintenant à l'espace $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{S}^0$.

a) Construire une rétraction par déformation T de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus D(2)$ où $D(2)$ est le disque de centre l'origine et de rayon 2.

b) Soient $C_- := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4, y \leq 0\}$ le demi-cercle inférieur et $Z := Z_+ \cup C_-$. Dédurre de la question 1) et de 2a) une rétraction par déformation r de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{S}^0$ sur Z .

c) Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{S}^0$ a le type d'homotopie d'un CW-complexe de dimension 1.

d) Déterminer le groupe fondamental de ce CW-complexe en un de ses sommets, puis celui de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{S}^0$ au point N .

3) On considère $E_+ \subset \mathbb{R}^3$ comme le sous-espace

$$\{(x, y, 0) \mid 0 \leq y\} \setminus \{P_+\} \quad \text{avec} \quad P_+ = (0, 1, 0).$$

On note Rot_θ la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'angle θ et d'axe (Ox) . On a ainsi

$$\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{C} = \bigcup_{\theta \in [0, 2\pi[} Rot_\theta(E_+)$$

où $\mathcal{C}$ est le cercle $\bigcup_{\theta \in [0, 2\pi[} Rot_\theta(P_+)$.

a) Reconnaître la nature géométrique de

$$\mathcal{S} := \bigcup_{\theta \in [0, 2\pi[} Rot_\theta(C_+).$$

b) Soit $\tilde{Z} = \bigcup_{\theta \in [0, 2\pi[} Rot_\theta(Z_+)$. Faire un dessin de $\tilde{Z}$ faisant apparaître $Z \subset \tilde{Z}$.

c) Décrire une structure de CW complexe de dimension 2 sur $\tilde{Z}$ qui étend celle de Z .

d) On définit une application continue $\tilde{r} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ au moyen des rotations Rot_θ en posant pour tout $p = (x, y, z)$:

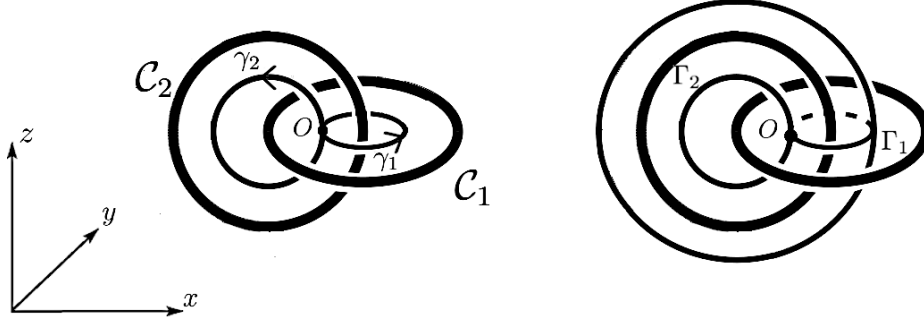
$$\tilde{r}(p) = \begin{cases} Rot_\theta \circ T \circ Rot_{-\theta}(p) & \text{si } p \in Rot_\theta(E_+) \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 > 4 \\ Rot_\theta \circ r_+ \circ Rot_{-\theta}(p) & \text{si } p \in Rot_\theta(E_+) \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \end{cases}$$

L'application $\tilde{r}$ est-elle une rétraction par déformation de $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}$ sur $\tilde{Z}$? Justifier.

e) Utiliser le théorème de Van Kampen pour déterminer le groupe fondamental $\pi_1(\tilde{Z}, N)$. On choisira des voisinages convenables U et V , respectivement de $\mathcal{S}$ et du cercle topologique $[SN] \cup C_+$, dans $\tilde{Z}$. On fera un dessin soigné pour les représenter.

f) En déduire le groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{C}, N)$.

PARTIE 2 : GROUPE FONDAMENTAL DE L'ENTRELACS DE HOPF.—



À gauche : les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ (en gras) et les lacets γ_1 et γ_2 (en fin). Pour ne pas surcharger la figure, le repère n'est pas centré en O . À droite : le tore T_2 . Un méridien est donné par l'image Γ_1 de γ_1 tandis que le cercle de gorge est l'image Γ_2 de γ_2 .

On considère les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ définis ci-dessous :

- le cercle $\mathcal{C}_1$ est inclus dans le plan (Oxy) , de rayon 2 et de centre $(1, 0, 0)$.
- le cercle $\mathcal{C}_2$ est inclus dans le plan (Oxz) , de rayon 2 et de centre $(-1, 0, 0)$.

On dit que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ forment un *entrelacs de Hopf*. On s'intéresse à l'espace $X = \mathbb{R}^3 \setminus (\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2)$. On note O l'origine et on introduit deux lacets $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$ basés en O et définis par

$$\begin{aligned}\gamma_1(s) &:= (1 - \cos 2\pi s, -\sin 2\pi s) \\ \gamma_2(s) &:= (-1 + \cos 2\pi s, \sin 2\pi s).\end{aligned}$$

Il découle de la partie 1 que le lacet γ_1 est un générateur du groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{C}_2, O)$ et que le lacet γ_2 est un générateur du $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{C}_1, O)$. Enfin, on introduit les tores T_1 et T_2 tels que :

- T_1 a pour méridien l'image Γ_2 de γ_2 et pour cercle de gorge, l'image Γ_1 de γ_1 .
- T_2 a pour méridien l'image de γ_1 et pour cercle de gorge, l'image de γ_2 .

4) a) Montrer que ni le lacet γ_1 , ni le lacet γ_2 ne sont homotopes au lacet constant c_O dans $X = \mathbb{R}^3 \setminus (\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2)$.

b) Pour quelle raison le lacet $\gamma_1 * \gamma_2 * \bar{\gamma}_1 * \bar{\gamma}_2$ est-il homotope dans X au lacet constant c_O ?

c) Décrire une structure de CW complexe de dimension 2 sur $W := T_1 \cup T_2$.

d) On admet que $T_1 \cup T_2$ est un rétract par déformation de X . Calculer $\pi_1(X, O)$.